$x_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $x_n = 0 \ \forall n < 0$. Εστω $X' = \overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}}$

Θεωρούμε το σύστημα $(X', T|_{X'})$

$X' = \{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(\dots 0, 0, 0, \dots)\} \cup \{(\dots 1, 1, 1, \dots)\}$

προφανώς, το X' δεν είναι ελαχιστικό, ωστε γράφεται σαν ένωση ελαχιστικών.

Προταση Αν (X, T) ελαχιστικό τ.δ.σ. τοτε κάθε $f \in C(X)$ αναλλοίωτη είναι σταθερή.

αποδειξη Εστω $x \in X$ και θεωρούμε το σύνολο $\overline{\{f(T^n(x)) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}}$ για $f \in C(X)$ αναλλοίωτη. Αυτο είναι μονοσύνολο, έστω $\{c\}$. Εστω $y \in X$, τοτε αν $y = T^n(x)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τοτε $f(y) = c$. Αλλιως υπάρχει $n_1 < n_2 < \dots$ τ.ω. $T^{n_k}(x) \to y$. Επειδή η τροχιά $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X$. Από συνέχεια $\underset{\substack{\| \\ c \ \forall k \in \mathbb{N}}}{f(T^{n_k}(x))} \to f(y)$ αρα $f(y) = c$ αρα $f(y) = c \ \forall y \in X$.

Παρατήρηση Το αντίστροφο δεν ισχύει. Το επιχείρημα που ποιμε δουλεύει και οταν έχω μονο μια πυκνή τροχιά.

αντιπαράδειγμα γενικά

$X = \mathbb{T}$, $T(x) = 2x \pmod 1$. Εδώ $\forall f \in C(\mathbb{T})$ και αναλλοίωτη, εχουμε οτι $f \in L^2(\mathbb{T}, \lambda_{\mathbb{T}})$ και αναλλοίωτη. $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \lambda_{\mathbb{T}}, T)$ είναι εργοδικό. Αρα $f =$ σταθερή σ.π. και αφού $f \in C(\mathbb{T})$ πρεπει $f =$ σταθερή παντού. Αρα καθε $f \in C(\mathbb{T})$ αναλλοίωτη είναι σταθερή αλλά το σύστημα δεν είναι ελαχιστικό (οπως είδαμε).

μάθημα 18°
5/12/18

Ορισμός Ενα τ.δ.σ. (X, T) λέγεται τοπολογικά μεταβατικό αν έχει μια πυκνή τροχιά, δηλ. $\exists x \in X$ τ.ω. $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X$

Παρατήρηση Ελαχιστικό $\Rightarrow$ τοπολογικά μεταβατικό

Ορισμός Ενα αντιστρέψιμο τ.δ.σ. (X, T) λέγεται αμφίπλευρα μεταβατικό αν υπαρχει μια πυκνή αμφίπλευρη τροχιά, δηλ $\exists x \in X$ τ.ω. $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} = X$.

Για ένα αντιστρέψιμο σύστημα (μονόπλευρη) μεταβατικότητα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ αμφίπλευρη μεταβατικότητα. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πρόταση Έστω (X,T) αντιστρέψιμο τ.δ.σ. Τα εξής είναι ισοδύναμα

1) Το σύστημα είναι αμφίπλευρα μεταβατικό

2) Αν $E \subseteq X$ κλειστό τ.ω. $T(E)=E$ τότε $E=X$ ή E πουθενά πυκνό ($\delta\eta\lambda$. $E^\circ = \emptyset$)

3) Για κάθε δύο $U, V \subseteq X$ μη κενά και ανοιχτά $\exists n \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$

4) Το σύνολο $\{x \in X / \overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} = X\}$ είναι ένα G_δ πυκνό υποσύνολο του X.

__απόδειξη__ 1) $\Rightarrow$ 2) Έστω $x \in X$ με $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} = X$. Έστω E κλειστό με $T(E)=E$ και έστω ότι $\exists \emptyset \neq U \subseteq X$ ανοιχτό τ.ω. $U \subseteq E$. Τότε $\exists n \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $T^n(x) \in U \subseteq E$. Επειδή $T(E)=E$ (άρα και $T^{-1}(E)=E$) έχουμε ότι $\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\} \subseteq E$ και επειδή E κλειστό $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} \subseteq E$. Άρα $X \subseteq E$ και $X = E$.

2) $\Rightarrow$ 3) Η συνθήκη 2) ισοδυναμεί με: $\forall U \subseteq X$ ανοικτό τ.ω. $T(U)=U$ έχουμε ότι $U = \emptyset$ ή $\bar{U} = X$. (έπεται αν θέσουμε $X \setminus U = E$ κλειστό)

Έστω $U, V \subseteq X$ ανοικτά, μη κενά. Το $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U)$ είναι ανοικτό,

$$T\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U) \text{ και } U \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U) \text{ άρα } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U) \neq \emptyset.$$

Από την 2) το $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U)$ είναι πυκνό. Άρα $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Άρα $\exists n \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Έστω U_n $n \in \mathbb{N}$ μια αριθμήσιμη βάση για τον X. Δηλαδή $\forall U \neq \emptyset$ ανοικτό και $x \in U$ υπάρχει U_n ώστε $x \in U_n \subseteq U$ (Μπορούμε να πάρουμε για U_n, $n \in \mathbb{N}$ τις ανοικτές μπάλες $U(x_n, 1/k)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ όπου $\{x_1, x_2, ..\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X)

$$\{x \in X / \overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} = X\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} T^m(U_n)$$

Πράγματι, αν $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} = X$ και $n \in \mathbb{N}$ τότε $\exists m \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $T^m(x) \in U_n \Leftrightarrow x \in T^{-m}(U_n) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(U_n)$

Επομένως $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(U_n)$. Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(U_n)$

Έστω $\phi \neq U \subseteq X$ ανοικτό. $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $U_n \subseteq U$. Γι αυτό το $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $x \in T^k(U_n) \Leftrightarrow T^{-k}(x) \in U_n \subseteq U$, δηλαδή $\{T^m(x) / m \in \mathbb{Z}\} \cap U \neq \phi$. Αφού U αυθαίρετο, $\overline{\{T^m(x) / m \in \mathbb{Z}\}} = X$

Έστω $G_n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} T^m(U_n)$ το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Τότε

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ είναι G_δ

Ισχυρισμός: Κάθε G_n είναι πυκνό.

Από συνθήκη 3) αν $\phi \neq V \subseteq X$ ανοικτό, υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $T^k(U_n) \cap V \neq \phi$. Άρα $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} T^m(U_n) \cap V \neq \phi$. Αφού το G_n τέμνει

κάθε ανοικτό μη κενό, είναι πυκνό. Από το Θεώρημα Baire έπεται ότι $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ είναι πυκνό

(4) ⇒ (1) Προφανές

Για μονόπλευρη μεταβατικότητα:

Πρόταση Έστω (X, T) ένα τ.δ.σ τ.ω. $T(X) = X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(1) Το (X, T) είναι (μονόπλευρα) μεταβατικό

(2) Αν $E \subseteq X$ κλειστό τ.ω. $T(E) \subseteq E$ τότε $E = X$ ή E πουθενά πυκνό.

(3) $\forall U, V \subseteq X$ ανοικτά μη κενά $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $T^{-n}(U) \cap V \neq \phi$

(4) $\forall U, V \subseteq X$ ανοικτά μη κενά $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $T^n(V) \cap U \neq \phi$

(5) Το $\{x \in X / \overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X\}$ είναι G_δ πυκνό

απόδειξη (1) ⇒ (2) Έστω $x \in X$ τ.ω. $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X$

Έστω $E \subseteq X$ κλειστό τ.ω. $T(E) \subseteq E$ και έστω ότι υπάρχει ανοικτό $U \neq \phi$ τ.ω. $U \subseteq E$. Από πυκνότητα της τροχιάς $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τ.ω. $T^n(x) \in U \subseteq E$. Επειδή $T(E) \subseteq E$ έχουμε ότι $\{T^m(x) / m \geq n\} \subseteq E$ και επειδή E κλειστό, $\overline{\{T^m(x) / m \geq n\}} \subseteq E$. Γνωρίζουμε ότι $X = \overline{\{T^m(x) / m \geq n\}} \cup \{x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)\}$

Τοτε $X \overset{\text{επι}}{=} T^n(X) \subseteq E$ και αρα $E = X$

$2) \Rightarrow 3)$ Η (2) για ανοικτά σύνολα: $\forall U \subseteq X$ ανοικτο τ.ω. $T^{-1}(U) \subseteq U$ εχουμε $U = \emptyset$ ή $\bar{U} = X$. Εστω U, V ανοικτα μη κενά

$\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U)$ ανοικτο, μη κενό επειδη T επι και $T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U)\right) =$

$= \bigcup_{n=2}^{\infty} T^{-n}(U) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U)$. Απο τη συνθηκη (2) εχουμε οτι το

$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U)} = X$. Επειδη $V \neq \emptyset$ ανοικτο πρεπει $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$

και αρα $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$

$(3) \Leftrightarrow (4)$ Ισχυρισμός: $T^n(T^{-n}(U) \cap V) = U \cap T^n(V)$ (*). Πραγματι, αν $y \in T^n(T^{-n}(U) \cap V)$ τοτε $\exists x \in T^{-n}(U) \cap V$ τ.ω. $T^n(x) = y$

Αρα $y \in U$ και $y = T^n(x) \in T^n(V)$.

Αντιστροφα, αν $y \in U \cap T^n(V)$ τοτε $\exists x \in V$ τ.ω. $T^n(x) = y$ και τοτε $x = T^{-n}(y)$ και $y \in U$ αρα $x \in T^{-n}(U)$. Τελικα $x \in T^{-n}(U) \cap V$ αρα $y = T^n(x) \in T^n(T^{-n}(U) \cap V)$. Δειξαμε λοιπον την (*). Απο αυτη επεται οτι $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow T^n(V) \cap U \neq \emptyset$

$3) \Rightarrow (5)$ $U_n, n \in \mathbb{N}$ αριθμησιμη βαση. Τοτε $\{x \in X \,/\, \overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X\}$ $= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}(U_n)$. Απο Baire πυκνο G_δ οπως προηγουμενη

προταση.

$(5) \Rightarrow (1)$ προφανές.

Παρατηρηση Η προηγουμενη προταση ισχυει και χωρις την υποθεση $T(X) = X$ αν υποθεσουμε οτι ο X δεν εχει μεμονωμένα σημεια. Το $T(X) = X$ χρησιμοποιηθηκε στο $(1) \Rightarrow (2)$ οταν καταληξαμε οτι $X = E \cup \{x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)\}$. Τοτε $X \setminus E \subseteq \{x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)\}$. Το $X \setminus E$ ειναι ανοικτο και αρα $X \setminus E \subseteq \{x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)\}^{\circ} = \emptyset$

Το αλλο σημειο που χρησιμοποιηθηκε το $T(X) = X$ ειναι το $(2) \Rightarrow (3)$

Ισχυρισμος: Οταν ισχυει η (2) ο T πρεπει να ειναι επι.

Αποδειξη: Εστω $G = X \setminus T(X)$ ειναι ανοικτο συνολο, επειδη X συμπαγης και αρα $T(X)$ συμπαγες και αρα κλειστο. Εστω οτι

$G \neq \phi$. Απο υποθεση (2) εχουμε $T^{-1}(G) = \phi \subseteq G$. Από υπόθεση (2) πρεπει $\bar{G} = X$. Τοτε το G περιεχει τουλάχιστον δύο σημεία, εστω x, y. $\exists\, U, V \subseteq G$ ανοικτά τ.ω. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \phi$.
Τοτε $T^{-1}(U) = \phi \subseteq U$ και $U \neq \phi$. Απο το (2) πρεπει $\bar{U} = X$. Αρα πρεπει $U \cap V \neq \phi$ (αφού V ανοικτο και $V \neq \phi$). Ατοπο.

Παραδειγμα $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$. $T(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $T(0) = 0$
$\overline{\{T^n(1) / n \in \mathbb{N}\}} = X$ άρα το σύστημα είναι μεταβατικό.
$U = \{1\}$ και $V = \{\frac{1}{2}\}$ ανοικτά $T^{-n}(U) = \phi$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Αρα $T^{-n}(U) \cap V = \phi$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Αν $E = X \setminus \{1\}$ τοτε E κλειστο $T(E) \subseteq E$ και $E \neq X$ και $\{\frac{1}{2}\}$ είναι ανοικτο υποσυνολο του E.

Παραδειγμα $X = \{0\} \cup \{1\} \cup \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$
$T(0) = 0$, $T(1) = 1$ και $T(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$
$T(1 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n-1}$ για $n \in \mathbb{N}$ με $n > 2$.

Το (X, T) είναι αμφίπλευρα μεταβατικό, γιατι $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} = X$ $\forall x \in X \setminus \{0, 1\}$, αλλα δεν είναι μονόπλευρα μεταβατικο.

Προταση Αν (X, T) μεταβατικο τ.δ.σ. και $f \in C(X)$ τ.ω. $f = f \circ T$ τοτε f σταθερή.

Παρατήρηση Το αντίστροφο δεν ισχυει.

Παραδείγματα
1) $X = \mathbb{T}$, $T(x) = x + a \pmod 1$. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ το σύστημα αυτό είναι ελαχιστικό άρα και μεταβατικό.
(3) S πεπερασμενο σύνολο $X = S^{\mathbb{N}} = \{\underset{\sim}{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / x_n \in S \ \forall n \in \mathbb{N}\}$
$d(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = d((x_n), (y_n)) = e^{-n(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) + 1}$, T shift
οπου $n(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \inf\{n \in \mathbb{N} / x_n \neq y_n\}$ και $\inf \phi = +\infty$
$\underset{\sim}{x}$ η ακολουθια που προκύπτει ως εξής: Παραθετω ολα τα στοιχεία του S, Παραθετω ολα τα στοιχεία του S^2, Παραθετω ολα τα στοιχεια του S^3, ...

π.χ. $S=\{0,1\}$ $\underset{\sim}{x} = (0,1,0.0,1.1,0.1,0.0.0,0.0.1,0.1.0,1.0.0,0.1.1,1.1.0,1.1.1,\dots)$

Πυκνή στον $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ άρα το σύστημα είναι μεταβατικό.

(ii) Όμοια για $X=S^{\mathbb{Z}}$, T shift πάλι είναι μονόπλευρα μεταβατικό

(5) Επιμορφισμοί του $\mathbb{T}^d$.

(α) $\mathbb{T}=X$, $T_2(x)=2x \pmod 1$

Ορίζουμε $\varphi:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]$, $\varphi(x_1,x_2,\dots)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$

$$\varphi(\underset{\text{shift}}{T}(x_1,x_2,\dots)) = T_2(\varphi(x_1,x_2,\dots))$$

Το σημείο $\varphi(x_1,x_2,\dots)$ είναι πυκνό ως προς την T_2 στο $[0,1)$

μάθημα 19°
10/12/18

Πρόταση Έστω (X,T) τ.δ.σ και έστω ότι υπάρχει Borel μέτρο πιθανότητας μ τ.ω. $T_*\mu=\mu$ (T-αναλλοίωτο) είναι εργοδικό και $\mu(U)>0$ $\forall\, \phi\neq U\subseteq X$ ανοικτό. Τότε το σύστημα είναι μεταβατικό.

απόδειξη Έστω U_n, $n\in\mathbb{N}$ αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X. Από για κάθε U ανοικτό και $x\in U$, $\exists n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $x\in U_n\subseteq U$. Τότε:

$$\{x\in X / \overline{\{T^n(x)/n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}=X\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(U_n)$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη ότι $U_n\neq\emptyset$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και άρα $\mu(U_n)>0$.

Άρα από εργοδικότητα $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(U_n)\right)=1$ Τότε $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(U_n)\right)=1$

Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(U_n)\neq\emptyset$ άρα $\{x\in X/\overline{\{T^n(x)/n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}=X\}\neq\emptyset$

άρα το σύστημα είναι μεταβατικό

Παραδείγματα

1) S πεπερασμένο σύνολο, $X=S^{\mathbb{N}}$, $T:X\to X$ shift

Έστω $(p_s)_{s\in S}$ ένα διάνυσμα πιθανότητας και θεωρούμε το μέτρο $\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_1=i_1,\dots,x_n=i_n\}) = p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\forall i_1,\dots,i_n\in S$.

Γνωρίζουμε ότι το μ είναι εργοδικό. Αν U ανοικτό και $x\in U$ τότε $\exists n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\{\underset{\sim}{y}\in X / y_1=x_1,\dots,y_n=x_n\}\subseteq U$

κλειστή μπάλα με κέντρο $\underset{\sim}{x}$ και ακτίνα e^{-n+1}

Αν $e^{-n} < \delta < e^{-n+1}$ τότε $\{\underset{\sim}{y} \in X / y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n\}$ είναι ανοικτή μπάλα με κέντρο $\underset{\sim}{x}$ και ακτίνα δ. Άρα $\mu(U) \geq \mu(\{\underset{\sim}{y} \in X / y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n\})$ $= p_{x_1} \cdots p_{x_n} > 0$. Άρα από πρόταση το σύστημα είναι τοπολογικά μεταβατικό.

2) Έστω $d \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το σύστημα με $X = \mathbb{T}^d$ και $T(x) = Ax (\mathrm{mod}\, 1)$ $x \in \mathbb{T}^d$, όπου A είναι ένας $d \times d$ πίνακας με $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ $\forall i,j \in \{1, \dots, d\}$ και $\det A \neq 0$. Το (X,T) είναι τ.δ.σ. Η T διατηρεί το μέτρο Lebesgue $\lambda_{\mathbb{T}^d}$. Έχουμε ότι $\lambda_{\mathbb{T}^d}(U) > 0$ $\forall U \subseteq \mathbb{T}^d$ ανοικτό ($\lambda_{\mathbb{T}^d}$ είναι το μέτρο Haar της $\mathbb{T}^d$). Το σύστημα (X,T) είναι τοπολογικό μεταβατικό ανν το σύστημα $(X, \mathcal{B}(X), \lambda_{\mathbb{T}^d}, T)$ είναι εργοδικό ανν καμία ιδιοτιμή του A δεν είναι ρίζα της μονάδας. (Όταν το σύστημα δεν είναι εργοδικό, υπάρχει συνεχής f τ.ω. $f \circ T = f$ που δεν είναι σταθερή. Άρα το σύστημα δεν είναι μεταβατικό.

3) Αν $X = \mathbb{T}$ και $T(x) = x + a (\mathrm{mod}\, 1)$. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ το σύστημα $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \lambda_{\mathbb{T}}, T)$ είναι εργοδικό, $\lambda_{\mathbb{T}}(U) > 0$ $\forall U \neq \emptyset$ ανοικτό και άρα από πρόταση το σύστημα είναι μεταβατικό.

Ο χώρος των αναλλοίωτων μέτρων πιθανότητας σε ένα τ.δ.σ.

Αν (X,T) είναι τ.δ.σ.: $\mathcal{M}_T(X) = \{\mu / \mu$ Borel μέτρο πιθανότητας στον X τ.ω. $T_*\mu = \mu\}$

Πρόταση Έστω X μετρικός χώρος. Τότε $\forall B \in \mathcal{B}(X)$ και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C \subseteq X$ κλειστό, $U \subseteq X$ ανοικτό τ.ω. $C \subseteq B \subseteq U$ και $\mu(U \setminus C) < \varepsilon$.

Πόρισμα Έστω X μετρικός χώρος και $B \in \mathcal{B}(X)$.
$\mu(B) = \inf\{\mu(U) / U \text{ ανοικτό}, U \supseteq B\} = \sup\{\mu(C) / C \text{ κλειστό}, C \subseteq B\}$

απόδειξη πρότασης

Ορίζουμε $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{B}(X) / \forall \varepsilon > 0 \ \exists C \subseteq X$ κλειστό, $\exists U \subseteq X$ ανοικτό τ.ω. $C \subseteq F \subseteq U$ και $\mu(U \setminus C) < \varepsilon\}$

Ισχυρισμός 1

Η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, $X \in \mathcal{F}$. Παίρνουμε $C = U = X$.
Αν $F \in \mathcal{F}$ και $\varepsilon > 0$, $\exists C$ κλειστό και U ανοικτό τ.ω. $C \subseteq F \subseteq U$ και $\mu(U \setminus C) < \varepsilon$. Τότε $\underbrace{U^c}_{\text{κλειστό}} \subseteq F^c \subseteq \underbrace{C^c}_{\text{ανοικτό}}$ και $\mu(C^c \setminus U^c) =$

$= \mu(U \setminus C) < \varepsilon$ άρα $F^c \in \mathcal{F}$

Τέλος έστω $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\forall n \in \mathbb{N}$, C_n κλειστά, U_n ανοικτά τω. $C_n \subseteq F_n \subseteq U_n$ και $\mu(U_n \setminus C_n) < \varepsilon / 2^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Παρατηρούμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} U_n \downarrow \emptyset$

και άρα $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} U_n\right) \to 0$ καθώς $m \to \infty$.

Τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} U_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $C = \bigcup_{n=1}^{m} C_n$,

C κλειστό. Θέτουμε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ ανοικτό. Έχουμε $\underbrace{C}_{\text{κλειστό}} \subseteq F \subseteq \underbrace{U}_{\text{ανοικτό}}$

όπου $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Είναι $U \setminus C \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} (U_n \setminus C_n) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} U_n\right)$, οπότε

$$\mu(U \setminus C) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu(U_n \setminus C_n) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Έπεται ότι $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$. Δείξαμε ότι $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα.

<u>Ισχυρισμός 2</u> $F \in \mathcal{F}$ $\forall F$ κλειστό. Πράγματι, ορίζουμε $U_n = \{x \in X \,/\, dist(x, F) < \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε U_n είναι ανοικτό. Επίσης $U_n \downarrow F$ (επειδή F κλειστό). Επομένως $\mu(U_n) \to \mu(F)$ $\Leftrightarrow$ $\mu(U_n \setminus F) = \mu(U_n) - \mu(F) \to 0$. Άρα δοθέντος $\varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ τω. $\mu(U_n \setminus F) < \varepsilon$ και τότε $\underbrace{F}_{\text{κλειστό}} \subseteq F \subseteq \underbrace{U_n}_{\text{ανοικτό}}$ και $\mu(U_n \setminus F) < \varepsilon$ άρα $F \in \mathcal{F}$

Συνολικά η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά άρα $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{F}$ μιας τι $\mathcal{B}(X)$ παράγεται από τα κλειστά και άρα τελικά $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$.

Πρόταση Έστω X συμπαγής μχ. και μ, ν Borel μέτρα πιθανότητας στον X. Τότε $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu$ $\forall f \in C(X)$ $\Leftrightarrow$ $\mu = \nu$

<u>απόδειξη</u> "$\Leftarrow$" προφανής

"$\Rightarrow$" Θα δείξουμε ότι $\mu(F) = \nu(F)$ $\forall F$ κλειστό.

Έστω $U_n = \{x \in X \,/\, dist(x, F) < \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανοικτό και $F \subseteq U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $f_n(x) = \dfrac{dist(x, U_n^c)}{dist(x, F) + dist(x, U_n^c)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$

Τότε η f_n είναι συνεχής, $f_n(x)=1$, $x\in F$ και $f_n(x)=0$, $x\in U_n^c$.
Άρα $1\!\!1_F \le f_n \le 1\!\!1_{U_n}$. Άρα $\mu(F)\le \int f_n d\mu = \int f_n d\nu \le \nu(U_n)$
και $\nu(F) \le \int f_n d\nu = \int f_n d\mu \le \mu(U_n)$
Δηλαδή $\mu(F)-\nu(F) \le \nu(U_n)-\nu(F)$
$\nu(F)-\mu(F) \le \mu(U_n)-\mu(F)$
Επίσης $U_n \downarrow F$ επομένως $\mu(U_n)\downarrow\mu(F)$, $\nu(U_n)\downarrow\nu(F)$. Άρα $\mu(F)-\nu(F)=0$. Επειδή τα κλειστά σύνολα αποτελούν π-σύστημα που παράγει την $\mathcal{B}(X)$, $\nu(F)=\mu(F)$ για κλειστά $\Rightarrow \nu=\mu$.

<u>Συμβολισμοί</u>
X συμπαγής μ.χ.
$C(X)=\{f: X\to\mathbb{C} \,/\, f \text{ συνεχής}\}$
$\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$

ο $C(X)$ είναι χώρος Banach με την $\|\cdot\|$
$C(X)^* = \{\varphi: C(X)\to\mathbb{C} \,/\, \varphi \text{ φραγμένο, γραμμικό}\}$
Μια τοπολογία στον $C(X)^*$ είναι αυτή που επάγει η νόρμα
$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(f)| \,/\, f\in C(X), \|f\|\le 1\}$ Τότε ο $C(X)^*$ με την νόρμα $\|\cdot\|$ είναι χώρος Banach. Μια άλλη τοπολογία είναι η <u>ασθενής *</u>
Αυτή είναι η τοπολογία για την οποία ένα δίκτυο $\{\varphi_i \,/\, i\in I\}$ στο $C(X)^*$ συγκλίνει σε ένα $\varphi\in C(X)^*$ ανν $\varphi_i(f)\to\varphi(f)$ $\forall f\in C(X)$
Ισοδύναμα είναι η μικρότερη τοπολογία στον $C(X)^*$ η οποία κάνει όλες τις απεικονίσεις $\varphi \xmapsto{\mathcal{L}_f} \varphi(f)$ για $f\in C(X)$ συνεχείς.
Ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον X ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\varphi(f) = \int f d\mu$ για $f\in C(X)$
Αν $M_1^+(X) = \{\mu \,/\, \mu \text{ Borel μέτρο πιθανότητας στον } X\}$.
τότε $M_1^+(X)$ περιέχεται στον $C(X)^*$. Θεωρούμε το $M_1^+(X)$ με την ασθενή * τοπολογία που επάγεται από το $C(X)^*$. Δηλαδή ένα δίκτυο μ_i, $i\in I$ από Borel μέτρα πιθανότητας συγκλίνει σε ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ ανν $\int f d\mu_i \to \int f d\mu$ $\forall f\in C(X)$

Θεώρημα Riesz

$C(X)^* \simeq M(X) = \{\mu / \mu$ Borel μέτρο (μιγαδικό εν γένει)$\}$

Ειδικότερα: Αν $\varphi \in C(X)^*$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές τ.ω. $\varphi(f) \geq 0$ $\forall f \in C(X)$ με $f(X) \subseteq [0, \infty)$ τότε υπάρχει θετικό μέτρο Borel πεπερασμένο τ.ω. $\varphi(f) = \int f \, d\mu$. Επιπλέον $\varphi(1\!\!1_X) = \mu(X)$

Πρόταση Έστω X συμπαγής μ.χ. Τότε ο $M_1^+(X)$ με την ασθενή $*$ τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος. Δηλαδή υπάρχει μια μετρική ρ με την ιδιότητα ότι $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$ για $\mu_n, \mu \in M_1^+(X)$ ανν $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$ $\forall f \in C(X)$. Μια τέτοια μετρική είναι η:

$$\rho(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\int f_n d\mu - \int f_n d\nu|}{\max\{\|f_n\|, 1\} \cdot 2^n}$$

όπου $\{f_n / n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $C(X)$.

απόδειξη

Υπενθύμιση: Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
1) X μετρικοποιήσιμος
2) X 2^{os} αριθμήσιμος (δηλ. έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του)
3) $(C(X), \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος μ.χ.

Έστω $\{f_n / n \in \mathbb{N}\}$ ένα πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο του $C(X)$ και ορίζουμε $\rho(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\int f_n d\mu - \int f_n d\nu|}{2^n \max\{\|f_n\|, 1\}}$, $\mu, \nu \in M_1^+(X)$.

Τότε $\rho(\mu, \nu) < +\infty$ $\forall \mu, \nu \in M_1^+(X)$

και $\rho(\mu, \nu) \geq 0$

και $\rho(\mu, \nu) = \rho(\nu, \mu)$

και
$$\rho(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\int f_n d\mu - \int f_n d\nu|}{\max\{\|f_n\|, 1\} 2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\int f_n d\mu - \int f_n d\kappa|}{\max\{\|f_n\|, 1\} \cdot 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\int f_n d\kappa - \int f_n d\nu|}{2^n \max\{\|f_n\|, 1\}} = \rho(\mu, \kappa) + \rho(\kappa, \nu), \ \forall \kappa \in M_1^+(X)$$

Επίσης $\rho(\mu, \nu) = 0 \Rightarrow |\int f_n d\mu - \int f_n d\nu| = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Από πυκνότητα των f_n δοθέντος $\varepsilon > 0$ και $f \in C(X)$ $\exists f_n$ τ.ω. $\|f - f_n\| < \varepsilon/2$. Τότε $|\int f \, d\mu - \int f \, d\nu| \leq$

$\le \left|\int f d\mu - \int f_n d\mu\right| + \cancelto{0}{\left|\int f_n d\mu - \int f_n d\nu\right|} + \left|\int f_n d\nu - f d\nu\right| \le$

$\le \left|\int (f-f_n) d\mu\right| + \left|\int (f-f_n) d\nu\right| \le 2\|f-f_n\| < \varepsilon$

Αφού $\varepsilon>0$ αυθαίρετο, έπεται ότι $\int f d\mu = \int f d\nu$.
Αφού αυτό ισχύει $\forall f \in C(X)$. Έπεται από προηγούμενη πρόταση ότι $\mu=\nu$. Άρα δείξαμε ότι ρ είναι μετρική. Έστω τώρα $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $M_1^+(X)$ τ.ω. $\rho(\mu_n,\mu)\to 0$. Έστω f συνεχής.
Έστω $\varepsilon>0$ $\exists m\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\|f_m-f\|<\varepsilon/3$. $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω.
$\left|\int f_m d\mu_n - \int f_m d\mu\right| \le \rho(\mu_n,\mu)\max\{\|f_m\|,1\}\, 2^m < \varepsilon/3$ $\forall n\ge n_0$
Έπεται ότι $\left|\int f d\mu_n - \int f d\mu\right| \le \left|\int f d\mu_n - \int f_m d\mu_n\right| +$

$+ \left|\int f_m d\mu_n - \int f_m d\mu\right| + \left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| \le$

$\le \int |f-f_m| d\mu_n + \frac{\varepsilon}{3} + \int |f_m - f| d\mu \le 2\|f_m-f\| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ $\forall n\ge n_0$
Έπεται ότι $\int f\, d\mu_n \to \int f d\mu$. Αντίστροφα τώρα, έχουμε ότι:
Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $M_1^+(X)$ τ.ω
$\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ $\forall f\in C(X)$. Έχουμε σταθεροποιήσει και ένα αριθμήσιμο πυκνό $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq C(X)$ και ρ η αντίστοιχη μετρική. Έστω $\varepsilon>0$ Έστω $M\in\mathbb{N}$ τ.ω

μάθημα 20
12/12/18

$\sum_{m=M+1}^{\infty} 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{4}$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\left|\int f_m d\mu_n - \int f_m d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall n\ge n_0$, $\forall m\in\{1,\dots,M\}$

$$\rho(\mu_n,\mu) \le \sum_{m=1}^{M} \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^m} + \sum_{m>M} \frac{\left|\int f_m d\mu_n\right| + \left|\int f_m d\mu\right|}{2^m \max\{\|f_m\|,1\}} \le \frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{m>M} 2^{-m} < \varepsilon$$

$\forall n\ge n_0$. Αυτό δείχνει ότι $\rho(\mu_n,\mu)\to 0$.

<u>Πρόταση</u> Έστω X συμπαγής μ.χ. και ρ μια οποιαδήποτε μετρική όπως στην προηγούμενη πρόταση με την ασθενή * τοπολογία. Τότε ο $M_1^+(X)$ με την ρ είναι συμπαγής. (Δηλαδή με την ασθενή * τοπολογία ο $M_1^+(X)$ είναι συμπαγής μ.χ.)
<u>απόδειξη</u> Θδο κάθε ακολουθία $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $M_1^+(X)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του $C(X)$. Η ακολουθία $\left(\int f_1 d\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{C}$ φραγμένη από το $\|f_1\|$. Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή,

υπάρχει $k_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα τ.ω. $\int f_1 \, d\mu_{k_1(n)} \to L(f_1) \in \mathbb{C}$ για κάποιο $L(f_1)$. Έστω $\mu_n(1) = \mu_{k_1(n)}$ $n \in \mathbb{N}$. Η $\left(\int f_2 \, d\mu_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{C}$ από την $\|f_2\|$ άρα υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλ $k_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα τ.ω. $\int f_2 \, d\mu^{(1)}_{k_2(n)} \to L(f_2) \in \mathbb{C}$ για κάποιο $L(f_2)$. Ονομάζουμε:
$\mu_n^{(2)} = \mu^{(1)}_{k_2(n)} = \mu_{k_1 \circ k_2(n)}$ $n \in \mathbb{N}$. Συνεχίζοντας βρίσκουμε ακολουθίες $(\mu_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθίες της αρχικής τ.ω. $\int f_m \, d\mu_n^{(m)} \to L(f_m)$ για κάποιο $L(f_m)$ και $\mu_n^{(m)} = \mu^{(m-1)}_{k_m(n)}$ όπου $k_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα.

$\int f^1 \, d\mu_1 , \int f_1 \, d\mu_2 , \dots \to L(f_1)$

$\int f^2 \, d\mu_1^{(1)} , \int f_2 \, d\mu_2^{(2)} , \dots \to L(f_2)$

...

Ορίζουμε $k(n) = k_1 \circ \cdots \circ k_n(n)$, $n \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε την:
$\mu_{k(n)} = \mu_{k_1 \circ \cdots \circ k_n(n)} = \mu_n^{(n)}$. Έχουμε ότι $k(n+1) = k_1 \circ \cdots \circ k_n \circ k_{n+1}(n+1) \geq$
$\geq k_1 \circ \cdots \circ k_n(n+1) > k_1 \circ \cdots \circ k_n(n) = k(n)$
άρα $k_1(1) < k_2(2) < \dots$ και άρα $(\mu_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ισχυρισμός 1: $\int f_j \, d\mu_{k(n)} \xrightarrow{n\to\infty} L(f_j)$ $\forall j \in \mathbb{N}$.
Έστω $j \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\left|\int f_j \, d\mu_n^{(j)} - L(f_j)\right| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Τότε για $n > j$: $\left|\int f_j \, d\mu_{k(n)} - L(f_j)\right| =$
$= \left|\int f_j \, d\mu_{k_1 \circ \cdots \circ k_j \circ k_{j+1} \circ \cdots \circ k_n(n)} - L(f_j)\right| = \left|\int f_j \, d\mu^{(j)}_{k_{j+1} \circ \cdots \circ k_n(n)} - L(f_j)\right|$

με $k_{j+1} \circ \cdots \circ k_n(n) \geq n$ επομένως αν $n \geq n_0$ τότε $\left|\int f_j \, d\mu_{k(n)} - L(f_j)\right| < \varepsilon$
Αυτό δείχνει ότι $\int f_j \, d\mu_{k(n)} \to L(f_j)$
Ισχυρισμός 2: Η ακολουθία $\left(\int f \, d\mu_{k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει $\forall f \in C(X)$
απόδειξη: Έστω $f \in C(X)$ και $\varepsilon > 0$. $\exists j \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\|f - f_j\| < \varepsilon/3$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\left|\int f_j \, d\mu_{k(n)} - \int f_j \, d\mu_{k(m)}\right| < \varepsilon/3$ $\forall m, n \geq n_0$
Επομένως: $\left|\int f \, d\mu_{k(n)} - \int f \, d\mu_{k(m)}\right| \leq \left|\int f \, d\mu_{k(n)} - \int f_j \, d\mu_{k(n)}\right|$

$+ \left|\int f_j \, d\mu_{k(n)} - \int f_j \, d\mu_{k(m)}\right| + \left|\int f_j \, d\mu_{k(m)} - \int f \, d\mu_{k(m)}\right| \leq$

$\leq 2\|f - f_j\| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ για $n, m \geq n_0$. Άρα $\left(\int f \, d\mu_{k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Έχουμε δηλ ότι $\int f \, d\mu_{k(n)} \to L(f) \in \mathbb{C}$ $\forall f \in C(X)$
Ο τελεστής L είναι γραμμικός:
$L(af + bg) = \lim_{n\to\infty} \int af + bg \, d\mu_{k(n)} = \lim_{n\to\infty} \left[a \int f \, d\mu_{k(n)} + b \int g \, d\mu_{k(n)} \right]$

$= aL(f) + bL(g)$

Ο L είναι συνεχής : $|L(f)-L(g)| = \left|\lim_{n\to\infty}\left(\int f\,d\mu_{k(n)} - \int g\,d\mu_{k(n)}\right)\right| \leq$

$\leq \lim_{n\to\infty} \int |f-g|\,d\mu_{k(n)} \leq \|f-g\|$.

Ο L είναι θετικός: αν $f\in C(X)$ είναι $f\geq 0$ τότε $L(f)\geq 0$

Απο το Θεώρημα Riesz υπάρχει θετικό μέτρο Borel τ.ω.

$L(f) = \int f\,d\mu \quad \forall f\in C(X)$. Επίσης $\mu(X) = \int \mathbb{1}_X\,d\mu = L(\mathbb{1}_X) =$

$= \lim_{n\to\infty}\int \mathbb{1}_X\,d\mu_{k(n)} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Προφανώς $\int f\,d\mu = L(f) = \lim_{n\to\infty}\int f\,d\mu_{k(n)} \quad \forall f\in C(X)$.

Αρα $\rho(\mu_{k_n},\mu)\to 0$. Αρα ο $M_1^+(X)$ είναι συμπαγής. Κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

Προταση Εστω (X,T) τ.δ.σ. $T_*: M_1^+(X)\to M_1^+(X)$ είναι συνεχής ως προς την ασθενή* τοπολογία.

__αποδειξη__ $T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$?, $B\in\mathcal{B}(X)$. Εστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $M_1^+(X)$ και $\mu\in M_1^+(X)$ και έστω $\mu_n\to\mu$ ασθενώς*

δηλαδή $\int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu \quad \forall f\in C(X)$.

Θέλουμε $T_*\mu_n\to T_*\mu \Leftrightarrow \int f\,dT_*\mu_n \to \int f\,dT_*\mu \quad \forall f\in C(X)$

$\Leftrightarrow \int f\circ T\,d\mu_n \to \int f\circ T\,d\mu \quad \forall f\in C(X)$. Αυτό ισχύει γιατί

$f\in C(X) \Rightarrow f\circ T\in C(X)$

Θεώρημα Εστω (X,T) τ.δ.σ. Εστω $M_T(X) = \{\mu\in M_1^+(X) \,/\, T_*\mu=\mu\}$

$E_T(X) = \{\mu\in M_T(X) \,/\, \mu \text{ εργοδικό}\}$

(1) $M_T(X)\neq\emptyset$ (__Θεώρημα Krylov – Bogolyubov__) κυρτό, συμπαγές.

(2) Τα ακραία σημεία του $M_T(X)$ είναι το $Ext(M_T(X)) = E_T(X)$

(3) Αν $\mu,\nu\in E_T(X)$ τότε $\mu=\nu$ ή $\mu\perp\nu$.

($\mu\perp\nu \Leftrightarrow \exists A,B\in\mathcal{B}(X)$ τω. $A\cap B=\emptyset$, $\mu(A)=1$, $\nu(B)=1$)

__αποδειξη__ (1) Εστω $x\in X$. Ορίζουμε $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{\{T^j(x)\}}$

οπου $\delta_{\{y\}}(A) = \begin{cases} 1, & y\in A \\ 0, & y\notin A\end{cases} = \mathbb{1}_A(y)$, δηλ $\mu_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{1}_A(T^j(x))$, $A\in\mathcal{B}(X)$

Τότε $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο $M_1^+(X)$. Από συμπάγεια η $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(\mu_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $k_1<k_2<\dots$ Έστω μ το όριο μιας συγκλίνουσας υπακολουθίας.

<u>Ισχυρισμός</u>: $\mu\in M_T(X)$. <u>Απόδειξη</u>: Πρέπει ν.δ.ο. $T_*\mu=\mu$, δηλαδή $\int f\,dT_*\mu=\int f\,d\mu \ \forall f\in C(X)$. Έστω $f\in C(X)$.

$$\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f\,d\mu_{k_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{j=0}^{k_n-1}f(T^j(x))$$

$$\int f\,dT_*\mu=\int f\circ T\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{j=0}^{k_n-1}f\circ T^{j+1}(x)$$

Όμως $\displaystyle\frac{1}{k_n}\sum_{j=0}^{k_n-1}f\circ T^{j+1}(x)-\frac{1}{k_n}\sum_{j=0}^{k_n-1}f\circ T^{j}(x)=\frac{1}{k_n}\left[f(T^{k_n}(x))-f(x)\right]\to 0$

επειδή $(f(T^{k_n}(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη (f συνεχής). Άρα $\int f\,d\mu=\int f\,dT_*\mu$.

Δείξαμε ότι $M_T(X)\neq\emptyset$. Έστω $\lambda\in[0,1]$, $\mu_1,\mu_2\in M_T(X)$.

Το $\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2$ είναι μέτρο πιθανότητας.

$T_*(\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2)(A)=(\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2)(T^{-1}(A))=$

$=\lambda\mu_1(T^{-1}(A))+(1-\lambda)\mu_2(T^{-1}(A))=\lambda\mu_1(A)+(1-\lambda)\mu_2(A)=$

$=(\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2)(A)$. Δηλ. $T_*(\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2)=\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2$.

Τέλος το $M_T(X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $M_1^+(X)$ και άρα συμπαγές.

Πράγματι, έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}\in M_T(X)$ τ.ω. $\mu_n\to\mu$ ασθενώς* με $\mu\in M_1^+(X)$.

Τότε $T_*\mu_n\to T_*\mu$ από συνέχεια της T_*.

Άρα $T_*\mu=\lim T_*\mu_n=\lim\mu_n=\mu$. Δηλ. $\mu\in M_T(X)$ άρα $M_T(X)$ κλειστό.

(2) Έστω πρώτα μ ακραίο σημείο του $M_T(X)$ δηλ. $\mu=\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2$ με $\lambda\in[0,1]$ και $\mu_1,\mu_2\in M_T(X)$ τότε ή $\lambda=0$ ή $\lambda=1$ ή $\mu_1=\mu_2$.

Έστω ότι $\mu\notin E_T(X)$. Άρα υπάρχει $A\in\mathcal{B}(X)$ με $T^{-1}(A)=A$ τ.ω. $\mu(A)\in(0,1)$. Ορίζουμε $\mu_A(B)=\dfrac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$, $\mu_{A^c}(B)=\dfrac{\mu(A^c\cap B)}{\mu(A^c)}$

$B\in\mathcal{B}(X)$. Τα μ_A,μ_{A^c} είναι T-αναλλοίωτα. Πράγματι,

$$\mu_A(T^{-1}(B))=\frac{\mu(A\cap T^{-1}(B))}{\mu(A)}=\frac{\mu(T^{-1}(A)\cap T^{-1}(B))}{\mu(A)}=$$

$=\dfrac{\mu(T^{-1}(A\cap B))}{\mu(A)}=\mu_A(B)$. Όμοια $\mu_{A^c}(T^{-1}(B))=\mu_{A^c}(B)$, $\forall B\in\mathcal{B}(X)$

Άρα $\mu_A,\mu_{A^c}\in M_T(X)$ και $\mu=\mu(A)\mu_A+(1-\mu(A))\mu_{A^c}$

$$\mu(B)=\mu(A)\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}+(1-\mu(A))\frac{\mu(A^c\cap B)}{\mu(A^c)}$$

Άρα $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ με $\lambda \in (0,1)$ και $\mu_1 \neq \mu_2$ Άτοπο.
Για το αντίστροφο θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:
Λήμμα Αν $\mu \in E_T(X)$, $\nu \in M_T(X)$ τότε $\nu \ll \mu \Rightarrow \nu = \mu$.
Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.
Έστω $\mu \in E_T(X)$. Έστω $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ με $\mu_1, \mu_2 \in M_T(X)$, $\lambda \in [0,1]$
Τότε ή $\mu_1 \ll \mu$ και $\mu_2 \ll \mu$ ή $\lambda = 0$ και $\mu_2 \ll \mu$ ή $\lambda = 1$ και $\mu_1 \ll \mu$
Αν έχουμε $\mu_1 \ll \mu$ και $\mu_2 \ll \mu$ από το λήμμα πρέπει $\mu_1 = \mu$ και $\mu_2 = \mu$
Άρα το μ δεν γράφεται σαν μη τετριμμένος κυρτός συνδυασμός δύο στοιχείων του $M_T(X)$ και άρα είναι ακραίο σημείο.
(3) Έστω $\mu, \nu \in E_T(X)$ με $\mu \neq \nu$. Τότε υπάρχει $f \in C(X)$ τ.ω. $\int f\,d\mu \neq \int f\,d\nu$. Το εργοδικό θεώρημα δίνει:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \to \int f\,d\mu \text{ για } \mu\text{-σ.κ.} \qquad (*)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \to \int f\,d\nu \text{ για } \nu\text{-σ.κ.} \qquad (**)$$

Έστω $A = \{x \in X \,/\, \text{ισχύει η } (*)\}$, $B = \{x \in X \,/\, \text{ισχύει η } (**)\}$
Τότε προφανώς $A \cap B = \emptyset$ και $\mu(A) = 1$, $\nu(B) = 1$ άρα $\mu \perp \nu$.

<u>απόδειξη λήμματος</u>
Έστω $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ Έστω $A = \{x \in X \,/\, f(x) > 1\}$

$$\int_{A\setminus T^{-1}(A)} f\,d\mu = \nu(A\setminus T^{-1}(A)) = \nu(A) - \nu(A \cap T^{-1}(A)) =$$

$$= \nu(T^{-1}(A)) - \nu(A\cap T^{-1}(A)) = \nu(T^{-1}(A)\setminus A) = \int_{T^{-1}(A)\setminus A} f\,d\mu \qquad (*)$$

Επίσης $\mu(A\setminus T^{-1}(A)) = \mu(T^{-1}(A)\setminus A)$. $(**)$

$$\mu(A\setminus T^{-1}(A)) = \int_{A\setminus T^{-1}(A)} 1\,d\mu \leq \int_{A\setminus T^{-1}(A)} f\,d\mu = \int_{T^{-1}(A)\setminus A} f\,d\mu \leq \int_{T^{-1}(A)\setminus A} 1\,d\mu =$$

$= \mu(T^{-1}(A)\setminus A)$, με την πρώτη ανισότητα γνήσια αν $\mu(A\setminus T^{-1}(A)) > 0$. Από την $(**)$ έχουμε ισότητα και άρα πρέπει $\mu(A\setminus T^{-1}(A)) = 0$ Επομένως από $(**)$ $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$ άρα $\mu(A) \in \{0,1\}$ Αν είχαμε $\mu(A) = 1$ τότε θα είχαμε:
$\nu(A) = 1 - \nu(A^c) = 1 - 0 = 1$ επειδή $\mu(A^c) = 0$

Τοτε $1 = \nu(A) = \int_A f\,d\mu > \int_A 1\,d\mu = \mu(A) = 1$ ατοπο. Επομενως

πρεπει $\mu(A)=0$. Ομοια $\mu(B)=0$ οπου $B = \{x \in X \,/\, f(x) < 1\}$
Αρα $f = 1$ μ-σ.π. $\Rightarrow \mu = \nu$

(X,T) τ.δ.σ., $M_T(X)$ αναλλοιωτο, Borel, μετρο πιθανοτητας, $E_T(X)$ εργοδικο, Borel, μετρο πιθανοτητας τοτε $M_T(X) \neq \varnothing$ συμπαγες κυρτο. Επισης $E_T(X) = Ext(M_T(X))$ $\boxed{\text{μαθημα 21} \; 17/12/18}$
Στις πεπερασμενες διαστασεις Αν K συμπαγες κυρτο υποσυνολο ενος τοπολογικου διανυσματικου χωρου $K = conv(Ext(K))$ (θ. Minkowski)
Στις απειρες διαστασεις $K = \overline{conv(Ext(K))}$ (θ. Krein-Milman)

Προταση Αν X μετρικοποιησιμο, κυρτο, συμπαγες υποσυνολο ενος τοπολογικου διανυσματικου χωρου τοτε το $Ext(K)$ ειναι G_δ.

Θεωρημα Εστω (X,T) τ.δ.σ., $\mu \in M_T(X)$. Τοτε υπαρχει μοναδικο Borel μετρο πιθανοτητας P_μ πανω στο $M_T(X)$ τ.ω. $P_\mu(E_T(X)) = 1$ και $\mu = \int_{E_T(X)} \nu \, dP_\mu(\nu)$, δηλ. $\int f\,d\mu = \int_{E_T(X)} \int_X f\,d\nu\, dP_\mu(\nu)$ $\forall f \in C(X)$

Αυτη η αναπαρασταση λεγεται εργοδικη αναλυση του μ.
Αποδειξη: Θεωρημα Choquet

Παραδειγματα
1) $X = \mathbb{T}$, $T(x) = x + a \bmod 1$, $a \in \mathbb{Q}$. Τοτε μετρο Lebesgue $\lambda_{\mathbb{T}} \in M_T(X) \setminus E_T(X)$
Αν $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$ τοτε $T^n = T$
Αρα $\{x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)\}$ ειναι αναλλοιωτο. Επομενως $\mu_x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k(x)}$ $\forall x \in \mathbb{T}$. Το μ_x ειναι T-αναλλοιωτο και εργοδικο.
Πραγματι, αν $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ τ.ω. $T^{-1}(A) = A$ τοτε $x \in A \Leftrightarrow T^k(x) \in A$ $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Επομενως, $\forall x$ εχουμε $\mu_x(A) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$

Αρα καθε μ_x ειναι εργοδικο. Εχουμε $\lambda_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}} \mu_x \, dx$
Πραγματι, για $f \in C(X)$ $\int_{\mathbb{T}} \int f\,d\mu_x\,dx = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))\,dx =$

$\lambda_\pi \in M_T(X)$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int f\, d\lambda_\pi = \int f\, d\lambda_\pi.$$

2) $X = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq 1 \}$. $T(z) = e^{2\pi i a} z$, $T: X \to X$ όπου $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Το δισδιάστατο μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο αλλά όχι εργοδικό. Πράγματι, κάθε δακτύλιος είναι T-αναλλοίωτο σύνολο και δεν έχει αναγκαστικά μέτρο 0 ή 1. Έστω μ το δισδιάστατο μέτρο Lebesgue κανονικοποιημένο ώστε $\mu(X) = 1$. Έστω μ_r το κανονικοποιημένο μονοδιάστατο μέτρο Lebesgue στην περιφέρεια $C_r = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = r \}$ δηλαδή $\mu_r = \frac{1}{2\pi r}$ (μήκος τόξου στο C_r)

Αν $f \in C(X)$ $\int f\, d\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr =$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi}\, 2r\, dr = \int_0^1 \int_{C_r} f\, d\mu_r\, 2r\, dr$$

Εδώ p_μ είναι το $dp_\mu / dr = 2r$. Δηλαδή $\mu = \int_0^1 \mu_r (2r\, dr)$

Τα μ_r είναι εργοδικά γιατί είναι άρρητες στροφές σε περιφέρειες κύκλων.

3) S πεπερασμένο σύνολο $X = S^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$, $\mathcal{A} = \sigma\left(\{ \underset{\sim}{x} \in X \,/\, x_0 = i_0, \dots, x_n = i_n \} \;\; i_0, \dots, i_n \in S, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\right)$

T shift $p = (p_s)_{s \in S}$ διάνυσμα πιθανότητας, $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ στοχαστικός πίνακας, και p είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P. Τότε μέτρο Markov είναι $\mu(\{ \underset{\sim}{x} \in X \,/\, x_0 = i_0, \dots, x_n = i_n \}) =$
$= p_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$ $\forall i_1, \dots, i_n \in S$

$S = \{1, 2, 3, 4\}$, $p = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ο P δεν είναι ανάγωγος άρα το αντίστοιχο μέτρο Markov μ δεν είναι εργοδικό. Θεωρούμε τα $p^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $p^{(2)} = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και έστω $\mu^{(i)}$ μέτρο Markov που αντιστοιχεί στο ζεύγος $p^{(i)}$, P. Τότε κάθε μ_i είναι εργοδικό (άσκηση) $\mu = \frac{1}{2}\mu^{(1)} + \frac{1}{2}\mu^{(2)}$ είναι η εργοδική ανάλυση του μ.

Μοναδική Εργοδικότητα

Ορισμός Έστω (X, T) τ.δ.μ. Το σύστημα λέγεται μοναδικά εργοδικό αν $M_T(X) = \{\mu\}$ είναι μονοσύνολο. Στην περίπτωση αυτή το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο είναι εργοδικό αναγκαστικά.

(X, T) τ.δ.σ και έστω $\mu \in E_T(X)$. Έστω $\{f_n / n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $C(X)$. Ορίζουμε $X_m = \{x \in X / \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_m \circ T^k(x) \to \int f_m \, d\mu\}$

και τότε $X_m \in \mathcal{A}$ και $\mu(X_m) = 1$ από Θεώρημα Birkhoff $\forall m \in \mathbb{N}$.
Για $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} X_m$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_m \circ T^k(x) \to \int f_m \, d\mu$ $\forall m \in \mathbb{N}$ και $\mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} X_m) = 1$

Από πυκνότητα του $\{f_m / m \in \mathbb{N}\}$ στο $C(X)$ έχουμε:
$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \to \int f \, d\mu$ $\forall f \in C(X)$ $\forall x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} X_m$

Θεώρημα Έστω (X, T) τ.δ.σ. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
1) Υπάρχει σταθερά $C(f)$ $\forall f \in C(X)$ τ.ω. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \to C(f)$ ομοιόμορφα ως προς $x \in X$
2) $\exists C(f)$ $\forall f \in C(X)$ τ.ω. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \to C(f)$ $\forall x \in X$ (σημειακά)

3) Υπάρχει αναλλοίωτο Borel μέτρο πιθανότητας μ στον X τ.ω.
$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \to \int f \, d\mu$ $\forall x \in X$, $\forall f \in C(X)$ ~ κάθε σημείο είναι generic

4) Το (X, T) είναι μοναδικά εργοδικό.

Πόρισμα Αν (X, T) είναι μοναδικά εργοδικό τ.δ.σ. και $M_T(X) = \{\mu\}$ τότε $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \to \int f \, d\mu$ ομοιόμορφα ως προς x $\forall f \in C(X)$

απόδειξη Στο προηγούμενο θεώρημα $(4) \Rightarrow (1)$ και για την σταθερά $C(f)$ στο (1) έχουμε $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \to C(f)$ $\forall x \in X$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int f\circ T^k d\mu \to \int C(f)d\mu$ απο θεωρημα κυριαρχημενης

σύγκλισης. Άρα $\int f d\mu =$ αριστερο μέλος $\int C(f)d\mu = C(f)$
άρα $C(f) = \int f d\mu$.

<u>απόδειξη θεωρήματος</u>

1) ⇒ 2) Προφανές

2) ⇒ 3) Εστω $L(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(x)$ για καποιο $x\in X$. Το όριο

$L(f)$ δεν εξαρτάται απο το x. Προφανώς

- $L(af+bg) = aL(f) + bL(g)$
- $|L(f)| \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f\circ T^k(x)| = \|f\|$
- $f\geq 0 \Rightarrow L(f)\geq 0$

Απο θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει θετικό μέτρο Borel στον X τ.ω. $L(f) = \int f d\mu$ $\forall f\in C(X)$. Επίσης $L(1_X) = \int 1_X d\mu$
Όμως $L(1_X) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_X\circ T^k(x) = 1$. Άρα $\mu(X) = \int 1_X d\mu = 1$ και

το μ είναι μέτρο πιθανότητας. Επίσης $\mu\in M_T(X)$. Πράγματι,

$$\int f dT_*\mu = \int f\circ T d\mu = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(T(x)) \underset{\text{απο το(ε) ίδιο όριο } \forall y\in X}{=} L(f) = \int f d\mu$$

Αφού αυτό ισχύει $\forall f$ συνεχή έχουμε $T_*\mu = \mu$ δηλ. $\mu\in M_T(X)$

3) ⇒ 4) Εστω $\nu\in M_T(X)$. Τοτε $\forall f\in C(X)$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(x) \to \int f d\mu$ $\forall x\in X$.

Απο θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης $\int \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k d\nu \to \int\int f d\mu\, d\nu$

$$\int f d\nu = \int f d\mu$$

και αυτό ισχύει $\forall f\in C(X)$. Άρα $\mu = \nu$. Επεται οτι $M_T(X) = \{\mu\}$

4) ⇒ 1) Εστω $M_T(X) = \{\mu\}$. Εστω ότι δεν ισχύει το (1). Τοτε $\exists f\in C(X)$ τ.ω. $\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - \int f d\mu\| \not\to 0$

Υπαρχει $\varepsilon > 0$ και $k_1 < k_2 < \cdots$ τ.ω. $\|\frac{1}{k_n}\sum_{k=0}^{k_n-1} f\circ T^k - \int f d\mu\| > \varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Άρα $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists x_n\in X$ τ.ω. $\left|\frac{1}{k_n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(x_n) - \int f\,d\mu\right| > \varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ορίζουμε $\mu_n = \frac{1}{k_n}\sum_{k=0}^{k_n-1}\delta_{T^k(x_n)}$, $n\in\mathbb{N}$. Τα $\mu_n\in M_1^+(X)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και

το $M_1^+(X)$ είναι συμπαγές. Άρα υπάρχει υπακολουθία $j_1<j_2<\dots$
και $\nu\in M_1^+(X)$ τ.ω. $\mu_{j_n}\to\nu$ ασθενώς*

Ισχυρισμός: Το ν είναι T-αναλλοίωτο. Πράγματι, αρκεί ν.δ.ο. $T_*\nu=\nu$.
Έστω $g\in C(X)$. $\int g\,dT_*\nu = \int g\circ T\,d\nu = \lim_{n\to\infty}\int g\circ T\,d\mu_{j_n} =$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_{j_n}}\sum_{k=0}^{k_{j_n}-1} g\circ T(T^k(x_n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_{j_n}}\left[\sum_{k=0}^{k_{j_n}-1} g(T^k(x_n)) - \underbrace{g(x_n) + g(T^{k_{j_n}}(x_n))}_{\to 0}\right]$$

(συγκλίνουν στο 0 επειδή g φραγμένη)

$=\int g\,d\nu$. Αυτό δείχνει ότι το ν είναι αναλλοίωτο. Έπεται ότι $\mu=\nu$.
Άρα $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\left|\frac{1}{k_{j_n}}\sum_{k=0}^{k_{j_n}-1} f\circ T^k(x_n) - \int f\,d\mu\right| = \left|\int f\,d\mu_{k_{j_n}} - \int f\,d\mu\right| < \varepsilon$

$\forall n\geq n_0$. Αυτό είναι άτοπο γιατί $\left|\frac{1}{k_n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(x_n) - \int f\,d\mu\right| > \varepsilon$

$\forall n\in\mathbb{N}$.

Πρόταση Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{T}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.

(1) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \to \int f\,d\lambda_{\mathbb{T}}$ $\forall f\in C(\mathbb{T})$

(2) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{x_k} \xrightarrow{\text{ασθενώς}^*} \lambda_{\mathbb{T}}$

(3) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m x_k} \to 0$ $\forall m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

(4) Για οποιοδήποτε διάστημα $I\subseteq\mathbb{T}$ έχουμε $\frac{1}{n}\left|\{k\in\{1,\dots,n\} / x_k\in I\}\right| \to \lambda_{\mathbb{T}}(I)$

Οποιαδήποτε ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{T}$ ικανοποιεί ένα από τα (1)-(4)
λέγεται <u>ομοιόμορφα κατανεμημένη</u> στον $\mathbb{T}$ ή <u>ισοκατανεμημένη</u>.

Πόρισμα (Θεώρημα του Weyl)
Για οποιοδήποτε $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ η ακολουθία $n\alpha(\mathrm{mod}\,1) = n\alpha - [n\alpha]$, $n\in\mathbb{N}$
είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον $\mathbb{T}$.

Πρόταση Το σύστημα $X = \mathbb{T}$, $T(x) = x + a \pmod 1$ όπου $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι μοναδικά εργοδικό.

__απόδειξη__ Έστω $\mu \in M_T(X)$. Τότε $T_*\mu = \mu$. Πρέπει $\widehat{T_*\mu}(n) = \hat{\mu}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\widehat{T_*\mu}(n) = \int e^{-2\pi i n t}\, dT_*\mu(t) = \int e^{-2\pi i n T(t)}\, d\mu(t) =$$

$$= \int e^{-2\pi i n (t+a)}\, d\mu(t) = e^{-2\pi i n a} \int e^{-2\pi i n t}\, d\mu = e^{-2\pi i n a}\, \hat{\mu}(n)$$

Άρα $\hat{\mu}(n)(1 - e^{2\pi i n a}) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Αφού $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ έχουμε ότι $e^{2\pi i n a} \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Άρα πρέπει $\hat{\mu}(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Επίσης $\hat{\mu}(0) = 1$ επειδή μ μέτρο πιθανότητας. Άρα $\mu = \lambda_{\mathbb{T}}$

[τα μέτρα καθορίζονται μονοσήμαντα από τους συντελεστές Fourier και Lebesgue μέτρο έχει $\hat{\lambda}(0) = 1$, $\hat{\lambda}(n) = 0$ $\forall n \neq 0$. Άρα $\mu = \lambda_{\mathbb{T}}$]

Άρα το σύστημα $X = \mathbb{T}$, $T(t) = t + a \pmod 1$ όπου $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι μονοσήμαντα εργοδικό, έχουμε ότι $\forall f \in C(X)$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \to \int f\, d\mu \quad \forall x \in X.$$

Ειδικότερα, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(0) \to \int f\, d\mu$ με $\mu = \lambda$.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\underbrace{ka \pmod 1}_{x_k}) \to \int f\, d\mu \quad \forall f \in C(X).$$ Άρα η $x_n = na \pmod 1$

είναι ισοκατανεμημένη στο $\mathbb{T}$.

μάθημα 22
19/12/18

Πρόταση Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{T}$.
Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(1) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \to \int f\, d\lambda_{\mathbb{T}}$, $\forall f \in C(\mathbb{T})$

(2) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k} \to \lambda_{\mathbb{T}}$ ασθενώς*

(3) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \underbrace{e^{2\pi i m x_k}}_{e_m(x_k)} \to 0$ $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

(4) $\forall I \subseteq \mathbb{T}$ διάστημα : $\frac{1}{n} |\{k \in \{1, \dots, n\} / x_k \in I\}| \to \lambda_{\mathbb{T}}(I)$

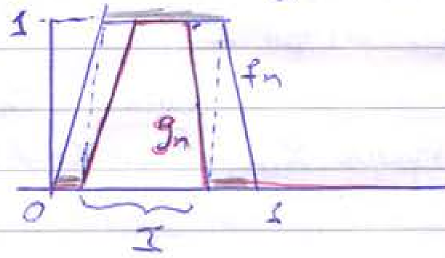
Αν μια ακολουθία ικανοποιεί οποιαδήποτε από τα (1)-(4) λέγεται __ισοκατανεμημένη__.

__απόδειξη__ (1) $\Leftrightarrow$ (2) ορισμός της ασθενούς* σύγκλισης

(1) ⟺ (3) Για $f = e_m$ όπου $e_m(x) = e^{2\pi i x m}$ παίρνουμε άμεσα ότι (1) ⇒ (3)

(3) ⇒ (1) Αν η (3) ισχύει για τα εκθετικά $e_m, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ τότε ισχύει η (1) για τα εκθετικά $e_m, m \in \mathbb{Z}$ και τότε η (1) ισχύει και για γραμμικούς συνδυασμούς εκθετικών. Οι γραμμικοί συνδυασμοί εκθετικών είναι πυκνοί στο $C(\mathbb{T})$ από θεώρημα Stone Weierstrass. Έπεται άμεσα ότι ισχύει η (1) για όλες τις $f \in C(X)$.

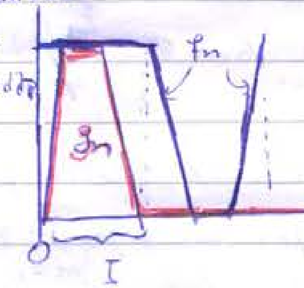
(1) ⇒ (4) Έστω I διάστημα $\subseteq \mathbb{T}$. Υπάρχουν συνεχείς f_n και g_n όπως στα σχήματα τ.ω. $g_n \le \mathbb{1}_I \le f_n \ \forall n \in \mathbb{N}$



$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g_m(x_k) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_I(x_k) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_m(x_k)$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g_m(x_k) \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_I(x_k) \le$$

$$\le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_I(x_k) \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_m(x_k) \xrightarrow[\frac{1}{n}\sum g_m(x_k) \to \int g_m d\lambda_{\mathbb{T}}]{\frac{1}{n}\sum f_m(x_k) \to \int f_m d\lambda_{\mathbb{T}}}$$



$$\Rightarrow 0 \le \varlimsup_{n} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_I(x_k) - \varliminf_{n} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_I(x_k) \le$$

$$\le \int f_m \, d\lambda_{\mathbb{T}} - \int g_m \, d\lambda_{\mathbb{T}} = \int (f_m - g_m) \, d\lambda_{\mathbb{T}}$$

$$\le \lambda_{\mathbb{T}}(\{x \in \mathbb{T} / f_m(x) \neq g_m(x)\}) \xrightarrow{m\to\infty} 0 \quad \text{άρα } \exists \lim_{n} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_I(x_k)$$

Επίσης $\int g_m \, d\lambda_{\mathbb{T}} \le \lambda(I) \le \int f_m \, d\lambda_{\mathbb{T}} \ \forall m \in \mathbb{N}$ οπότε:

$$\lim_{n} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_I(x_k) = \lambda_{\mathbb{T}}(I)$$

(4) ⇒ (1) $\frac{1}{n} |\{k \le n / x_k \in I\}| \to \lambda_{\mathbb{T}}(I)$ ⇒ η (1) ισχύει f = χαρακτηριστική ενός διαστήματος I δηλ. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \to \int f \, d\lambda_{\mathbb{T}}$

Τότε η (1) ισχύει και για γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών και αυτοί είναι πυκνοί στο $C(\mathbb{T})$. Έπεται ότι η (1) ισχύει $\forall f \in C(X)$

Ορισμός Έστω X συμπαγής μ.χ. και μ Borel μέτρο πιθανότητας. Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X λέγεται ισοκατανεμημένη ως προς το μ αν $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \to \int f \, d\mu \ \forall f \in C(X) \iff \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k} \to \mu$ ασθενώς *

Ορισμός Εστω (X,T) τ.δ.σ και $\mu \in M_T(X)$ Ενα σημείο $x \in X$ λέγεται **generic για το μ** αν $\{T^k(x) / k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ είναι ισοκατανεμημένη ως προς μ.

Προταση Εστω (X,T) τ.δ.σ. και $\mu \in M_T(X)$

(1) Το σύνολο των generic σημείων του μ είναι μετρήσιμο.

(2) Αν $\mu \in E_T(X)$ τοτε το σύνολο των generic σημείων του μ έχει μέτρο 1.

αποδειξη (1) Εστω $\{f_n / n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $C(X)$

Ορίζουμε $X_m = \{x \in X \,/\, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_m(T^k(x)) \to \int f_m \,d\mu\}$. Τοτε $X_m \in \mathcal{B}(X)$

Επίσης το σύνολο Y_μ των generic σημείων του μ είναι το
$Y_\mu = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_m \in \mathcal{B}(X)$

(2) Αν $\mu \in E_T(X)$ τοτε $\mu(X_m) = 1$ $\forall m \in \mathbb{N}$, από θεώρημα Birkhoff
και άρα $\mu(Y_\mu) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} X_m\right) = 1$

Παρατηρηση Αν $\mu, \nu \in E_T(X)$ ένα $x \in X$ δεν μπορεί να είναι generic και για τα δύο, εκτός αν $\mu = \nu$.

Θεώρημα (Furstenberg)

Εστω (X,T) ενα μοναδικά εργοδικό τ.δ.σ. και έστω $c : X \to \mathbb{T}^d$ συνεχής
Θεωρουμε το στρεβλό γινόμενο $(X \times \mathbb{T}^d, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T}^d), \mu \times \lambda_{\mathbb{T}}, S)$
οπου $\{\mu\} = M_T(X)$ και $S : X \times \mathbb{T}^d \to X \times \mathbb{T}^d$

$$S(x,t) = (T(x), t + c(x)), \quad (x,t) \in X \times \mathbb{T}^d$$

Το $(X \times \mathbb{T}^d, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T}^d), \mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}, S)$ Είναι σύστημα που διατηρεί το μέτρο και είναι μοναδικά εργοδικό ανν είναι εργοδικό.

αποδειξη Εστω A το σύνολο των generic σημείων του $\mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}$.

Εστω $\nu \in M_S(Y)$ οπου $Y = X \times \mathbb{T}^d$. Θ.δ.ο $\nu = \mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}$ οταν $\nu \in E_S(Y)$

Γιατί τοτε για γενικό $\nu \in M_S(Y)$ θεωρούμε την εργοδική διάσπαση του $\nu = \int_{E_S(Y)} \kappa \, d\lambda_\nu(\kappa)$, λ_ν μέτρο πιθανότητας Borel στο $M_S(Y)$.

Τοτε θα έχουμε οτι $\kappa = \mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}$ $\forall \kappa \in M_S(Y)$ και θα επεται οτι

$V = \mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}$

<u>Ισχυρισμός 1</u> $(x,s) \in A$ αν $(x, t+s) \in A$ $\forall t \in \mathbb{T}^d$

<u>απόδειξη</u> Εστω $(x,s) \in A$. $\forall f \in C(Y)$ $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k(x,s)) \to \int f \, d\mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}$

$$S^k(x,s) = (T^k(x), s + c(x) + c(T(x)) + \cdots + c(T^{k-1}(x)))$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k(x,s+t)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x), t+s+c(x) + c(T(x)) + \cdots + c(T^{k-1}(x)))$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_t \, (T^k(x), s + c(x) + c(T(x)) + \cdots + c(T^{k-1}(x)))$$

$f_t(y,\theta) = f(y, \theta + t)$. Τότε $f_t \in C(Y)$. Επειδή $(x,s) \in A$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_t(S^k(x,s)) \to \int f_t \, d\mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d} = \int f(y, t+\theta) \, d\mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}(y, t+\theta) =$$

$= \int f(y,\theta) \, d\mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}(y,\theta) = \int f \, d\mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}$. Επεται ότι $(x, t+s) \in A$

<u>Ισχυρισμός 2</u> $\exists B \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu(B) = 1$ τ.ω. $A = B \times \mathbb{T}^d$

<u>απόδειξη</u> Εστω $(x,t) \in A$ (υπάρχει επειδή $\mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}(A) = 1$).
Ορίζουμε $B = \{ y \in X \,/\, (y,t) \in A \}$. Τότε $A = B \times \mathbb{T}^d$ από τον προηγούμενο ισχυρισμό και επίσης $\mu(B) = \mu(B) \lambda_{\mathbb{T}^d}(\mathbb{T}^d) = \mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}(B \times \mathbb{T}^d) =$
$= \mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}(A) = 1$. Εστω $v \in E_S(Y)$. Ορίζουμε $\pi : Y \to X$, $\pi(x,t) = x$
Το μέτρο $\pi_* v$ είναι T-αναλλοίωτο. Πράγματι, έχουμε ότι $T \circ \pi = \pi \circ S$
Πράγματι: $T \circ \pi(x,t) = T(x)$

$$\pi \circ S(x,t) = \pi(T(x), t + c(x)) = T(x)$$

$$\pi_* v(T^{-1}(E)) = v(\pi^{-1}(T^{-1}(E))) = v((T \circ \pi)^{-1}(E)) = v((\pi \circ S)^{-1}(E)) =$$
$$= v(S^{-1}\pi^{-1}(E)) = v(\pi^{-1}(E)) = \pi_* v(E).$$ Επεται ότι $\pi_* v = \mu$.

$v(A) = v(B \times \mathbb{T}^d) = v(\pi^{-1}(B)) = \pi_* v(B) = \mu(B) = 1$. Άρα το $\mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}$ και το v έχουν κοινό generic σημείο και άρα πρέπει $V = \mu \times \lambda_{\mathbb{T}^d}$

<u>Πόρισμα</u> Εστω $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε το σύστημα $(\mathbb{T}^d, S)$ όπου $S(t_1, \ldots, t_d) = (t_1 + \alpha, t_2 + t_1, \ldots, t_d + t_{d-1}) \pmod 1$ είναι μοναδικά εργοδικό, με αναλλοίωτο μέτρο το $\lambda_{\mathbb{T}^d}$

<u>απόδειξη</u> Για να δείξουμε ότι το σύστημα αυτό είναι μοναδικά εργοδικό αρκεί ν.δ.ο. είναι εργοδικό. (Επαγωγικά από προηγούμενη πρόταση).
Δείχνουμε ότι το $(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}(\mathbb{T}^d), \lambda_{\mathbb{T}^d}, S)$ είναι εργοδικό.
Εστω $f \in L^2(\lambda_{\mathbb{T}^d})$ τ.ω. $f \circ S \overset{L^2}{=} f$.

Εχουμε $\widehat{f\circ S}(\underset{\sim}{n}) = \int\cdots\int e^{-2\pi i\langle \underset{\sim}{n},\underset{\sim}{t}\rangle} f(S(t_1,\dots,t_d))dt_1\dots dt_d =$

$= e^{2\pi i n_1 a}\int\cdots\int e^{-2\pi i\langle \underset{\sim}{n}, S^{-1}\underset{\sim}{t}\rangle} f(t)\,dt_1\dots dt_d =$

$= \int\cdots\int e^{-2\pi i\langle (S^{-1})^* n, t\rangle} f(t)\,dt_1\dots dt_d\, e^{2\pi i a n_1} =$

$= \hat{f}((S^{-1})^* n)\, e^{2\pi i a n_1}$. Πρεπει $\hat{f}(n) = \hat{f}((S^{-1})^* n)\, e^{2\pi i a n_1}$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d$

Ισοδυναμα $\hat{f}(S^* n) = \hat{f}(n) e^{2\pi i n_1 a}$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d$. Αρα πρεπει

$|\hat{f}(S^* n)| = |\hat{f}(n)|$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d$. Αρα $|\hat{f}((S^*)^p n)| = |\hat{f}(n)|$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d$ $\forall p\in\mathbb{N}$.

Αν τα $(S^*)^p n$, $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, η ισοτητα Parseval δινει οτι πρεπει $\hat{f}(n)=0$.

$$\infty > \|f\|_2^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(m)|^2 \geq \sum_p |\hat{f}(S^p n)|^2 = \sum_p |\hat{f}(n)|^2$$

Επομένως $\hat{f}(n)=0$ $\forall n$ για το οποίο τα $(S^*)^p n$, $p\in\mathbb{N}$ είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Εστω τώρα οτι υπαρχουν πεπερασμενα διαφορετικα

Ισχυρισμοί: Αν $(S^*)^p n = n$ για κάποιο $n\in\mathbb{Z}$ για καποιο $p\geq 1$ τοτε πρεπει $n_2=n_3=\dots=n_d=0$.

Δοθεντος του ισχυρισμού για n τ.ω. $(S^*)^p n = n$ για κάποιο $p\geq 1$ εχουμε:

$$\hat{f}(S^* n) = e^{2\pi i a n_1}\hat{f}(n) \qquad \hat{f}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right] = e^{2\pi i a n_1}\hat{f}\begin{pmatrix} n_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{f}(n) = e^{2\pi i a n_1}\hat{f}(n)$, επειδη $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ εχουμε οτι $e^{2\pi i a n_1}\neq 1$ αν $n_1\neq 0$ και αρα πρεπει $\hat{f}(n)=0$. Αρα δειξαμε οτι $\hat{f}(n)=0$ $\forall n\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$ πλην του ισχυρισμού. Αυτο δειχνει οτι $f \overset{L^2}{=}$ σταθερά. Επεται οτι το συστημα ειναι εργοδικο $(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}(\mathbb{T}^d), \lambda_{\mathbb{T}}^d, S)$

Αποδειξη Ισχυρισμού: Εστω $n\in\mathbb{Z}^k$ για το οποιο $\exists p\in\mathbb{N}$ τ.ω. $(\tilde{S}_k^*)^p n = n$

$\boxed{\text{μαθημα 23} \quad 7/1/19}$

Λήμμα $(\tilde{S}_k)^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ p & 1 & & \\ \binom{p}{2} & p & 1 & \\ \binom{p}{3} & \binom{p}{2} & p & 1 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

αποδειξη Με επαγωγη στο $p\in\mathbb{N}$

Εναλλακτικά, εστω $M = \begin{pmatrix} 0 & & & 0\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}$ Τοτε $\tilde{S}_k = M + I_k$

$$(\tilde{S}_k)^p = (M+I_k)^p = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j} M^p$$