Άρα $\mu(B_n) \to 0$ άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\varphi(\mu(B_n)) < \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_1$
Επειδή $H_\mu(\xi) = -\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ln \mu(A_i) < \infty$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$-\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i) \ln \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$. Τότε για $n \geq \max\{n_1, n_2\}$

έχουμε ότι η η ικανοποιεί $H_\mu(\xi|\eta) < \varepsilon$

<u>Θεώρημα Kolmogorov Sinai</u>

μάθημα 27°
21/1/19

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ $\xi \subseteq \mathcal{A}$ αριθμήσιμη
$H_\mu(\xi)$ πληροφορία από ξ, $h_\mu(T, \xi)$ μέση πληροφορία που δίνει η ξ καθώς εξελίσσεται. Εντροπία συστήματος:
$\sup_{\xi} h_\mu(T, \xi) = h_\mu(T)$

<u>Ορισμός</u> Αν $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ σ-άλγεβρες σε ένα χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ τότε $\mathcal{B} = \mathcal{C} (\mathrm{mod}\, \mu)$ αν:
$\forall B \in \mathcal{B}$ $\exists C \in \mathcal{C}$ τ.ω. $\mu(B \triangle C) = 0$, και
$\forall C \in \mathcal{C}$ $\exists B \in \mathcal{B}$ τ.ω. $\mu(B \triangle C) = 0$

<u>Ορισμός</u> $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. Μια πεπερασμένη διαμέριση $\xi \subseteq \mathcal{A}$ του X λέγεται μονόπλευρος γεννήτορας αν $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi = \mathcal{A} (\mathrm{mod}\, \mu)$

όπου $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα

τα $\bigvee_{k=0}^{n} T^{-k}\xi$.
Όταν το σύστημα είναι αντιστρέψιμο, μια πεπερασμένη διαμέριση $\xi \subseteq \mathcal{A}$ λέγεται αμφίπλευρος γεννήτορας αν
$\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{n}\xi = \mathcal{A} (\mathrm{mod}\, \mu)$

Θεώρημα Kolmogorov-Sinai

Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. Αν ξ είναι ένας γεννήτορας του συστήματος τοτε $h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi)$.

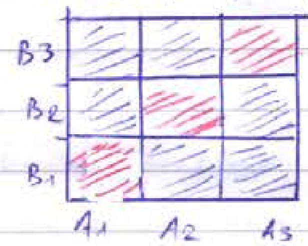
Ομοια εν το σύστημα είναι αντιστρέψιμο και $\xi \subseteq \mathcal{A}$ είναι ενας αμφίπλευρος γεννήτορας τοτε $h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi)$.

Λήμμα Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ και $n \in \mathbb{N}$. Τοτε $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ τ.ω. για οποιεσδήποτε δύο πεπερασμένες μετρήσιμες διαμερίσεις $\xi = \{A_1, \dots, A_n\}$ και $\eta = \{B_1, \dots, B_n\}$ τ.ω. $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \triangle B_i) < \delta$

τοτε $H_\mu(\xi | \eta) + H_\mu(\eta | \xi) < \varepsilon$

απόδειξη $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ εχουν δοθεί. Επιλέγουμε $\delta \in (0, 1/e)$ τ.ω. $n(n-1)\delta \ln \delta + (1-\delta)\ln(1-\delta) < \varepsilon/2$

Εστω $\xi = \{A_1, \dots, A_n\}$ και $\eta = \{B_1, \dots, B_n\}$ πεπερασμένες μετρήσιμες διαμερίσεις του X τ.ω. $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \triangle B_i) < \delta$



Ορίζουμε $\zeta = \{A_i \cap B_j \,/\, i \neq j\} \cup \{\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i)\}$

Εχουμε $\zeta \vee \eta = \xi \vee \eta$ επομένως $H_\mu(\eta) + H_\mu(\xi | \eta) = H_\mu(\xi \vee \eta) = H_\mu(\zeta \vee \eta) \leq$
$\leq H_\mu(\zeta) + H_\mu(\eta) \Rightarrow H_\mu(\xi | \eta) \leq H_\mu(\zeta)$

$$H_\mu(\zeta) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \mu(A_i \cap B_j) \ln \mu(A_i \cap B_j) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i)\right) \ln \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i)\right) \quad (***)$$

Εστω $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$

$A_i \cap B_j \subseteq A_i \triangle B_i$ (ομοια $A_i \cap B_j \subseteq A_j \triangle B_j$) αρα $\mu(A_i \cap B_j) < \delta$

αρα $\mu(A_i \cap B_j) \ln \mu(A_i \cap B_j) > \delta \ln \delta \quad \forall i \neq j \quad (*)$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} [\mu(A_i \cup B_i) - \mu(A_i \triangle B_i)] > \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cup B_i) - \delta$$

$\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \delta = 1 - \delta$. Αρα $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_i) \ln \sum_{i=1}^{n} (\mu(A_i \cap B_i)) >$

$> (1-\delta)\ln(1-\delta) \quad (**)$

Απο $(*), (**), (***) \Rightarrow H_\mu(\zeta) \leq -\delta \ln \delta\, n(n-1) - (1-\delta)\ln(1-\delta) < \varepsilon/2$

αρα $H_\mu(\xi | \eta) \leq H_\mu(\zeta) < \varepsilon/2$ και ομοια $H_\mu(\eta | \xi) < \varepsilon/2$

Λήμμα Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ εδμ και $\mathcal{F}$ μια αλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ τ.ω. $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A} \pmod{\mu}$. Τοτε $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall \xi \subseteq \mathcal{A}$ πεπερασμενη διαμεριση, υπαρχει πεπερασμένη διαμέριση $\eta \subseteq \mathcal{F}$ τ.ω. $H_\mu(\xi/\eta) < \varepsilon$

αποδειξη Υπενθυμιση: Αν $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χωρος πιθανοτητας και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ είναι αλγεβρα τ.ω. $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ τοτε $\forall \varepsilon > 0$ $\forall B \in \mathcal{B}$ $\exists C \in \mathcal{C}$ τ.ω. $\mu(C \triangle B) < \varepsilon$

Εστω $\xi = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ διαμεριση του X. Εστω $\varepsilon > 0$. Εστω δ το δ του προηγούμενου λημματος για αυτά τα ε, n. Αρκει να βρεθεί διαμέριση $\eta = \{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \mathcal{F}$ τ.ω. $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \triangle B_i) < \delta$

Εστω $\gamma > 0$ το οποίο θα επιλεχθεί αργότερα.
$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\exists C_i \in \mathcal{F}$ τ.ω. $\mu(A_i \triangle C_i) < \gamma$. Κατασκευάζουμε διαμέριση του X απο τα C_i. Θέτουμε $C = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$

Ορίζουμε $B_i = C_i \setminus C$ $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Τοτε για $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ $B_i \cap B_j = (C_i \cap C^c) \cap (C_j \cap C^c) = \emptyset$
Επισης θέτουμε $B_n = X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$. Τοτε $\eta = \{B_1, \dots, B_n\}$ διαμέριση. $C_1, \dots C_n \in \mathcal{F}$ αρα $C \in \mathcal{F}$ αρα $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{F}$ και αρα $B_n \in \mathcal{F}$. Αρα $\eta \subseteq \mathcal{F}$.
Για $i \in \{1, \dots, n-1\}$ $A_i \triangle B_i = A_i \triangle (C_i \cap C^c) =$
$= [A_i \cap (C_i^c \cup C)] \cup [A_i^c \cap (C_i \cap C^c)] \subseteq (A_i \cap C_i^c) \cap (A_i^c \cap C_i)$
$= (A_i \triangle C_i) \cup (A_i \cap C)$. Αρα $\mu(A_i \triangle B_i) < \gamma + \mu(A_i \cap C)$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$. Επίσης $A_n \triangle B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \triangle B_i)$ γιατί τα

$A_1, \dots, A_n$ και $B_1, \dots, B_n$ είναι διαμερίσεις.
Αρα $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \triangle B_i) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i \triangle B_i) \leq 2\gamma(n-1) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i \cap C)$

$\leq 2\gamma(n-1) + 2\mu(C) \leq 2\gamma(n-1) + 2n(n-1)\gamma = 2(n^2-1)\gamma$
Αρα αρκει να πάρουμε $0 < \gamma < \frac{\delta}{2(n^2-1)}$

Πόρισμα Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. και $\xi_1 \le \xi_2 \le \dots$ αύξουσα ακολουθία πεπερασμένων και μετρήσιμων διαμερίσεων του X τω $\mathcal{A} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \xi_n \pmod{\mu}$. Τότε για κάθε πεπερασμένη διαμέριση $\xi \subseteq \mathcal{A}$ του X έχουμε ότι $H_\mu(\xi | \xi_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$

απόδειξη Οι σ-άλγεβρες $\sigma(\xi_n), n \in \mathbb{N}$

$\xi_n \le \xi_{n+1} \Rightarrow \xi_n \subseteq \sigma(\xi_{n+1}) \Rightarrow \sigma(\xi_n) \subseteq \sigma(\xi_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Έπεται ότι η $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_n) = \mathcal{F}$ είναι άλγεβρα και $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_n)\right)$

$= \bigvee_{n=1}^{\infty} \xi_n = \mathcal{A} \pmod{\mu}$. Δοθέντος ε το $\exists \eta \subseteq \mathcal{F}$ τω. $H_\mu(\xi | \eta) < \varepsilon$

η πεπερασμένη $\eta \subseteq \mathcal{F}$, η πεπερασμένη $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\eta \subseteq \sigma(\xi_m)$ και άρα $\eta \subseteq \sigma(\xi_n) \ \forall n \ge m$. Τότε $\eta \le \sigma(\xi_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ κάθε στοιχείο της η γράφεται σαν πεπερασμένη ένωση στοιχείων της ξ_n άρα $\eta \le \xi_n \ \forall n \ge m$. Άρα $H_\mu(\xi | \xi_n) \le H_\mu(\xi | \eta) < \varepsilon \ \forall n \ge m$.

απόδειξη θεωρήματος Kolmogorov-Sinai

Έστω ξ είναι γεννήτορας του συστήματος. Αρκεί ν.δ.ο. για κάθε πεπερασμένη $\eta \subseteq \mathcal{A}$ διαμέριση του X ισχύει ότι $h_\mu(T, \eta) \le h_\mu(T, \xi)$.

Έστω $\eta \subseteq \mathcal{A}$ τυχαία πεπερασμένη διαμέριση του X.

$$h_\mu(T, \eta) \le h_\mu\left(T, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) + H_\mu\left(\eta \,\Big|\, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) =$$

$$= h_\mu(T, \xi) + H_\mu\left(\eta \,\Big|\, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right).$$ Θέτουμε $\xi_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi, \ n \in \mathbb{N}$

τότε $\xi_1 \le \xi_2 \le \dots$ και $\bigvee_{n=1}^{\infty} \xi_n = \mathcal{A} \pmod{\mu}$ επειδή η ξ είναι γεννήτορας. Από το πόρισμα $H_\mu\left(\eta \,\Big|\, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \to 0$.

Αν το σύστημα είναι αντιστρέψιμο και ξ αμφίπλευρος γεννήτορας δηλ. $\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} T^{-n}\xi = \mathcal{A} \pmod{\mu}$ ορίζω $\xi_n = \bigvee_{i=-n+1}^{n-1} T^{-i}\xi$ τότε

$\xi_n \le \xi_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \xi_n = \mathcal{A} \pmod{\mu}$

Πάλι για $\eta \in \mathcal{A}$ τυχαία πεπερασμένη διαμέριση

$$h_\mu(T, \eta) \le h_\mu\left(T, \bigvee_{i=-n+1}^{n-1} T^{-i}\xi\right) + H_\mu\left(\eta \,\Big|\, \bigvee_{i=-n+1}^{n-1} T^{-i}\xi\right) =$$

$= h_\mu(T,\xi) + \underbrace{o(1)}$

και που $\to 0$ καθώς $n \to \infty$

<u>Πρόταση</u> Αν $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ αντιστρέψιμο σδμ που έχει μονόπλευρο γεννήτορα τότε $h_\mu(T) = 0$.

<u>απόδειξη</u> Έστω ξ ο μονόπλευρος γεννήτορας. $h_\mu(T) = h_\mu(T,\xi) =$

$\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} H_\mu(\xi \mid \bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\xi) = \lim_{n\to\infty} H_\mu(T\xi \mid T \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi) =$

$= \lim_{n\to\infty} H_\mu(T\xi \mid \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) = 0$

<u>(*) Λήμμα</u> Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ και $\xi \subseteq \mathcal{A}$ αριθμήσιμη διαμέριση του X με $H_\mu(\xi) < +\infty$. Τότε $h_\mu(T,\xi) = \lim_{n\to\infty} H_\mu(\xi \mid \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi)$

<u>απόδειξη</u>

$H_\mu(\xi / \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi), n \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα ακολουθία άρα έχει όριο

$h_\mu(T,\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big[H_\mu(\xi) + \sum_{j=1}^{n-1} H_\mu(\xi / \bigvee_{i=1}^{j} T^{-i}$

$= 0 + \lim H_\mu(\xi / \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi)$

<u>Παράδειγμα</u> S πεπερασμένο σύνολο. $X = S^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A} = \sigma(\text{κύλινδροι})$

Θεωρούμε και $p = (p_s)_{s\in S}$ τω. $p_s > 0$ $\sum_{s\in S} p_s = 1$

και $\mu(\{\underset{\sim}{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} / x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n\}) = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}$

και T shift. Θεωρούμε τη διαμέριση $\xi = \{[s] / s \in S\}$

$[s] = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X / x_1 = s\}$, $s \in S$

$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi : [i_0] \cap T^{-1}[i_1] \cap \dots \cap T^{-(n-1)}[i_{n-1}] =$

$= \{\underset{\sim}{x} / (x_n)_{n\in\mathbb{N}} / x_1 = i_0, x_2 = i_1, \dots, x_n = i_{n-1}\}$ Εξ ορισμού

$\mathcal{A} = \bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\xi$ άρα ξ γεννήτορας. Άρα $h_\mu(T) = h_\mu(T,\xi)$

$\frac{1}{n} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{i_1,\dots,i_n \in S} \mu(\{x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n\}) \ln\mu(\{x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n\})$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{i_1\in S}\cdots\sum_{i_n\in S} p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}\ln(p_{i_1}\cdots p_{i_n}) = -\frac{1}{n}\sum_{i_1\in S}\cdots\sum_{i_n\in S} p_{i_1}\cdots p_{i_n}(\ln p_{i_1}+\ldots\ln p_{i_n})$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{i_1\in S}\sum_{i_2\in S}\cdots\sum_{i_n\in S} p_{i_1}\cdots p_{i_n}\ln p_{i_1} - \frac{1}{n}\sum_{i_1\in S}\cdots\sum_{i_n\in S} p_{i_1}\cdots p_{i_n}\ln p_{i_2}$$

$$\cdots - \frac{1}{n}\sum_{i_1\in S}\cdots\sum_{i_n\in S} p_{i_1}\cdots p_{i_n}\ln p_{i_n} =$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{i_1\in S} p_{i_1}\ln p_{i_1} - \frac{1}{n}\sum_{i_2\in S} p_{i_2}\ln p_{i_2} - \cdots - \frac{1}{n}\sum_{i_n} p_{i_n}\ln p_{i_n}$$

$$= \sum_{s\in S} p_s \ln p_s$$

μάθημα 28°
23/11/19

Δομή (αριθμητική) σε μεγάλα σύνολα ακεραίων

Θεώρημα Van der Waerden
Αν $\mathbb{N} = C_1\cup\ldots\cup C_r$ διαμέριση του $\mathbb{N}$ τότε $\exists\, i\in\{1,\ldots,r\}$ τ.ω. C_i να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k για κάθε $k\in\mathbb{N}$.

Ορισμός Αν $E\subseteq\mathbb{N}$ τότε η άνω πυκνότητα Banach του E είναι $\bar{d}_B(E) = \limsup\limits_{N-M\to\infty} \frac{|E\cap[M,N)|}{N-M}$

Θεώρημα Szemeredi
Αν $E\subseteq\mathbb{N}$ έχει θετική άνω πυκνότητα Banach τότε περιέχει αριθμητικές προόδους αυθαίρετου μήκους.

Εικασία Erdos Turan
Περίπτωση προόδων μήκους 3: Roth 1952
Szemeredi: $k=4$ 1969
Szemeredi γενικό k 1975
Furstenberg: αυθαίρετο k 1977

Θεώρημα Furstenberg

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ και $k \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-j} A \cap \dots \cap T^{-jk} A) > 0$$

Πόρισμα

Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, $k \in \mathbb{N}$ δοθέν $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω

$\mu(A \cap T^{-n}(A) \cap T^{-2n} A \cap \dots \cap T^{-kn} A) > 0$

Θεώρημα πολλαπλής επαναφοράς του Furstenberg.

Θεώρημα Furstenberg

Έστω p πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$ και $p(0) = 0$. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Τότε $\exists n$ τ.ω.

$\mu(A \cap T^{-p(n)} A) > 0$

Θεώρημα Sarkozy - Furstenberg

Αν $E \subseteq \mathbb{N}$ με $\overline{d_B}(E) > 0$ και p είναι πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$ τότε $\exists x, y \in E$ και $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x - y = p(n)$

<u>απόδειξη</u> Θ. Furstenberg $\Rightarrow$ Θ. Sarkozy-Furstenberg

Correspondence principle

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A} = \sigma(\text{κυλίνδροι})$, $T : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ shift

$[i] = \{ \underset{\sim}{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,/\, x_1 = i \}$

Ορίζουμε $x^E \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\quad x_n^E = \begin{cases} 1, & n \in E \\ 0, & n \notin E \end{cases}$

$X = \overline{\{T^k x^E \,/\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}}$ $\qquad T_X = T|_X$

$A = [1] \cap X$ κλειστό και ανοιχτό στο X

$T^k x^E \in A \Leftrightarrow x_{k+1}^E = 1 \Leftrightarrow k+1 \in E$

$\overline{d_B}(E) > 0$ $\quad \exists N_j, M_j \in \mathbb{N}$ τ.ω. $N_j - M_j \to \infty$

$$\frac{1}{N_j - M_j} \sum_{k=M_j}^{N_j - 1} 1\!\!1_E(k) \to \overline{d_B}(E) > 0$$

Ορίζουμε $\mu_j = \dfrac{1}{N_j - M_j} \displaystyle\sum_{k=M_j}^{N_j - 1} \delta_{T^k x^E}$

Επειδή X συμπαγής, $M(X)$ συμπαγής μ.χ. $\exists j_1 < j_2 < \dots$ υπακολουθία: $\mu_{j_n} \xrightarrow{\text{ασθ}^*} \mu$ κάποιο $\mu \in M(X)$ και το μ είναι

T_x αναλλοίωτο.

Ισχυρισμός: $\mu(A)>0$. Επειδή A ανοικτό και κλειστό $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{j_n}(A) =$

Λήμμα Σε έναν μετρικό χώρο συμπαγή για μέτρα πιθανότητας μ_n, μ, $n \in \mathbb{N}$ $\mu_n \to \mu$ ασθενώς * $\Rightarrow$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu_n(F) \le \mu(F)$ $\forall F$ κλειστό

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu_n(U) \ge \mu(U)$ $\forall U$ ανοικτό

$\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ όταν $\mu(\partial A) = 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_{j_n}-M_{j_n}} \sum_{k=M_{j_n}}^{N_{j_n}-1} 1\!\!1_A(T^k x^E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_{j_n}-M_{j_n}} \sum_{k=M_{j_n}}^{N_{j_n}-1} 1\!\!1_E(k+1) =$$

$$= \overline{d}_B(E) > 0$$

Από Θεώρημα Sarkozy - Furstenberg $\exists n$ τ.ω. $\mu(A \cap T_x^{-p(n)} A) > 0$

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{j_n}(A \cap T_x^{-p(n)} A) > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_{j_n}-M_{j_n}} \sum_{k=M_{j_n}}^{N_{j_n}-1} 1\!\!1_{A \cap T_x^{-p(n)} A}(T^k x^E) > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_{j_n}-M_{j_n}} \sum_{k=M_{j_n}}^{N_{j_n}-1} 1\!\!1_E(k+1)\, 1\!\!1_E(k+1+p_n) > 0$$

απόδειξη Λήμματος

Γνωρίζουμε ότι $\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$ $\forall f \in C(X)$

Έστω F κλειστό, $U_k := \{x \in X \,/\, dist(x,F) < \frac{1}{k}\}$

Έστω $f_k(x) = \dfrac{dist(x, U_k^c)}{dist(x,U_k^c) + dist(x,F)}$

$f_k(x) = 1$ $\forall x \in F$, $f_k(x) = 0$ $\forall x \in U_k^c$ και $0 \le f_k(x) \le 1$ $\forall x \in X$, και $f_k \in C(X)$

$\mu_n(F) \le \int f_k\, d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f_k\, d\mu \le \mu(U_k)$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu_n(F) \le \mu(U_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ αλλά $U_k \downarrow F$ άρα $\mu(U_k) \to \mu(F)$

άρα $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu_n(F) \le \mu(F)$

Θεώρημα $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ, p πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$ και $p(0)=0$. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A)>0$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τω. $\mu(A \cap T^{-p(n)}A) > 0$.

απόδειξη Έστω U_T ο τελεστής Koopman του συστήματος. Ορίζουμε

$$H_m = \{ f \in L^2(X,\mathcal{A},\mu) \ / \ U_T^m f = f \}, \text{ για } m \in \mathbb{N}$$

$$V_m = \overline{\{ h - U_T^m h \ / \ h \in L^2(X,\mathcal{A},\mu)\}}$$

Τότε $H_m^{\perp} = V_m$. Έστω $h - U_T^m h \in V_m$, $f \in H_m$

$$\langle h - U_T^m h, f \rangle = \langle h, f \rangle - \langle U_T^m h, f \rangle = \langle h, f\rangle - \langle h, (U_T^m)^* f \rangle =$$
$$= \langle h, f \rangle - \langle h, f \rangle = 0 \quad \text{Τότε } V_m \subseteq H_m^{\perp}$$

Επειδή H_m κλειστός αν $g \in H_m^{\perp}$ δηλ $\langle g, f\rangle = 0 \ \forall f \in H_m$

$\langle g, (U_T^m)^* f \rangle = 0 \ \forall f \in H_m \quad \langle g - U_T g, f \rangle = 0 \ \forall f \in H_m$

τότε $H_m^{\perp} = V_m \ \forall m \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $H = \overline{\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m\right)}$, $V = \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$

ισχύει ότι $H^{\perp} = V$.

Πράγματι $g \in V$ τότε $g \in V_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $g \in H_n^{\perp} \ \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα $g \in H^{\perp}$. Αν $g \perp H_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $g \in V_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα $g \in \bigcap_{k=1}^{\infty} V_n$

Έπεται ότι $L^2(X,\mathcal{A},\mu) = H \oplus V$. Θεωρούμε τα:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mu(A \cap T^{-p(k)}A) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \int 1_A \, 1_A \circ T^{p(k)} \, d\mu.$$

Θεωρούμε $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U_T^{p(n)} 1_A$. Γράφουμε $1_A = h + g$ με $h \in H$, $g \in V$

Γράφουμε $1_A = h_m + g_m$ με $h_m \in H$, $g_m \in V$

Έστω $h \in H_m$ τότε $U_T h = U_T U_T^m h = U_T^m U_T h$ και άρα

$U_T H_m \subseteq H_m$ άρα $U_T\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m\right) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$ δηλ $U_T(H) \subseteq H$

Αν $g \in V_n$ τότε $g = f - U_T^n f$, τότε $U_T g = U_T f - U_T U_T^n f =$
$= U_T f - U_T^n(U_T f) \in V_n$ άρα $U_T V \subseteq V$

$$\left\langle \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U_T^{p(n)} 1_A, 1_A \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U_T^{p(n)} h, 1_A \right\rangle + \left\langle \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U_T^{p(n)} g, 1_A \right\rangle$$

$$= \underbrace{\left\langle \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U_T^{p(n)} h, h \right\rangle}_{\text{"καλό κομμάτι" εχ. θετικό όριο}} + \underbrace{\left\langle \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} U_T^{p(n)} g, g \right\rangle}_{\text{"χαοτικό κομμάτι"} \to 0}$$