Έχουμε $\widehat{f\circ S}(\underset{\sim}{n}) = \int\cdots\int e^{-2\pi i\langle \underset{\sim}{n}, \underset{\sim}{t}\rangle} f(S(t_1,\dots,t_d))dt_1\dots dt_d =$

$= e^{2\pi i n_1 a}\int\cdots\int e^{-2\pi i\langle \underset{\sim}{n}, S^{-1}\underset{\sim}{t}\rangle} f(t)\,dt_1\cdots dt_d =$

$= \int\cdots\int e^{-2\pi i\langle (S^{-1})^* n, t\rangle} f(t)\,dt_1\dots dt_d\, e^{2\pi i a n_1} =$

$= \hat{f}((S^{-1})^* n)e^{2\pi i a n_1}$. Πρέπει $\hat{f}(n) = \hat{f}((S^{-1})^* n)e^{2\pi i a n_1}$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d$

Ισοδύναμα $\hat{f}(S^* n) = \hat{f}(n)e^{2\pi i n_1 a}$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d$. Άρα πρέπει $|\hat{f}(S^* n)| = |\hat{f}(n)|$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d$. Άρα $|\hat{f}((S^*)^p n)| = |\hat{f}(n)|$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d$ $\forall p\in\mathbb{N}$.

Αν τα $(S^*)^p n$, $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, η ισότητα Parseval δίνει ότι πρέπει $\hat{f}(n)=0$.

$$\infty > \|f\|_2^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}|\hat{f}(m)|^2 \geq \sum_p |\hat{f}(S^p n)|^2 = \sum_p |\hat{f}(n)|^2$$

Επομένως $\hat{f}(n)=0$ $\forall n$ για το οποίο τα $(S^*)^p n$, $p\in\mathbb{N}$ είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Έστω τώρα ότι υπάρχουν πεπερασμένα διαφορετικά

Ισχυρισμός: Αν $(S^*)^p n = n$ για κάποιο $n\in\mathbb{Z}$ για κάποιο $p\geq 1$ τότε πρέπει $n_2 = n_3 = \dots = n_d = 0$.

Δοθέντος του ισχυρισμού για n τ.ω. $(S^*)^p n = n$ για κάποιο $p\geq 1$ έχουμε:

$$\hat{f}(S^* n) = e^{2\pi i a n_1}\hat{f}(n) \qquad \hat{f}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\right] = e^{2\pi i a n_1}\hat{f}\begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{f}(n) = e^{2\pi i a n_1}\hat{f}(n)$. επειδή $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ έχουμε ότι $e^{2\pi i a n_1}\neq 1$ αν $n_1\neq 0$ και άρα πρέπει $\hat{f}(n)=0$. Άρα δείξαμε ότι $\hat{f}(n)=0$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$ πλην του ισχυρισμού. Αυτό δείχνει ότι $f \overset{L^2}{=}$ σταθερή.

Έπεται ότι το σύστημα είναι εργοδικό $(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}(\mathbb{T}^d), \lambda_{\mathbb{T}^d}, S)$

Απόδειξη Ισχυρισμού: Έστω $n\in\mathbb{Z}^k$ για το οποίο $\exists p\in\mathbb{N}$ τ.ω. $(\tilde{S}_k^*)^p n = n$

μάθημα 23
7/1/19

Λήμμα $(\tilde{S}_k)^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ p & 1 & & & \\ \binom{p}{2} & p & 1 & & \\ \binom{p}{3} & \binom{p}{2} & p & 1 & \\ & & & & \ddots\end{pmatrix}$

απόδειξη: Με επαγωγή στο $p\in\mathbb{N}$

Εναλλακτικά, έστω $M = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ τότε $\tilde{S}_k = M + I_k$

$$(\tilde{S}_k)^p = (M+I_k)^p = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}M^p$$

Εχουμε $M_{ij} = \delta_{i-1,j}$ οπου $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$

$$M_{ij}^2 = \sum_{l=1}^{k} M_{il} M_{lj} = \sum_{l=1}^{k} \delta_{i-1,l}\delta_{l-1,j} = \delta_{i-2,j}$$

Επαγωγικα $M_{ij}^P = \delta_{i-p,j}$ $i,j \in \{1,\dots,k\}$

<u>αποδειξη</u> $M_{ij}^{p+1} = \sum_{l=1}^{k} M_{il}^p M_{lj} = \sum_{l=1}^{k} \delta_{i-p,l}\,\delta_{l-1,j} = \delta_{i-p-1,j} = \delta_{i-(p+1),j}$

Τοτε $(\tilde{S}_k)_{ij}^p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} M_{ij}^m = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} \delta_{i-m,j} = \binom{p}{i-j}$ οταν $0 \le i-j \le p$

$i,j \in \{1,\dots,k\}$ Τοτε $(\tilde{S}_k^*)^p = \begin{pmatrix} 1 & p & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & p \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ Τοτε $(\tilde{S}_k^*)^p n = n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & p & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & p \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix}$. Παιρνω $n_k = n_k$

$n_{k-1} + p n_k = n_{k-1} \Rightarrow n_k = 0 \quad \overset{\cdot\cdot}{\Rightarrow} n_{k-1} = 0$

$n_{k-2} + p \cdot n_{k-1} + a_{k-3,k} \cdot \cancel{n_k}^{0} = n_{k-2}$

$\vdots$

$n_1 + p n_2 + \cdot \cancel{n_3}^{0} + \cdot \cancel{n_4}^{0} + \dots + \cdot \cancel{n_k}^{0} = n_1 \Rightarrow n_2 \overset{\cdot\cdot}{=} 0$

<u>Θεωρημα (Weyl)</u> Αν $P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0$ πολυωνυμο με εναν τουλαχιστον συντελεστη εκτος του σταθερου ορου αρρητο Τοτε η ακολουθια $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι ισοκατανεμημενη (mod 1) στον $\mathbb{T}$.

<u>Για $d=1$</u> με $a_0 = 0$ το εχουμε ηδη δειξει $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $a_n - \ln a$ ειναι ισοκατανεμημενη mod 1 $\Delta\eta\lambda$ $\forall f \in C(\mathbb{T})$ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(ak) \to \int f\, d\lambda_{\mathbb{T}}$

Αυτο ισχυει επειδη το συστημα $(\mathbb{T}, T_a)$ με $T_a(t) = t + a \pmod 1$ ειναι μοναδικα εργοδικο

<u>Για $d=2$</u> Θεωρουμε το συστημα $S(t,s) = (t+a, t+s)$

$(t,s) \mapsto (t+a, t+s) \mapsto (t+2a, s+2t+a) \mapsto (t+3a, s+3t+3a)$

$\mapsto (t+4a, s+4t+6a) \mapsto \dots$

$$S^n(t,s) = (t+na,\ s+nt + \sum_{k=1}^{n-1} ka) = (t+na,\ s+nt + \frac{n(n-1)}{2}a) =$$

$= (t+na,\ s+n(t-\frac{a}{2}) + \frac{a}{2}n^2)$ Επειδη το $(\mathbb{T}^2, S)$ ειναι μοναδικα εργοδικο παιρνουμε ισοκατανομη τροχιων για πολυωνυμα $2^{ου}$ βαθμου.

αποδειξη Θεωρηματος Weyl

Υποθετουμε οτι ο μεγιστοβαθμιος συντελεστης a_d ειναι αρρητος.

Θεωρουμε το συστημα $(\mathbb{T}^d, S_d)$ οπου $S_d(t_1, \dots, t_d) = (t_1 + a, t_1 + t_2, \dots, t_{d-1} + t_d)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(d+1)\times(d+1)} \begin{pmatrix} a \\ t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ S_d(t_1, \dots, t_d) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ S_d^n(t_1, \dots, t_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ t_1 + na \\ \frac{n}{2}a + nt_1 + t_2 \\ \vdots \\ \binom{n}{d}a + \binom{n}{d-1}t_1 + \dots + nt_{d-1} + t_d \end{pmatrix}$$

Οριζουμε $p_d(z) = p(z)$ $\forall i \in \{0, \dots, d-1\}$, $p_i(z) = p_{i+1}(z+1) - p_{i+1}(z)$

Τοτε $p_{i+1}(z+1) = p_i(z) + p_{i+1}(z)$, $p_{i+1}(n+1) = p_i(n) + p_{i+1}(n)$

$S_d(p_1(n) + \mathbb{Z}, p_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z}) =$

$= (p_1(n) + a + \mathbb{Z}, p_2(n) + p_1(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_{d-1}(n) + p_d(n) + \mathbb{Z}) =$

$= (p_1(n+1) + \mathbb{Z}, p_2(n+1) + \mathbb{Z}, \dots, p_{d-1}(n+1) + \mathbb{Z}, p_d(n+1) + \mathbb{Z})$

Αρα $S_d^n(p_1(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z}) = (p_1(n) + \mathbb{Z}, p_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z})$

<u>Ισχυρισμος</u> Το p_i ειναι πολυωνυμο βαθμου i με πρωτο συντελεστη το $\frac{a}{i!}$ οπου $a = a_d\, d!$

<u>αποδειξη</u> Για $i = d$ ισχυει. Εστω οτι ισχυει για καποιο $i \in \{1, \dots, d\}$

$p_{i-1}(z) = p_i(z+1) - p_i(z) = \left(\frac{a}{i!}(z+1)^i - \frac{a}{i!}z^i\right) + \left(c(z+1)^{i-1} - cz^{i-1}\right)$

$+$ οροι βαθμου $< i-1$ $+$ οροι βαθμου $< i-1$ $=$

$= \left(\frac{a}{i!}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}z^j - \frac{a}{i!}z^i\right) + \left(c\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}z^j - cz^{i-1}\right)$ + οροι

βαθμου $< i-1$ $= \frac{a}{i!}\binom{i}{i-1}z^{i-1}$ + οροι βαθμου $< i-1$ $= \frac{a}{(i-1)!}z^{i-1}$

Ειδικοτερα $p_0(z) = a$ $\forall z$ και επομενως ισχυει ο υπολογισμος

$S_d^n(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z}) =$

$= (p_1(n) + \mathbb{Z}, p_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z})$. Το συστημα $(\mathbb{T}^d, S_d)$ ειναι μοναδικα εργοδικο επειδη $a = d!\, a_d \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Επεται οτι $\forall f \in C(\mathbb{T}^d)$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S_d^k(p_1(0), \dots, p_d(0)) \to \int f\, d\lambda_{\mathbb{T}}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(p_1(k),\dots,p_d(k)) \to \int f\, d\lambda_{\mathbb{T}^d}$. Για $f\in C(\mathbb{T})$ ορίζουμε

$\tilde{f}: \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ $\tilde{f}(t_1,\dots,t_d) = f(t_d)$ τότε $\tilde{f}\in C(\mathbb{T}^d)$ και

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}(p_1(k),\dots,p_d(k)) \to \int \tilde{f}\, d\lambda_{\mathbb{T}^d}$

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(p_d(k)) \to \int\dots\int f(t_d)\, d\lambda_{\mathbb{T}}(t_1)\dots d\lambda_{\mathbb{T}}(t_d) = \int f\, d\lambda_{\mathbb{T}}$

Έπεται ότι η ακολουθία $(p_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοκατανεμημένη (mod 1)
Στην γενική περίπτωση μπορεί ο a_d να είναι ρητός και κάποιος άλλος συντελεστής να είναι άρρητος. Η απόδειξη στην γενική περίπτωση είναι με επαγωγή στο d. Για $d=1$ ο άρρητος συντελεστής είναι αναγκαστικά ο μεγιστοβάθμιος άρα το θεώρημα ισχύει. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για όλα τα πολυώνυμα βαθμού $<d$ με ένα τουλάχιστον συντελεστή εκτός του σταθερού άρρητο. Έστω $p_1(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ πολυώνυμο βαθμού d με ένα συντελεστή τουλάχιστον εκτός του σταθερού άρρητο. Αν $a_d\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ το θεώρημα έχει δειχτεί. Υποθέτουμε ότι $a_d\in\mathbb{Q}$ και έστω $m\in\mathbb{Z}$ τ.ω. $a_d m\in\mathbb{Z}$
Έστω $v\in\{0,1,\dots,m-1\}$ $p(km+v) = \sum_{j=0}^{d} a_j \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(km)^i v^{j-i} =$

$$= \sum_{i=0}^{d} \underbrace{\sum_{j=i}^{d} a_j\binom{j}{i} v^{j-i} m^i k^i}_{a_d m^d k^d + p_v(k)}$$ όπου $p_v(k)$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ $d-1$

Το p_v έχει τουλάχιστον συντελεστή εκτός του σταθερού όρου άρρητο. Έστω a_j ο συντελεστής του αρχικού πολυωνύμου που είναι άρρητος και με το μεγαλύτερο j. Ο συντελεστής του x^j στο p_v $\sum_{l=j}^{d} a_l\binom{l}{j} v^{l-j} m^l$ είναι άρρητος. Άρα τα $(p_v(k))_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ισοκατανεμημένες για κάθε $v\in\{0,\dots,m-1\}$. Έχουμε:
$p_v(k) - p(km+v) = a_d m^d k^d \in\mathbb{Z}$ Άρα το $(p(km+v))_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ισοκατανεμημένο mod 1 για κάθε $l\in\{0,\dots,m-1\}$
Έστω $f\in C(\mathbb{T})$ $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(p(n)) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{[\frac{N}{m}]-1}\sum_{v=0}^{m-1} f(p(km+v)) +$

$+\frac{1}{N}\sum_{n=[\frac{N}{m}]m}^{N-1} f(p(n))$ ↪ δεν υπάρχει όταν $m|N$ $= \sum_{v=0}^{m-1}\frac{[\frac{N}{m}]}{N}\cdot\frac{1}{[\frac{N}{m}]}\sum_{k=0}^{[\frac{N}{m}]-1} f(p(km+v)) +$

$$+\frac{1}{N}\sum_{n=[\frac{N}{m}]m}^{N-1} f(p(n)) \to \sum_{v=0}^{m-1}\frac{1}{m}\int f\,d\lambda + 0$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=[\frac{N}{m}]m}^{N-1} f(p(n))\right| \le \|f\|_{sup}\,\frac{N-[\frac{N}{m}]m}{N} = \|f\|_{sup}\left(1-\frac{[\frac{N}{m}]}{\frac{N}{m}}\right) \to 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ - 4° ΕΝΤΡΟΠΙΑ

μαθημα 24
9/1/19

(X, A, μ, T) σ.δ.μ. Μια μετρήσιμη διαμέριση ξ του χώρου είναι μια αριθμήσιμη διαμέριση του X με $\xi \subseteq A$. Τα στοιχεία της διαμέρισης λέγονται άτομα.

Μια διαμέριση η είναι εκλέπτυνση μιας άλλης διαμέρισης ξ αν κάθε στοιχείο της ξ είναι ένωση στοιχείων της η. Ισοδύναμα αν $A \in \xi$ και $B \in \eta$ τότε $B \subseteq A$ ή $A \cap B = \varnothing$. Συμβολισμός: $\xi \le \eta$

Αν ξ και η δύο διαμερίσεις τότε η κοινή τους εκλέπτυνση είναι $\eta \vee \xi = \{A \cap B \,/\, A \in \xi, B \in \eta\}$

Αν ξ είναι διαμέριση του X τότε $\sigma(\xi)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την ξ. Όταν η ξ είναι πεπερασμένη η $\sigma(\xi)$ αποτελείται από όλες τις ενώσεις στοιχείων της ξ και τα στοιχεία της ξ είναι άτομα της σ-άλγεβρας.

Συμβολισμοί: Για σ-άλγεβρες B_1, B_2 υποσύνολα του X $B_1 \vee B_2 = \sigma(B_1 \cup B_2)$ η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $B_1 \cup B_2$. Τότε $\sigma(\xi \vee \eta) = \sigma(\xi) \vee \sigma(\eta)$

Παρατήρηση 1 Αν $\xi \le \eta$ τότε $\xi \vee \eta = \eta$

Παρατήρηση 2 Αν ξ είναι μετρήσιμη διαμέριση τότε: $T^{-1}\xi = \{T^{-1}(A) \,/\, A \in \xi\}$ είναι επίσης μετρήσιμη διαμέριση.

Πρόταση Έστω $\xi, \zeta, \eta, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ διαμερίσεις του X.

(1) $\xi \vee \eta = \eta \vee \xi$

(2) $(\xi \vee \eta) \vee \zeta = \xi \vee (\eta \vee \zeta)$

(3) $T^{-1}\xi \vee T^{-1}\eta = T^{-1}(\xi \vee \eta)$

(4) $\xi \le \eta \Rightarrow T^{-1}\xi \le T^{-1}\eta$

(5) Αν $\xi_1 \le \xi_2$ και $\eta_1 \le \eta_2 \Rightarrow \xi_1 \vee \eta_1 \le \xi_2 \vee \eta_2$

απόδειξη (1) $\xi \vee \eta = \{A \cap B \,/\, A \in \xi, B \in \eta\} = \eta \vee \xi$

(2) $(\xi \vee \eta) \vee \zeta = \{C \cap D \,/\, C \in \xi \vee \eta, D \in \zeta\} = \{A \cap B \cap D \,/\, A \in \xi, B \in \eta, D \in \zeta\}$
$= \xi \vee (\eta \vee \zeta)$

(3) $T^{-1}\xi \vee T^{-1}\eta = \{A \cap B \,/\, A \in T^{-1}\xi, B \in T^{-1}\eta\} = \{T^{-1}A' \cap T^{-1}B' \,/\, A' \in \xi, B' \in \eta\}$
$= \{T^{-1}(A' \cap B') \,/\, A' \in \xi, B' \in \eta\} = \{T^{-1}(C) \,/\, C \in \xi \vee \eta\} = T^{-1}(\xi \vee \eta)$

(4) Έστω $T^{-1}A \in T^{-1}\xi$ και $T^{-1}B \in T^{-1}\eta$ Τότε $T^{-1}A \cap T^{-1}B = T^{-1}(A \cap B)$.
Επειδή $\xi \le \eta$ έχουμε ότι είτε $A \cap B = \emptyset$ οπότε $T^{-1}A \cap T^{-1}B = \emptyset$, είτε
$B \subseteq A$ οπότε $T^{-1}(B) \subseteq T^{-1}(A)$. Δείξαμε ότι για κάθε δύο στοιχεία
$T^{-1}A \in T^{-1}\xi$ και $T^{-1}B \in T^{-1}\eta$ είτε $T^{-1}B \subseteq T^{-1}A$ είτε $T^{-1}A \cap T^{-1}B = \emptyset$
οπότε $T^{-1}\xi \le T^{-1}\eta$.

(5) Έστω $A_i \cap B_i \in \xi_i \vee \eta_i$, $i \in \{1,2\}$. Τότε $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ οπότε
$(A_1 \cap B_1) \cap (A_2 \cap B_2) = \emptyset$ ή $B_2 \subseteq B_1$. Για τα A_i έχουμε ότι
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ οπότε $(A_1 \cap B_1) \cap (A_2 \cap B_2) = \emptyset$ ή $A_2 \subseteq A_1$. Τότε
$A_2 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap B_1$. Δείξαμε ότι $\xi_1 \vee \eta_1 \le \xi_2 \vee \eta_2$.

Εντροπία διαμέρισης

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας.
Ορίζουμε $\Sigma_n = \{(p_1, \dots, p_n) \,/\, p_1 \ge 0 \dots p_n \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$ για $n \in \mathbb{N}$ και
$\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$. Ορίζουμε $H : \Sigma \to [0, +\infty)$ με τύπο:
$H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε επίσης

$H(p_1, p_2, \dots) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \ln p_i \in [0, +\infty]$ για $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $p_n \ge 0$
$\forall n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

Ορισμός Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και ξ μια αριθμήσιμη μετρήσιμη διαμέριση του X. Η <u>εντροπία</u> της ξ ως προς το μέτρο μ
$$H_\mu(\xi) = H(\mu(A_1), \mu(A_2), \dots) = -\sum_{A \in \xi} \mu(A) \ln \mu(A)$$

Αν ξ και η είναι δύο τέτοιες διαμερίσεις:
$$H_\mu(\xi \mid \eta) = \sum_{B \in \eta} \mu(B)\, H_\mu(\mu(A_1 \mid B), \mu(A_2 \mid B), \dots)$$

όπου $\mu(A|B) = \dfrac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}$ όταν $\mu(B) \neq 0$.

$$H_\mu(\xi|\eta) = -\sum_{B\in\eta} \mu(B) \sum_{A\in\xi} \mu(A|B) \ln \mu(A|B) = -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(A\cap B) \ln \mu(A|B)$$

$$= \sum_{B\in\eta} \mu(B)\, H_{\mu(B)^{-1}\mu|_B}(\xi)$$, όπου $\mu(B)^{-1} \mu|_B(A) = \dfrac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}$

$H_\mu(\xi|\eta)$ δεσμευμένη εντροπία της ξ δεδομένης της η ως προς το μέτρο μ.

Πρόταση

(1) $H(p_1,\dots,p_n) \geq 0$ $\forall (p_1,\dots,p_n) \in \Sigma_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

(2) $H|_{\Sigma_n}$ είναι συνεχής, συμμετρική (δηλ. αναλλοίωτη ως προς μεταθέσεις των συντεταγμένων της) και έχει μοναδικό μέγιστο για $(p_1,\dots,p_n) = (\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$

(3) $H(p_1,\dots,p_n,0) = H(p_1,\dots,p_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall (p_1,\dots,p_n)\in\Sigma_n$

(4) Για οποιοδήποτε χώρο πιθανότητας $(X,\mathcal{A},\mu)$ και πεπερασμένες μετρήσιμες διαμερίσεις του X έχουμε ότι $H_\mu(\xi\vee\eta) = H_\mu(\xi|\eta) + H_\mu(\eta)$

Θεώρημα KHINCHINE

Αν μια συνάρτηση $H: \Sigma \to [0,+\infty)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(4) της προηγούμενης πρότασης τότε $\exists c>0$ τ.ω.

$$H(p_1,\dots,p_n) = -c\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

Λήμμα 1 Η συνάρτηση $\varphi(x) = x\ln x$, $\varphi: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια κυρτή. Δηλαδή $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$, $\lambda\in[0,1]$, $x,y\in[0,+\infty)$ με ισότητα ανν $\lambda\in\{0,1\}$ ή $x=y$.

απόδειξη $\varphi'(x) = \ln x + 1$, $\varphi''(x) = \frac{1}{x}$, $x>0$. Άρα η φ' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Έστω $\lambda\in(0,1)$ και $x\neq y$ και έστω $y>x$. Τότε $x < \lambda x + (1-\lambda)y < y$.

$\varphi(y) - \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) = \varphi'(t)\lambda(y-x)$ για κάποιο $\lambda x + (1-\lambda)y < t < y$

και $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) - \varphi(x) = \varphi'(s)(y-x)(1-\lambda)$ με $x < s < \lambda x + (1-\lambda)y$

Τότε $(1-\lambda)(\varphi(y) - \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y)) = \varphi'(t)(y-x)\lambda(1-\lambda) >$

$> \varphi'(s)(y-x)\lambda(1-\lambda) = \lambda(\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) - \varphi(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) > \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y)$

Πόρισμα Η $H|_{\Sigma n}$ παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο για $(p_1, \dots, p_n) = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$

Λήμμα 2 Για $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $x_1, \dots, x_n \geq 0$ έχουμε ότι

$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i)$ με ισότητα ανν όλα τα x_i που

αντιστοιχούν σε μη μηδενικά λ_i είναι ίσα.

Απόδειξη Με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$. Για $n=2$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $x_1, \dots, x_{n+1} \geq 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Έστω i_* τ.ω. $x_{i_*} = \max\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) = \varphi(\lambda_{i_*} x_{i_*} + \sum_{i \in \{1,\dots,n+1\}\setminus\{i_*\}} \lambda_i x_i) \overset{(1)}{\leq}$$

$$\leq \lambda_{i_*}\varphi(x_{i_*}) + (1-\lambda_{i_*})\varphi(\sum_{i \in \{1,\dots,n+1\}\setminus\{i_*\}} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i_*}} x_i) \overset{(2)}{\leq} \lambda_{i_*}\varphi(x_{i_*}) +$$

$$+ (1-\lambda_{i_*}) \sum_{i \in \{1,\dots,n+1\}\setminus\{i_*\}} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i_*}} \varphi(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi(x_i) \quad , \text{όταν } \lambda_{i_*} \neq 1.$$

Όταν $\lambda_{i_*} = 1$ έχουμε ισότητα. Έστω $\lambda_{i_*} \neq 1$. Για να έχουμε ισότητα πρέπει να έχουμε ισότητα στην ανισότητα (2) και στην ανισότητα (1). Στην (2) έχουμε ισότητα όταν τα x_i με $i \in \{1,\dots,n+1\}\setminus\{i_*\}$ που αντιστοιχούν σε μη μηδενικά λ_i είναι όλα ίσα. Στην ανισότητα (1) έχω ισότητα ανν είτε $\lambda_{i_*} = 0$ οπότε τα x_i για $i \in \{1,\dots,n+1\}$ που αντιστοιχούν μη μηδενικά λ_i είναι όλα ίσα είτε $x_{i_*} = \sum_{i \in \{1,\dots,n+1\}\setminus\{i_*\}} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i_*}} x_i$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda_{i_*})x_{i_*} = \sum_{i \in \{1,\dots,n+1\}\setminus\{i_*\}} \lambda_i x_i \Leftrightarrow x_{i_*} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (x_{i_*} - x_i) = 0$$

Πρέπει $\lambda_i(x_{i_*} - x_i) = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,n+1\}$

Απόδειξη Πορίσματος

Έστω $(p_1, \dots, p_n) \in \Sigma_n$ $-\frac{1}{n}\ln n = \varphi(\frac{1}{n}) = \varphi(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i) \leq$

$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i) = -\frac{1}{n} H(p_1,..,p_n)$. Αρα $H(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}) \geq H(p_1,..,p_n)$

Ισότητα έχουμε αν όλα τα p_i είναι ίσα και άρα $p_i = \frac{1}{n}$ $\forall i \in \{1,..,n\}$

$(X,\mathcal{A},\mu)$ χ.π. Παρατήρηση εμφανίζεται ένα στοιχείο μια) διαμέρισης ξ. $H\mu(\xi) = -\sum_{A\in\xi} \mu(A) \ln \mu(A)$.

μάθημα 25ο
14/1/19

Θεωρούμε διαμερίσεις ξ αριθμήσιμες μετρήσιμες.
Δεσμευμένη εντροπία $H\mu(\xi|\eta) = -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(A\cap B) \ln \mu(A|B)$

Πρόταση Εστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χ.π., ξ, ζ, η αριθμήσιμες μετρήσιμες με πεπερασμένες εντροπίες. Ισχύουν τα εξής
1) $H\mu(\xi\vee\eta) = H\mu(\xi|\eta) + H\mu(\eta)$
(2) $H\mu(\xi|\eta) \leq H\mu(\xi)$
(3) $H\mu(\xi\vee\eta) \leq H\mu(\xi) + H\mu(\eta)$
(4) $H\mu(\xi\vee\eta|\zeta) = H\mu(\xi|\eta\vee\zeta) + H\mu(\eta|\zeta)$
(5) $H\mu(\xi|\eta\vee\zeta) \leq H\mu(\xi|\zeta)$
(6) $H\mu(\xi\vee\eta|\zeta) \leq H\mu(\xi|\zeta) + H\mu(\eta|\zeta)$

απόδειξη (1) $H\mu(\xi\vee\eta) = \sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(A\cap B) \ln \mu(A\cap B) =$

$= -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(A\cap B) \ln \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)} - \sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(A\cap B) \ln\mu(B) =$

$= H\mu(\xi|\eta) - \sum_{B\in\eta} \underbrace{\sum_{A\in\xi} \mu(A\cap B)}_{\mu(B) \text{ επειδή } \xi \text{ διαμέριση}} \ln\mu(B) = H\mu(\xi|\eta) - \sum_{B\in\eta} \mu(B) \ln\mu(B) =$

$= H\mu(\xi|\eta) + H\mu(\eta)$

(2) $H\mu(\xi|\eta) = -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(A\cap B) \ln\mu(A|B) = -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(B)\mu(A|B) \ln\mu(A|B)$

$= -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(B)\, \varphi(\mu(A|B)) \overset{\varphi \text{ κυρτή}}{\leq} -\sum_{A\in\xi} \varphi\left(\sum_{B\in\eta} \mu(B)\mu(A|B)\right) =$

$= -\sum_{A\in\xi} \varphi\left(\sum_{B\in\eta} \mu(A\cap B)\right) = -\sum_{A\in\xi} \varphi(\mu(A)) = H\mu(\xi)$

όπου $\varphi(x) = x\ln x$

(3) άμεσο από (1) και (2)

(4) $H_\mu(\xi \vee \eta | \zeta) \overset{(1)}{=} H_\mu(\xi \vee \eta \vee \zeta) - H_\mu(\zeta) = H_\mu(\xi \vee \eta \vee \zeta) - H_\mu(\eta \vee \zeta) + H_\mu(\eta \vee \zeta)$
$- H_\mu(\zeta) \overset{(1)}{=} H_\mu(\xi | \eta \vee \zeta) + H_\mu(\eta | \zeta)$

(5) Για ένα μετρήσιμο C με $\mu(C) > 0$ γράφουμε:

$$\mu(C)^{-1} \mu|_C(E) = \frac{\mu(C \cap E)}{\mu(C)} = \mu(C|E)$$

$$H_\mu(\xi|\zeta) = \sum_{C \in \zeta} \mu(C) H_{\mu(C)^{-1}\mu|_C}(\xi)$$

$$H_\mu(\xi | \eta \vee \zeta) \overset{(4)}{=} H_\mu(\xi \vee \eta | \zeta) - H_\mu(\eta|\zeta) = \sum_{C \in \zeta} \mu(C) \left(H_{\mu(C)^{-1}\mu|_C}(\xi \vee \eta) - H_{\mu(C)^{-1}\mu|_C}(H) \right)$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{C \in \zeta} \mu(C) H_{\mu(C)^{-1}\mu|_C}(\xi|\eta) \overset{(2)}{\leq} \sum_{C \in \zeta} \mu(C) H_{\mu(C)^{-1}\mu|_C}(\xi) = H_\mu(\xi|\zeta)$$

(6) άμεσο από (4) και (5)

Ιδιότητες μονοτονίας $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας ξ, ζ, η αριθμήσιμες μετρήσιμες διαμερίσεις του X με πεπερασμένη εντροπία.

(1) $\xi \leq \eta \Rightarrow H_\mu(\xi) \leq H_\mu(\eta)$

(2) $\xi \leq \eta \Rightarrow H_\mu(\xi|\zeta) \leq H_\mu(\eta|\zeta)$

(3) $\xi \leq \eta \Rightarrow H_\mu(\zeta|\xi) \geq H_\mu(\zeta|\eta)$

(4) Αν $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ τότε $H_\mu(\xi) = H_\mu(T^{-1}(\xi))$, $H_\mu(T^{-1}\xi | T^{-1}\eta) = H_\mu(\xi|\eta)$

απόδειξη (1) $\xi \leq \eta \Rightarrow \xi \vee \eta = \eta \Rightarrow H_\mu(\eta) = H_\mu(\xi \vee \eta) = H_\mu(\eta|\xi) + H_\mu(\xi)$
$\geq H_\mu(\xi)$

(2) $\xi \leq \eta \Rightarrow H_\mu(\eta|\zeta) = H_\mu(\eta \vee \xi|\zeta) = H_\mu(\eta|\xi \vee \zeta) + H_\mu(\xi|\zeta) \geq H_\mu(\xi|\zeta)$

(3) $H_\mu(\zeta|\eta) \underset{\eta \geq \xi \Rightarrow \xi \vee \eta = \eta}{=} H_\mu(\zeta|\eta \vee \xi) \leq H_\mu(\zeta|\xi)$

(4) $$H_\mu(T^{-1}\xi | T^{-1}\eta) = -\sum_{A' \in T^{-1}\xi} \sum_{B' \in T^{-1}\eta} \mu(A' \cap B') \ln \frac{\mu(A' \cap B')}{\mu(B')} =$$

$$= -\sum_{A \in \xi} \sum_{B \in \eta} \mu(T^{-1}A \cap T^{-1}B) \ln \frac{\mu(T^{-1}A \cap T^{-1}B)}{\mu(T^{-1}B)} =$$

$$= -\sum_{A \in \xi} \sum_{B \in \eta} \mu(T^{-1}(A \cap B)) \ln \frac{\mu(T^{-1}(A \cap B))}{\mu(B)} =$$

$$= -\sum_{A \in \xi} \sum_{B \in \eta} \mu(A \cap B) \ln \mu(A|B) = H_\mu(\xi|\eta)$$

Παρατήρηση Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Αν $\eta = \{X\}$ τότε για οποιαδήποτε άλλη μετρήσιμη και αριθμήσιμη διαμέριση ξ

$$H_\mu(\xi|\eta) = -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta} \mu(A\cap B)\ln \mu(A|B) = -\sum_{A\in\xi} \mu(A)\ln\mu(A) = H_\mu(\xi)$$

Πρόταση Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και ξ, η αριθμήσιμες μετρήσιμες διαμερίσεις με πεπερασμένη εντροπία. Τότε:

(1) $H_\mu(\xi|\eta) = 0$ ανν $\xi \le \eta \,(\mathrm{mod}\,\mu)$ $\left(H_\mu(\xi|\eta) = 0 \Leftrightarrow H_\mu(\xi\vee\eta) = H_\mu(\eta)\right)$

(2) $H_\mu(\xi|\eta) = H_\mu(\xi)$ ανν $\mu(A\cap B) = \mu(A)\mu(B)$ $\forall A\in\xi, \forall B\in\eta$ $\left(H_\mu(\xi\vee\eta) = H_\mu(\xi) + H_\mu(\eta)\right)$

απόδειξη (1) Έστω ότι $\xi\le\eta\,(\mathrm{mod}\,\mu)$. Δηλ. $\forall A\in\xi, \forall B\in\eta$ έχουμε

$\mu(A\cap B) = 0$ ή $\mu(B\setminus A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A\cap B) = 0$ ή $\underbrace{\mu(B\cap A) = \mu(B)}_{\Leftrightarrow\ \mu(A|B) = 1}$

Τότε $H_\mu(\xi|\eta) = -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta}\mu(A\cap B)\ln\mu(A|B) = 0$. Αντίστροφα έστω

$$H_\mu(\xi|\eta) = 0 \Leftrightarrow -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta}\mu(A\cap B)\ln\mu(A|B) = 0$$

Επειδή $\mu(A\cap B)\ln\mu(A|B) \le 0$ $\forall A\in\xi, \forall B\in\eta$ πρέπει
$\mu(A\cap B)\ln\mu(A|B) = 0$ $\forall A\in\xi, \forall B\in\eta$. Άρα πρέπει:
$\mu(A\cap B) = 0$ ή $\mu(A|B) = 1$ $\forall A\in\xi$ $\forall B\in\eta$. Άρα πρέπει:
$\mu(A\cap B) = 0$ ή $\mu(B\setminus A) = 0$ $\forall A\in\xi$ $\forall B\in\eta$. Άρα πρέπει $\xi\le\eta\,(\mathrm{mod}\,\mu)$

(2) Έστω ότι $\mu(A\cap B) = \mu(A)\mu(B)$ $\forall A\in\xi$ $\forall B\in\eta$. Τότε:
ή $\mu(B) = 0$ ή $\mu(A|B) = \mu(A)$.

Άρα $H_\mu(\xi|\eta) = -\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta}\mu(A\cap B)\ln\mu(A|B) =$

$$= -\sum_{A\in\xi}\underbrace{\sum_{B\in\eta}\mu(A\cap B)}_{\mu(A)\text{ επειδή } \eta \text{ διαμέριση}}\ln\mu(A) = -\sum_{A\in\xi}\mu(A)\ln\mu(A) = H_\mu(\xi)$$

Έστω ότι $H_\mu(\xi|\eta) = H_\mu(\xi)$. Δηλαδή:

$$-\sum_{A\in\xi}\sum_{B\in\eta}\mu(B)\underbrace{\mu(A|B)\ln\mu(A|B)}_{\varphi(\mu(A|B))} = -\sum_{A\in\xi}\underbrace{\mu(A)\ln\mu(A)}_{\varphi(\mu(A))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{A\in\xi}\left[\sum_{B\in\eta}\mu(B)\varphi(\mu(A|B)) - \varphi(\mu(A))\right] = 0$$

Επειδή η φ είναι κυρτή $\sum_{B\in\eta}\mu(B)\varphi(\mu(A|B)) \geq \varphi\left(\sum_{B\in\eta}\mu(B)\mu(A|B)\right) =$

$= \varphi(\mu(A)) \quad \forall A \in \xi$

Πρεπει $\sum_{B \in \eta} \mu(B) \varphi(\mu(A|B)) = \varphi(\mu(A)) \quad \forall A \in \xi$ Ανισοτητα Jensen ισχυει

με ισοτητα αρα πρεπει $\mu(B) = 0$ ή $\mu(A|B) = 0$ για ολα τα $B \in \xi \quad \forall A \in \xi$

$\mu(A) = \sum_{B \in \eta} \mu(A \cap B) = \sum_{\substack{B \in \eta \\ \mu(B) \neq 0}} \mu(A|B)\mu(B) = c \sum_{\substack{B \in \eta \\ \mu(B) \neq 0}} \mu(B) = c$

Αρα για καθε $A \in \xi$ και $B \in \eta$ ή $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ οταν $\mu(B) \neq 0$ ή $\mu(B) = 0$ οποτε $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ παλι. Αρα οι διαμεριοεις ειναι ανεξαρτητες

Λημμα Fenete Αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθια στο $\mathbb{R}$, τ.ω. $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ τοτε $\frac{a_n}{n} \to \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{k}$

Αποδειξη Εστω $k \in \mathbb{N}$. Γραφουμε $n = k m_n + u_n$ με $m_n = \mathbb{N} \cup \{0\}$ $u_n \in \{0, \dots, k-1\}$, $n \in \mathbb{N}$ Τοτε $a_n = a_{k m_n + u_n} \leq a_{k m_n} + a_{u_n} \leq$ $\leq a_{(m_n - 1)k} + a_k + a_{u_n} \leq \dots \leq m_n a_k + a_{u_n} \leq m_n a_k + u_n a_1$

Αν $a_k \geq 0$ $a_1 \geq 0$ τοτε $\frac{a_n}{n} \leq \frac{m_n a_k + a_{u_n}}{n} \leq \frac{m_n a_k}{m_n k} + \frac{u_n a_1}{m_n k}$

αρα $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}$. Αν $a_k < 0$, $a_1 \geq 0$, τοτε $n < k(m_n + 1)$

$\frac{a_n}{n} \leq \frac{m_n a_k}{n} + \frac{u_n a_1}{n} \leq \frac{m_n a_k}{k(m_n+1)} + \frac{a_1}{m_n}$ αρα παλι $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}$

Αν $a_k < 0$ και $a_1 < 0$ $\frac{a_n}{n} \leq \frac{m_n a_k}{n} \leq \frac{m_n a_k}{k(m_n+1)}$ αρα παλι $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}$

Αρα $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}$ Αυτο $\forall k \in \mathbb{N}$ οποτε $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_n}{n} \leq \inf_k \frac{a_k}{k}$

Προφανως $\inf_k \frac{a_k}{k} \leq \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_n}{n}$ οποτε $\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_k \frac{a_k}{k}$

Προταση Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ και ξ μια αριθμησιμη μετρησιμη διαμεριση με πεπερασμενη εντροπια. Τοτε υπαρχει το οριο:
$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} \xi\right)$

<u>αποδειξη</u> Εχουμε οτι $H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right) \leq H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-2} T^{-k}\xi\right) + H_\mu(T^{-(n-1)}\xi) \leq \ldots$

$\leq n H_\mu(\xi) < +\infty$

Εστω $a_n = H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Θδο $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ $\forall n,m\in\mathbb{N}$

$H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{m+n-1} T^{-k}\xi\right) = H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} T^{-k}\xi \vee \bigvee_{k=m}^{n+m-1} T^{-k}\xi\right) \leq$

$\leq H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} T^{-k}\xi\right) + H_\mu\left(\bigvee_{k=m}^{n+m-1} T^{-k}\xi\right) = H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} T^{-k}\xi\right) + H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-(k+m)}\xi\right) =$

$= a_m + H_\mu\left(T^{-m}\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right) = a_m + H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right) = a_m + a_n$ Απο λήμμα

το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n$ υπαρχει.

<u>Ορισμός</u> Εστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σ.δ.μ και ξ μια αριθμησιμη μετρησιμη διαμεριση με πεπερασμενη εντροπια. Οριζουμε
$h_\mu(T,\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right)$ η εντροπια του συστηματος

ως προς μ για την διαμεριση ξ. Οριζουμε επισης: προταση στη 12

$h_\mu(T) = \sup\{h_\mu(T,\xi) / \xi$ αριθμησιμη μετρησιμη διαμεριση του X με $H_\mu(\xi)<+\infty\}$ $=$

$= \sup\{h_\mu(T,\xi) / \xi$ πεπερασμενη μετρησιμη διαμεριση$\}$
η εντροπια του συστηματος ως προς μ.

μαθημα 26°
16/1/19

$(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σδμ, ξ αριθμησιμη μετρησιμη με $H_\mu(\xi)<+\infty$
$\exists$ Το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) =: h_\mu(T,\xi)$

$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi = \{A_0 \cap T^{-1}A_1 \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}A_{n-1} : A_0,\ldots,A_{n-1}\in\xi\}$

Αυτη ειναι η εντροπια του συστηματος ή $h_\mu(T,\xi)$ ως προς διαμεριση ξ. Εντροπια συστηματος, $h_\mu(T)$ ειναι η θα δειχτει
$h_\mu(T) = \sup\{h_\mu(T,\xi) / \xi$ αριθμησιμη, $\xi\subset\mathcal{A}$, $H_\mu(\xi)<+\infty\}$ $=$
$= \sup\{h_\mu(T,\xi) / \xi\subset\mathcal{A}$ πεπερασμενη διαμεριση

Λήμμα Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, $\xi \subseteq \mathcal{A}$ μια αριθμήσιμη διαμέριση με πεπερασμένη εντροπία. Τότε:

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) = H_\mu(\xi) + \sum_{i=1}^{n-1} H_\mu\left(\xi \middle/ \bigvee_{j=1}^{i} T^{-j}\xi\right)$$

απόδειξη Με επαγωγή. Για $n=1$: $H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\xi\right) = H_\mu\left(\xi \vee \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) =$

$$= H_\mu\left(\xi / \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) + H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) = H_\mu\left(\xi / \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) + H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-(i+1)}\xi\right)$$

$$= H_\mu\left(\xi / \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) + H_\mu\left(T^{-1}\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) =$$

$$= H_\mu\left(\xi / \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) + H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) = H_\mu\left(\xi / \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) + \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu\left(\xi / \bigvee_{j=1}^{i} T^{-j}(\xi)\right)$$

$$+ H_\mu(\xi) = \sum_{i=0}^{n} H_\mu\left(\xi / \bigvee_{j=1}^{i} T^{-j}(\xi)\right) + H_\mu(\xi)$$

Προταση Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ και $\xi \subseteq \mathcal{A}$ αριθμήσιμη διαμέριση με $H_\mu(\xi) < +\infty$. Τοτε: $\frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \downarrow h_\mu(T, \xi)$

απόδειξη $\bigvee_{j=1}^{i} T^{-j}\xi \leq \bigvee_{j=1}^{n} T^{-j}\xi$ για $i \leq n$

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) = H_\mu(\xi) + \sum_{i=1}^{n-1} H_\mu\left(\xi / \bigvee_{j=1}^{i} T^{-j}\xi\right) \geq n H_\mu\left(\xi / \bigvee_{j=1}^{n} T^{-j}\xi\right)$$

τότε $n H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\xi\right) = n H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) + n H_\mu\left(\xi / \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\xi\right) \leq$

$$\leq n H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) + H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) = (n+1) H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right)$$

Άρα $\frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \geq \frac{1}{n+1} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\xi\right)$

και άρα $\frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \downarrow h_\mu(T, \xi)$

Πρόταση Ιδιότητες εντροπίας συστήματος

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. και $\xi, \eta \in \mathcal{A}$ αριθμήσιμες με $H_\mu(\xi) < +\infty$ και $H_\mu(\eta) < +\infty$. Τότε:

(1) $h_\mu(T, \xi) \leq H_\mu(\xi)$

(2) $h_\mu(T, \xi \vee \eta) \leq h_\mu(T, \xi) + h_\mu(T, \eta)$

(3) $h_\mu(T, \xi) \leq h_\mu(T, \eta) + H_\mu(\xi | \eta)$

(4) $h_\mu(T, \xi) = h_\mu(T, T^{-1}\xi)$

(5) $h_\mu(T, \xi) = h_\mu(T, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(6) $h_\mu(T, \xi) = h_\mu(T, \bigvee_{i=-n}^{n} T^{i}\xi) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ όταν σύστημα αντιστρέψιμο

(7) $\xi \leq \eta \Rightarrow h_\mu(T, \xi) \leq h_\mu(T, \eta)$

απόδειξη (1) $\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\xi$

$$H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\Big) \leq H_\mu(\xi) + H_\mu(T^{-1}\xi) + \dots + H_\mu(T^{-(n-1)}\xi) = n \cdot H_\mu(\xi)$$

άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\Big) \leq H_\mu(\xi)$

(2) $H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\xi \vee \eta)\Big) = H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} (T^{-i}\xi \vee T^{-i}\eta)\Big) =$

$= H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big) \leq H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\Big) + H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big)$

άρα $h_\mu(T, \xi \vee \eta) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\xi \vee \eta)\Big) \leq$

$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\Big) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big) = h_\mu(T, \xi) + h_\mu(T, \eta)$

(3) $H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\Big) \leq H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big) =$

$= H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big) + H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi \,\Big|\, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big) \leq$

$\leq H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big) + \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu\Big(T^{-i}\xi \,\Big|\, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big) \leq$

$\leq H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\Big) + \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu(T^{-i}\xi | T^{-i}\eta) =$

$= H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\right) + \sum_{i=0}^{n-1} n H_\mu(\xi|\eta)$

άρα $h_\mu(T,\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\right) + H_\mu(\xi|\eta) =$

$= h_\mu(T,\eta) + H_\mu(\xi|\eta)$

(4) $H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1}\xi)\right) = H_\mu\left(T^{-1}\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) = H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right)$

άρα $\underset{\substack{\| \\ h_\mu(T,T^{-1}\xi)}}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1}(\xi))\right)} = \underset{\substack{\| \\ h_\mu(T,\xi)}}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right)}$

(7) Εστω $\xi \le \eta$ $\quad H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \le H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\right)$

διότι $\xi\le\eta \Rightarrow T^{-i}\xi \le T^{-i}\eta \quad \forall i\in\mathbb{N} \Rightarrow \xi\vee T^{-1}\xi\vee\dots\vee T^{-(n-1)}\xi \le \eta\vee\dots\vee T^{-(n-1)}(\eta)$

άρα $h_\mu(T,\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\eta\right) = h_\mu(T,\eta)$

(5) $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H_\mu\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right)\right) = h_\mu\left(T, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right)$

$(\xi\vee T^{-1}\xi\vee\dots\vee T^{-(n-1)}\xi)\vee(T^{-1}\xi\vee\dots\vee T^{-(n-1)}\xi\vee T^{-n}\xi)\ \vee$
$\vee(T^{-2}\xi\vee\dots\vee T^{-n}\xi\vee T^{-(n+1)}\xi)\vee\dots\vee$
$\vee(T^{-(m-1)}\xi\vee T^{-m}\xi\vee\dots T^{-(m+n-2)}\xi) = \xi\vee T^{-1}\xi\vee\dots\vee T^{-(m+n-2)}\xi$

Για να δείξουμε αυτή την ισότητα, αρκεί να δειχτεί ότι ισχύει το εξής: $(\alpha\vee\beta)\vee(\beta\vee\gamma) = \alpha\vee\beta\vee\gamma$

Πράγματι, $(\alpha\vee\beta)\vee(\beta\vee\gamma) = \{A\cap B\cap B'\cap\Gamma \ /\ A\in\alpha, \Gamma\in\gamma, B,B'\in\beta\} =$
$= \{A\cap B\cap\Gamma \ /\ A\in\alpha, \Gamma\in\gamma, B=B'\in\beta\}$ (διότι τα B, B' είναι στοιχεία της διαμέρισης οπότε $B\cap B'=\emptyset$ ή $B=B'$). Άρα:

$h_\mu\left(T, \bigvee_{i=0}^{n-1}\xi\right) = \lim \frac{1}{m} H_\mu\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right)\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H_\mu\left(\bigvee_{j=0}^{m+n-2} T^{-j}\xi\right) =$

$= \lim_{m\to\infty} \frac{n+m-2}{m} \frac{1}{n+m-2} H_\mu\left(\bigvee_{j=0}^{m+n-2} T^{-j}\xi\right) = h_\mu(T,\xi)$

(6) Εστω ότι $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι αντιστρέψιμο

$h_\mu\left(T, \bigvee_{i=-n}^{n} T^{i}\xi\right) = h_\mu\left(T, \bigvee_{i=0}^{2n} T^{n-i}\xi\right) = h_\mu\left(T, T^{n}\bigvee_{i=0}^{2n} T^{-i}\xi\right) =$

$= h_\mu\left(T, \bigvee_{i=0}^{2n} T^{-i}\xi\right)$ επειδή για $\eta_n = T^{n}\bigvee_{i=0}^{2n} T^{-i}\xi$

$T^{-1}\eta_n = T^{n-1}\bigvee_{i=0}^{2n} T^{-i}\xi, \dots, T^{-n}\eta_n = \bigvee_{i=0}^{2n} T^{-i}\xi$

Από ιδιότητα (4): $H_\mu(T,\eta_n) = H_\mu(T, T^{-1}\eta_n) = H_\mu(T, T^{-2}\eta_n) = \dots =$
$= H_\mu(T, T^{-n}\eta_n) = H_\mu(T, \bigvee_{i=0}^{2n} T^{-i}\xi) \overset{(5)}{=} H_\mu(T,\xi)$.

Θεώρημα Εστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σδμ
(1) $h_\mu(T^k) = k\, h_\mu(T) \quad \forall k\in\mathbb{N}$
(2) $h_\mu(T^k) = |k|\, h_\mu(T) \quad \forall k\in\mathbb{Z}$, όταν το σύστημα είναι αντιστρέψιμο. Ειδικότερα $h_\mu(T) = h_\mu(T^{-1})$

<u>απόδειξη</u> (1) Εστω $\xi \subseteq \mathcal{A}$ αριθμήσιμη με $H_\mu(\xi) < +\infty$.
<u>Ισχυρισμός</u> $h_\mu(T^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\xi) = k\cdot h_\mu(T,\xi) \quad \forall k\in\mathbb{N}$

<u>απόδειξη ισχυρισμού</u>: $H_\mu(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-jk}(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\xi)) =$

$= H_\mu(\bigvee_{j=0}^{n-1}\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-(jk+i)}\xi) =$

$= H_\mu((\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-(k-1)}) \vee (T^{-n}\xi \vee T^{-(n+1)}\xi \vee \dots \vee T^{-2k-1}\xi) \vee \dots \vee$
$\vee (T^{-(n-1)k}\xi \vee \dots \vee T^{-(nk-1)}\xi))$. Επομένως $h_\mu(T^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\xi)) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-kj}(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\xi)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} H_\mu(\bigvee_{j=0}^{nk-1} T^{-j}\xi) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{nk-1}{n}\,\frac{1}{nk-1} H_\mu(\bigvee_{j=0}^{nk-1} T^{-j}\xi) = k\, h_\mu(T,\xi)$

$k\,h_\mu(T) = k\cdot\sup\{h_\mu(T,\xi) \mid \xi\subseteq\mathcal{A}$ αριθμήσιμη με $H_\mu(\xi)<+\infty\}$
$= \sup\{h_\mu(T^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\xi) \mid \xi\subseteq\mathcal{A}$ αριθμήσιμη διαμ. με $H_\mu(\xi)<+\infty$

$\le h_\mu(T^k)$. Για την αντίστροφη ανισότητα, για οποιαδήποτε $\xi\subseteq\mathcal{A}$ αριθμήσιμη διαμέριση με $H_\mu(\xi)<+\infty$
$h_\mu(T^k,\xi) \le h_\mu(T^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\xi) = k\,h_\mu(T,\xi)$

άρα $h_\mu(T^k) = k\,h_\mu(T)$
(2) Εστω ότι $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ είναι αντιστρέψιμο σ.δ.μ.

Αρκεί ν.δ.ο $h\mu(T)=h\mu(T^{-1})$. Έστω $\xi \subseteq \mathcal{A}$ αριθμήσιμη διαμέριση με $H\mu(\xi)<+\infty$. $H\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{i}\xi) = H\mu(T^{n-1}\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) = H\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi)$

Άρα $h\mu(T^{-1},\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{i}\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) = h\mu(T,\xi)$

Άρα $h\mu(T^{-1},\xi) = h\mu(T,\xi)$ $\forall \xi \subseteq \mathcal{A}$ αριθμήσιμη με $H\mu(\xi)<+\infty$
και άρα $h\mu(T^{-1}) = h\mu(T)$

Πρόταση $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σ.δ.μ Τότε $h\mu(T)=\sup\{h\mu(T,\xi) \,/\, \xi\subseteq\mathcal{A}$ πεπερασμένη διαμέριση$\}$
$=\sup\{h\mu(T,\xi)\,/\,\xi\subseteq\mathcal{A}$ αριθμήσιμη διαμέριση με $H\mu(\xi)<+\infty\}$
Ειδικότερα $\forall \xi\subseteq\mathcal{A}$ αριθμήσιμη διαμέριση με $H\mu(\xi)<+\infty$ και $\forall\varepsilon>0$
$\exists \eta\subseteq\mathcal{A}$ πεπερασμένη διαμέριση τ.ω. $H\mu(\xi|\eta)<\varepsilon$

απόδειξη Αν για κάθε αριθμήσιμη $\xi\subseteq\mathcal{A}$ με $H\mu(\xi)<+\infty$ και $\varepsilon>0$
$\exists\eta\subseteq\mathcal{A}$ πεπερασμένη διαμέριση με $H\mu(\xi|\eta)<\varepsilon$, τότε:
$h\mu(T,\xi)\le h\mu(T,\eta)+H\mu(\xi|\eta) < h\mu(T,\eta)+\varepsilon$
Από αυτό έπεται ότι sup προς πεπερασμένες και αριθμήσιμες
με πεπερασμένη εντροπία είναι ίδιο.
Έστω $\xi=\{A_1,A_2,\dots\}\subseteq\mathcal{A}$ αριθμήσιμη διαμέριση του X με $H\mu(\xi)<+\infty$. Έστω $\varepsilon>0$
Ορίζουμε $\eta=\{A_1,A_2,\dots,A_n,B_n\}$ όπου $B_n = X\setminus(A_1\cup\dots\cup A_n)$, $n\in\mathbb{N}$
$=\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$. Το n θα το επιλέξουμε αργότερα

$$H\mu(\xi|\eta) = -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{B\in\eta}\mu(A_i\cap B)\ln\frac{\mu(A_i\cap B)}{\mu(B)} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{B\in\eta}\underbrace{\mu(A_i\cap B)}_{=\emptyset \text{ όταν } B\neq A_i}\ln\frac{\mu(A_i\cap B)}{\mu(B)} - \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{B\in\eta}\underbrace{\mu(A_i\cap B)}_{\substack{=\emptyset \text{ όταν } B\neq B_n\\ =A_i \text{ όταν } B=B_n}}\ln\frac{\mu(A_i\cap B)}{\mu(B)}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap A_i)\cancel{\ln\frac{\mu(A_i\cap A_i)}{\mu(A_i)}}^{0} - \sum_{i=n+1}^{\infty}\mu(\underbrace{A_i\cap B_n}_{=A_i})\ln\frac{\mu(\overbrace{A_i\cap B_n}^{=A_i})}{\mu(B_n)} =$$

$$= -\sum_{n+1}^{\infty}\mu(A_i)\ln\mu(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty}\mu(A_i)\ln\mu(B_n) =$$

$$= -\sum_{i=n+1}^{\infty}\mu(A_i)\ln\mu(A_i) + \mu(B_n)\ln\mu(B_n)$$

Επειδή ξ διαμέριση $1=\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) < +\infty$

Άρα $\mu(B_n) \to 0$ άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\varphi(\mu(B_n)) < \varepsilon/2$ $\forall n > n_1$
Επειδή $H_\mu(\xi) = -\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ln \mu(A_i) < \infty$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$-\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i) \ln \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > n_2$. Τότε για $n > \max\{n_1, n_2\}$

έχουμε ότι η η ικανοποιεί $H_\mu(\xi|\eta) < \varepsilon$

<u>Θεώρημα Kolmogorov Sinai</u>

$\boxed{\text{μάθημα } 27^o \quad 21/1/19}$

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ $\xi \subseteq \mathcal{A}$ αριθμήσιμη
$H_\mu(\xi)$ πληροφορία από ξ, $h_\mu(T,\xi)$ μέση πληροφορία που είναι η ξ καθώς εξελίσσεται. Εντροπία συστήματος:
$\sup_\xi h_\mu(T,\xi) = h_\mu(T)$

<u>Ορισμός</u> Αν $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ σ-άλγεβρες σε ένα χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ τότε $\mathcal{B} = \mathcal{C} (\mathrm{mod}\,\mu)$ αν:
$\forall B \in \mathcal{B}$ $\exists C \in \mathcal{C}$ τ.ω. $\mu(B \triangle C) = 0$, και
$\forall C \in \mathcal{C}$ $\exists B \in \mathcal{B}$ τ.ω. $\mu(B \triangle C) = 0$

<u>Ορισμός</u> $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. Μια πεπερασμένη διαμέριση $\xi \subseteq \mathcal{A}$ του X λέγεται μονόπλευρος γεννήτορας αν $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi = \mathcal{A} (\mathrm{mod}\,\mu)$

όπου $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα

τα $\bigvee_{k=0}^{n} T^{-k}\xi$.
Όταν το σύστημα είναι αντιστρέψιμο, μια πεπερασμένη διαμέριση $\xi \subseteq \mathcal{A}$ λέγεται αμφίπλευρος γεννήτορας αν
$\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{n}\xi = \mathcal{A} (\mathrm{mod}\,\mu)$