Αν $E_j \downarrow E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ έχουμε ομοίως $g_j \downarrow g$ και $h_j \downarrow h \Rightarrow g, h$ μετρήσιμες

Έχουμε $(\mu \times \nu)(E_j) = \int g_j \, d\mu = \int h_j \, d\nu \qquad 0 \le h_j, h \le \mu(X) < \infty$

$$\begin{array}{ccccc} (\mu\times\nu)(E_j) & = & \int g_j\,d\mu & = & \int h_j\,d\nu \\ \circledast \downarrow E_j \downarrow E & & \downarrow \text{ΘΚΣ} & & \downarrow \text{ΘΚΣ} \\ (\mu \times \nu)(E) & = & \int g \, d\mu & = & \int h \, d\nu \end{array}$$

και $\nu(Y) < \infty$

$\circledast$ $(\mu \times \nu)(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y) < \infty$

Θεώρημα Tonelli Έστω X, Y σ-πεπερασμένοι χώροι

$\boxed{\text{μαθημα } 13^{\circ} \; 20/11/18}$

Αν $f \in L(X \times Y)$, $f \geq 0$ τότε οι $g(x) = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$, $h(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ είναι μετρήσιμες και:

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X g \, d\mu = \int_Y h \, d\nu \quad \circledast$$

, δηλαδή:

$$\int f(x,y)\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

απόδειξη (α) $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Τότε:

$$\int \chi_E \, d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(E) \overset{\text{προηγούμενο θεώρημα}}{=} \int_X \nu(E_x)\, d\mu = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu$$

και $g(x) = \int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu(y) = \int_Y \chi_{E_x}(y)\, d\nu(y) = \nu(E_x)$

$$h(y) = \int_X \chi_{E^y}(x)\, d\mu(x) = \mu(E^y)$$

(β) Αν $\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}$ τότε ισχύει η $(\ast)$ για την φ από τη γραμμικότητα (ισχύουν $(w+u)_x = w_x + u_x$, $(w+u)^y = w^y + u^y$, $(aw)_x = aw_x$, $(aw)^y = aw^y$)

(γ) Έστω $f \in L(X, Y)$, $f \geq 0$. Υπάρχουν απλές μετρήσιμες φ_n: $0 \le \varphi_n \uparrow f$. Ορίζουμε $g_n(x) = \int \varphi_n(x,y)\, d\nu(y)$, $h_n(y) = \int \varphi_n(x,y)\, d\mu(x)$

Ξέρουμε ότι

$$\begin{array}{ccccc} \int_{X \times Y} \varphi_n \, d(\mu \times \nu) & = & \int_X g_n \, d\mu & = & \int_Y h_n \, d\nu \\ \downarrow & & \downarrow (1) & & \downarrow (2) \\ \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) & & \int_X g \, d\mu & & \int h \, d\nu \end{array}$$

$g_n(x) = \int \varphi_n(x,y)\,d\nu(y) \nearrow \int f(x,y)\,d\nu(y)$ (1) διότι $\varphi_n(x,y) \nearrow f(x,y)$

δηλαδή $(\varphi_n)_x \nearrow f_x$ και από ΘΜΣ $\int (\varphi_n)_x \to \int f_x$

Όμοια $\int h_n \nearrow \int h$ (2)

Παραδείγματα

1) $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu = \nu$ το μέτρο αρίθμησης.

$\lambda(A) = \# A =$ το πλήθος των σημείων του A.

Θεωρούμε τον $(X \times Y, \mu \times \nu)$ και ορίζουμε $f(m,n) = \begin{cases} 1, & m = n \\ -1, & m = n+1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} \underbrace{f(m,n)\,d\lambda(m)}_{=0} \right) d\lambda(n) = 0$$

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} \underbrace{f(m,n)}_{=0 \text{ αν } m \geq 2}\,d\lambda(n) \right) d\lambda(m) = \int_{\mathbb{N}} f(1,n)\,d\lambda(n) = 1$$

$\int |f|\,d(\mu \times \nu) = +\infty$ $\rightsquigarrow$ δηλ. f μη-ολοκληρώσιμη

2) $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mu = m$ το μέτρο Lebesgue

$\nu =$ το μέτρο αρίθμησης. Θεωρούμε το $D = \{(x,x) / 0 \leq x \leq 1\}$

Ρωτάμε αν ισχύει $(m \times \nu)(D) = \int \nu(D_x)\,dm = \int m(D^y)\,d\nu$

Το ν δεν είναι σ-πεπερασμένο (αν ήταν θα είχαμε $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

με $\nu(A_j) < \infty \Rightarrow \forall j$ A_j πεπερασμένο σύνολο. Άρα $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = [0,1]$

αριθμήσιμο άτοπο).

$\nu(D_x) = \nu(\{y \in [0,1] / (x,y) \in D\}) = \nu(\{x\}) = 1$ $\forall x \in [0,1]$

Άρα $\int_{[0,1]} \nu(D_x)\,dm = \int_{[0,1]} 1\,dm = 1$

$m(D^y) = m(\{y\}) = 0$ άρα $\int \underbrace{m(D^y)}_{=0}\,d\nu(y) = 0$

$(m \times \nu)(D) = \inf \{ \underbrace{\sum \pi(A_j \times B_j)}_{= \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)\nu(B_j)} / A_j, B_j \text{ Borel}, D \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \}$

Αν $D \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$ τότε $\exists j_0$ $m(A_{j_0}) > 0$ και $\nu(B_{j_0}) = +\infty$

Πράγματι $D \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \Rightarrow D \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B_j) \times (A_j \cap B_j)$

διότι αν $(x,x) \in A_j \times B_j \Rightarrow x \in A_j$ και $x \in B_j \Rightarrow x \in A_j \cap B_j \Rightarrow (x,x) \in (A_j \cap B_j) \times (A_j \cap B_j)$

και $\sum m(A_j \cap B_j) v(A_j \cap B_j) \leq \sum m(A_j) v(B_j)$

άρα $(m \times v)(D) = \inf\{ \sum m(E_j) v(E_j) \ / \ E_j \text{ Borel}, \ D \subseteq \bigcup E_j \times E_j \}$

Αν $D \subseteq \bigcup E_j \times E_j$ τότε $[0,1] = \bigcup E_j \Rightarrow \exists j_0 \ m(E_{j_0}) > 0$

αλλά τότε E_{j_0} = άπειρο σύνολο $\to v(E_{j_0}) = +\infty$ δηλ. $\sum m(E_j) v(E_j) = +\infty$

Τελικά $\underset{\infty}{\underset{\shortparallel}{(m \times v)(D)}} \neq \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\int v(D_x) d\mu}} \neq \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\int m(D^y) dv}}$

Θεώρημα Fubini

Έστω $f \in L^1(\mu \times v)$, μ, v σ-πεπερασμένα. Τότε οι $g(x) = \int_Y f(x,y) dv(y)$, $h(y) = \int_X f(x,y) d\mu(x)$ ανήκουν στον $L^1(v)$ και $L^1(\mu)$ αντίστοιχα.

και $\int f d(\mu \times v) = \int g d\mu = \int h dv$

δηλ. $\int_{X \times Y} f(x,y) d(\mu \times v) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) dv(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) dv(y)$

απόδειξη Γράφουμε $f = f^+ - f^-$. Ξέρουμε ότι $f^+, f^- \geq 0$, $\in L(X,Y)$

και $\int f^+ d(\mu \times v) < \infty$, $\int f^- d(\mu \times v) < \infty$.

Από Tonelli $\int f^+ d(\mu \times v) = \int g^+ d\mu = \int h^+ dv < \infty$

όπου $g^+(x) = \int f^+(x,y) dv(y)$, $h^+(y) = \int f^+(x,y) d\mu(x)$

Άρα οι g^+, h^+ είναι μετρήσιμες και $g^+(x) < \infty$, $h^+(y) < \infty$ σ.π.

Όμοια ορίζονται οι g^-, h^- είναι μετρήσιμες, πεπερασμένες σ.π. και

$\int f^- d(\mu \times v) = \int g^- d\mu = \int h^- dv$

Έχουμε $g^+ - g^-$ πεπερασμένη σ.π. και

$$\begin{array}{ccc} g(x) & = g^+(x) & - \ g^-(x) \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ \int f(x,y) dv(y) & & \\ \shortparallel & & \\ \int f_x dv & = \int (f^+)_x dv & - \int (f^-)_x dv \end{array}$$

γιατί $f_x = (f^+ - f^-)_x = f_x^+ - f_x^-$

και $\int g d\mu = \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f^+ d(\mu \times v) - \int f^- d(\mu \times v) = \int f d(\mu \times v)$

Όμοια $\int h dv = \int h^+ dv - \int h^- dv = \int f^+ d(\mu \times v) - \int f^- d(\mu \times v) = \int f d(\mu \times v)$

Σημείωση Μας δίνουν $f: X \times Y \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη. Εξετάζουμε αν $\int |f| d(\mu \times v) < \infty$ (αν αυτό ισχύει τότε η f είναι ολοκληρώσιμη)

Πλεονέκτημα από Tonelli $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times v) = \int_X \int_Y |f(x,y)| dv(y) d\mu(x)$

$= \int_Y \int_X |f(x,y)| d\mu(x) dv(y)$ (μπορεί ο ένας ή ο άλλος τρόπος να είναι πιο εύχρηστος)

Αν $\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\times\nu) < \infty$ τότε από Fubini μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu\right) d\nu$$

Το n-διάστατο μέτρο και ολοκλήρωμα Lebesgue

- Θεωρούμε το μέτρο Lebesgue m στο $\mathbb{R}$. ($\mathcal{L}$ = η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων $\subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}$)
- Παίρνουμε τη σ-άλγεβρα γινόμενο $\underbrace{\mathcal{B}\otimes \cdots \otimes \mathcal{B}}_{n\text{-φορές}}$ στον $\mathbb{R}^n$

Άσκηση $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}\otimes \cdots \otimes \mathcal{B}$

Θεωρούμε το μέτρο γινόμενο $m^n = \underbrace{m\times \cdots \times m}_{n\text{-φορές}}$ στην $\mathcal{B}\otimes \cdots \otimes \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ είναι η πλήρωση $\overline{m^n}$ του m^n

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{L}_n = \{E\cup F \mid E\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ F\subseteq N,\ N\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ και } m^n(N)=0\} \\ \overline{m^n}(E\cup F) = m^n(E) \end{array}\right]$$

Θα γράφουμε $\mathcal{L}$ και m (αντί για $\mathcal{L}_n$, $\overline{m^n}$) αν η διάσταση στην οποία δουλεύουμε είναι σαφής.

Παράδειγμα Το γινόμενο δύο πλήρων χώρων μέτρου δεν είναι (σχεδόν ποτέ) πλήρης χώρος μέτρου

Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ πλήρεις χώροι μέτρου. Υποθέτουμε ότι

(i) $\exists\, A\neq \emptyset$, $A\subseteq X$ τ.ω. $\mu(A)=0$

(ii) $\exists\, B\subseteq Y$, $B\notin \mathcal{N}$

Τότε ο $(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}, \mu\times\nu)$ δεν είναι πλήρης.

Θα ορίσουμε $F\notin \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, $F\subseteq N$, $N\in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ και $(\mu\times\nu)(N)=0$

Θεωρούμε το $F = A\times B$. Έχουμε $A\times B\notin \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ (αν $A\times B\in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ τότε $\pi_Y(A\times B)\in \mathcal{N}$ άτοπο) Επίσης $A\times B\subseteq \underbrace{A\times Y}_{\in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}$ και

$(\mu\times\nu)(A\times Y) = \underset{0}{\mu(A)}\,\nu(Y) = 0$

Θεώρημα 1 Έστω $E \in \mathcal{L}_n$

(α) $m(E) = \inf\{m(U) / U$ ανοικτό, $E \subseteq U\} = \sup\{m(K) / K$ συμπαγές, $K \subseteq E\}$

(β) $\exists$ G_δ-σύνολο G τ.ω. $G \supseteq E$ και $m(G \setminus E) = 0$

$\exists$ F_σ-σύνολο F τ.ω. $F \subseteq E$ και $m(E \setminus F) = 0$

(γ) Αν $m(E) < \infty$ τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχουν ορθογώνια $R_1, \dots, R_N$ (γινόμενα διαστημάτων) τ.ω. $m(E \triangle (R_1 \cup \dots \cup R_N)) < \varepsilon$ (με τις ακμές τους παράλληλες στους άξονες)

απόδειξη (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Γράφουμε $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}$

$E_2 \subseteq N$, $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $m(N) = 0$

- Υπάρχουν ορθογώνια A_j : $E_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ και $\sum m(A_j) < m(E_1) + \varepsilon$

Υπάρχουν ορθογώνια A_j' $E_2 \subseteq N \subseteq \bigcup A_j'$ και $\sum m(A_j') < \varepsilon$

Τότε $E \subseteq \left(\bigcup_j A_j\right) \cup \left(\bigcup_j A_j'\right)$ και $\sum m(A_j) + \sum m(A_j') < m(E_1) + 2\varepsilon < m(E) + \varepsilon$

$A_j = A_{j1} \times \cdots \times A_{jn}$, $A_{jk} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (απαιτώ $A_{jk} \subseteq U_{jk}$, U_{jk} ανοικτά

και $\underbrace{\prod_{k=1}^{n} m(U_{jk})}_{m(U_j)} < \underbrace{\prod_{k=1}^{n} m(A_{jk})}_{m(A_j)} + \frac{\varepsilon}{2^j}$)

Τότε $A_j = A_{j1} \times \cdots \times A_{jn} \subseteq U_{j1} \times \cdots \times U_{jn} := U_j$ ανοικτό.

Τελικά $E \subseteq \left(\bigcup_j U_j\right) \cup \left(\bigcup_j U_j'\right) := U$ ανοικτό και

$m(U) \leq \sum m(U_j) + \sum m(U_j') \leq \sum m(A_j) + \varepsilon + \sum m(A_j') + \varepsilon \leq m(E) + 4\varepsilon$

Η ιδιότητα των συμπαγών αποδεικνύεται παρόμοια με την περίπτωση $n=1$

(γ) Ξέρουμε ότι υπάρχουν ορθογώνια $U_j = U_{j1} \times \cdots \times U_{jn}$

U_{jk} ανοικτά $\subseteq \mathbb{R}$ τ.ω. $E \subseteq \bigcup_j U_j$ και $\sum_j m(U_j) < m(E) + \varepsilon$

μάθημα 14ο
22/11/18

Αν θεωρήσω το U_j μπορώ $\forall k$ να βρω ξένα διαστήματα

R_{ijks} πεπερασμένα το πλήθος ώστε $m(U_{jk} \triangle \bigcup R_{jks}) < \frac{\varepsilon}{2^j n}$

$\exists$ $R_{j1}, \dots, R_{jN_j}$ ορθογώνια με πλευρές διαστήματα

τ.ω. $m(U_j \triangle (R_{j1} \cup \dots \cup R_{jN_j})) < \frac{\varepsilon}{2^j n}$ Δηλ. υπάρχουν $\widetilde{R}_j$ πεπερασμένες

ενώσεις ξένων ορθογωνίων (με πλευρές διαστήματα) τ.ω. $m(U_j \triangle \widetilde{R}_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$

Επίσης υπάρχει $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=N+1}^{\infty} m(U_j) < \varepsilon$

Ορίζουμε $\widetilde{R} = \widetilde{R}_1 \cup \dots \cup \widetilde{R}_N$ · πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων.

και $m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \triangle \widetilde{R}\right) < 2\varepsilon$

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \setminus \tilde{R}\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{N} U_j \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{R}_j\right) + m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} U_j\right) \leq \sum_{j=1}^{N} m(U_j \setminus \tilde{R}_j) +$$

$$+ \sum_{j=N+1}^{\infty} m(U_j) < 2\varepsilon$$

$$m\left(\tilde{R} \setminus \bigcup_j U_j\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{R}_j \setminus \bigcup_{j=1}^{N} U_j\right) \leq \sum_{j=1}^{N} m(\tilde{R}_j \setminus U_j) < \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon$$

Θεώρημα 2 Έστω $f \in L^1(m)$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Τότε:

(i) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi$ απλή ολοκληρώσιμη : $\|f-\varphi\|_{L^1} := \int |f-\varphi| \, dm < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g$ συνεχής με συμπαγή φορέα : $\|f-g\|_{L^1} = \int |f-g| \, dm < \varepsilon$

<u>απόδειξη</u> (i) ισχύει γενικά

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για την χ_E, $E \in \mathcal{L}_n$, $m(E) < \infty$

Αν το κάνουμε τότε $\forall \varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$, $m(E_i) < \infty$ μπορούμε να

βρούμε $g = \sum_{i=1}^{N} a_i g_i$: $\|f-g\|_{L^1} \leq \sum_{i=1}^{N} |a_i| \underbrace{\|\chi_{E_i} - g_i\|}_{<\varepsilon/N} < \varepsilon$

Μετά αν μας δώσουν $f \in L^1(m)$ και $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε φ απλή τ.ω. $\|f-\varphi\|_{L^1} < \varepsilon/2$ και g συνεχή τ.ω. $\|\varphi - g\|_{L^1} < \varepsilon/2$

Για την χ_E: Βρίσκουμε μη επικαλυπτόμενα $R_1, \dots, R_N$
$m(E \triangle R_1 \cup \dots \cup R_N) < \varepsilon$

$$\int \left|\chi_E - \sum_{i=1}^{N} \chi_{R_i}\right| = \int \chi_{E \triangle (R_1 \cup \dots \cup R_N)}$$

Αν βρούμε συνεχή g_i με συμπαγή φορέα και $\int |\chi_{R_i} - g_i| < \varepsilon/N$

τότε $\int \left|\chi_E - \sum_{i=1}^{N} g_i\right| dm \leq \int \left|\chi_E - \sum \chi_{R_i}\right| + \sum_{i=1}^{N} \int |\chi_{R_i} - g_i| < 2\varepsilon$

Αρκεί λοιπόν να το δούμε για την χ_R όπου $R = I_1 \times \dots \times I_n$

$I_k = [a_k, b_k]$ $\exists g_k$ συνεχείς με φορέα το I_k τ.ω.:
$\int |g_k - \chi_{I_k}| < \varepsilon$. (Επιπλέον μπορώ να υποθέσω ότι $0 \leq g_k \leq 1$)

Ορίζουμε $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n)$

$$\int |g(x) - \chi_R(x)| = \int \left|\prod_{k=1}^{n} g_k(x_k) - \prod_{k=1}^{n} \chi_{I_k}(x_k)\right|$$

Με διαδοχικές προσθαφαιρέσεις, όπως στην περίπτωση $n=2$:

$$\int_{\mathbb{R}} |g_1(x_1) g_2(x_2) - \chi_{I_1}(x_1)\chi_{I_2}(x_2)| \leq \varphi$$

$$\leq \underbrace{|g_1(x_1)|}_{\leq 1} \int |g_2(x_2) - \chi_{I_2}(x_2)| + \underbrace{|\chi_{I_2}(x_2)|}_{\leq 1} \cdot \int |g_1(x_1) - \chi_{I_1}(x_1)| =$$

$$= m(I_1)\int_{I_2}\overbrace{|g_2-\chi_{I_2}|}^{<\varepsilon} + m(I_2)\int_{I_1}\overbrace{|g_1-\chi_{I_1}|}^{<\varepsilon} \le M\cdot\varepsilon$$

Θεώρημα 3 $\forall a\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε $T_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ με $T_a(x)=x+a$

(α) $\forall E\in\mathcal{L}_n$ ισχύει $m(T_a(E))=m(E)$

(β) Αν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη τότε η $f\circ T_a$ είναι Lebesgue μετρήσιμη και αν $f\geq 0$ ή $f\in L^1(m)$ τότε $\int f\,dm=\int f\circ T_a\,dm$

<u>απόδειξη</u> (α) Η T_a απεικονίζει Borel σύνολα σε Borel σύνολα. Επίσης αν $E=R$ ορθογώνιο, έχουμε $m(T_a(R))=m(R)$. Το ίδιο ισχύει για την άλγεβρα να παράγεται από τα ορθογώνια $\Rightarrow$ ισχύει για την $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Έστω $E\in\mathcal{L}_n$. Γράφουμε $E=\underset{\text{Borel}}{B}\cup\underset{m(N)=0}{N}$ ξένα $\Rightarrow T_a(E)=T_a(B)\cup T_a(N)\Rightarrow$

$$\Rightarrow m(T_a(E))=m(T_a(R))+m(T_a(N))=m(B)+0=m(E)$$

$\exists$ Gδ σύνολο $A\supseteq N$ με $m(A)=0$. Τότε $T_a(N)\subseteq T_a(A)$ και $m(T_a(A))=m(A)=0\Rightarrow m(T_a(N))=0$.

(β) Αν $B\subseteq\mathbb{R}$ Borel τότε $(f\circ T_a)^{-1}(B)=T_a^{-1}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{E\cup N})=$

Borel, μέτρου μηδέν, ξένα

$$=\underbrace{T_a^{-1}(E)}_{\text{Borel}}\cup \underbrace{T_a^{-1}(N)}_{T_{-a}(N)\ \text{μέτρου } 0}\in\mathcal{L}_n$$

Για την ισότητα των ολοκληρωμάτων αρκεί να δούμε ότι:

$\int\chi_E\,dm=\int\chi_E\circ T_a\,dm$

$\chi_E\circ T_a=1$ όταν $T_a(x)\in E\iff x+a\in E\iff x\in T_{-a}(E)$.

άρα $\int\chi_E\circ T_a\,d\mu=\int\chi_{T_{-a}(E)}\,d\mu=m(T_{-a}(E))=m(E)=\int\chi_E\,d\mu$

Θεώρημα 4 Αν $T\in GL_n$ (αντιστρέψιμος γρ. μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$) τότε:

(α) $\forall E\in\mathcal{L}_n$ έχουμε $T(E)\in\mathcal{L}_n$ και $m(T(E))=|\det T|\cdot m(E)$

(β) $\forall f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη και αν $f\geq 0$ ή $f\in L^1(m)$ η $f\circ T$ είναι μετρήσιμη και $\int f\,d\mu=|\det T|\int(f\circ T)\,dm$ ⊛

απόδειξη (α) Παίρνουμε $f = \chi_E$. Τότε $f\circ T = \chi_E \circ T = \chi_{T^{-1}(E)} \rightsquigarrow T^{-1}(E)$ μετρήσιμο
και $\int \chi_E \, dm = |\det T| \int \chi_{T^{-1}(E)} \, dm \Rightarrow m(E) = |\det T| \, m(T^{-1}(E)) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(T^{-1}(E)) = \frac{1}{|\det T|} m(E) = |\det(T^{-1})| \, m(E)$. Μετά βάζουμε στον

T^{-1} τον T.

(β) ① Αν η (*) ισχύει για τις $T, S \in GL_n$ τότε ισχύει και για την $T\circ S$.

$$\int (f\circ T\circ S) \, dm = \frac{1}{|\det S|} \int f\circ T \, dm = \frac{1}{|\det S|} \frac{1}{|\det T|} \int f \, dm =$$

$$= \frac{1}{|\det(T\circ S)|} \int f \, dm$$

② Θεωρούμε αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς τριών ειδών:

- $T_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, a x_j, \dots, x_n) \quad a \neq 0, \ |\det T_1| = |a|$
- $T_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_k + x_j, \dots, x_n) \quad |\det T_2| = 1$
- $T_3(x_1, \dots, x_n) \overset{j \neq k}{=} (x_1, \dots, \underset{j\text{-θέση}}{x_k}, \dots, \underset{k\text{-θέση}}{x_j}, \dots, x_n) \quad |\det T_3| = 1$

Γνωρίζουμε ότι κάθε $T \in GL_n$ γράφεται ως $T = S_N \circ S_{N-1} \circ \dots \circ S_1$
όπου κάθε S_j είναι της μορφής T_1 ή T_2 ή T_3.
Άρα αρκεί ν.δ.ο. $\int f \, dm = |\det T_i| \int f\circ T_i \, dm$, $i = 1, 2, 3$

$$T_1: \int f(T_1(x)) \, dm = \int f(x_1, \dots, a x_j, \dots, x_n) \, dm = \frac{1}{|a|} \int f(x_1, \dots, x_n) \, dm$$

$$\int f(x_1, \dots, a x_j, \dots, x_n) \, dm = \int \cdots \int \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, a x_j, \dots, x_n) \, dm(x_j) \right) dx_1 \, dx_2 \cdots$$

$$\int f(x_1, \dots x_n) \, dm = \int \cdots \int \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dm(x_j) \right) dx_1 \cdots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \cdots$$

άρα αρκεί να ισχύει στο $\mathbb{R}$ $\quad \int g(ax) \, dm = \frac{1}{|a|} \int g(x) \, dm$

Πόρισμα Αν $T^t T = I$ δηλ. ο T είναι ορθογώνιος, τότε
$m(T(E)) = m(E)$, δηλαδή το μέτρο Lebesgue είναι
αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Jordan μετρήσιμα Σύνολα

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$. $\forall k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το πλέγμα $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$ το οποίο επάγει μια κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με κύβους ακμής $\frac{1}{2^k}$ (μη επικαλυπτόμενα)

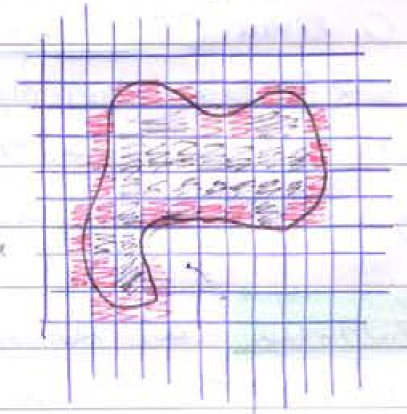
Ορίζουμε Q_k = η οικογένεια ~~των~~ αυτών κύβων

$\forall k$ ορίζουμε $\underset{\subseteq E}{\underline{A}(E,k)} = \bigcup \{ Q \in Q_k \,/\, Q \subseteq E \}$

τ μαύρα κουτάκια

$\underset{E \subseteq}{\bar{A}(E,k)} = \bigcup \{ Q \in Q_k \,/\, Q \cap E \neq \emptyset \}$

τ μαύρα και κόκκινα κουτάκια



Ορίζουμε $\underline{A}(E) = \bigcup \underline{A}(E,k)$, $\bar{A}(E) = \bigcap \bar{A}(E,k)$

και έχουμε $\underline{A}(E) \subseteq E \subseteq \bar{A}(E)$

Ορίζουμε $\underline{k}(E) = \lim\limits_{k \to \infty} m(\underline{A}(E,k)) = m(\underline{A}(E))$

και $\bar{k}(E) = \lim\limits_{k \to \infty} m(\bar{A}(E,k)) = m(\bar{A}(E))$ αν E φραγμένο

Το E λέγεται **Jordan μετρήσιμο** αν $\underline{k}(E) = \bar{k}(E)$ και το περιεχόμενο του E είναι ο $k(E) := \underline{k}(E) = \bar{k}(E)$

Αν $\underline{k}(E) = \bar{k}(E)$ και αν το E είναι φραγμένο τότε έχουμε:

$\underline{A}(E) \subseteq E \subseteq \bar{A}(E) \Rightarrow E$ Lebesgue μετρήσιμο και $m(E) = k(E)$

μετρήσιμα με το ίδιο μέτρο

Λήμμα Αν $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό τότε $U = \underline{A}(U)$. Ισοδύναμα το U γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση μη επικαλυπτόμενων κύβων.

απόδειξη Για το δεύτερο ισχυρισμό $U = \underline{A}(U) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \underline{A}(U,k) =$

$= \underline{A}(U,1) \cup \bigcup\limits_{k=2}^{\infty} (\underline{A}(U,k) \setminus \underline{A}(U,k-1))$ Ένωση μη επικαλυπτόμενων κύβων.

Για τον πρώτο ισχυρισμό: Έστω $x \in U$. Αφού το U είναι ανοιχτό, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq U$. Ας πάρουμε $k \in \mathbb{N}$. $\exists Q \in Q_k$ τ.ω. $x \in Q$.

Αν $y \in Q$ τότε $|y_i - x_i| \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \|y - x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2} \leq \frac{1}{2^k}\sqrt{n} < \delta$

αν το k είναι αρκετά μεγάλο. Άρα αν $2^k > \sqrt{n}/\delta$ έχουμε

$x \in \underset{\in Q_k}{Q} \subseteq B(x,\delta) \subseteq U$ άρα $x \in \underline{A}(U,k) \subseteq \underline{A}(U)$

Έστω $G=(g_1,\dots,g_n): \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^n$

Αν $g_i \in C^1$ ορίζουμε $D_x G = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$

μάθημα 15°
27/11/18

Η G είναι C^1-διαφορομορφισμός αν είναι 1-1 και $\forall x \in \Omega$ ο $D_x G$ είναι αντιστρέψιμος

Τότε η $G^{-1}: G(\Omega) \to \Omega$ είναι C^1-διαφορομορφισμός και $D_y G^{-1} = [D_{G^{-1}(y)} G]^{-1}$

Θεώρημα (α) Αν η $f: G(\Omega) \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη τότε η $f \circ G: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη και $\displaystyle\int_{G(\Omega)} f\, dm = \int_\Omega f\circ G |\det D_x G|\, dm$

(β) Αν $E \in \mathcal{L}_n$ τότε $m(G(E)) = \displaystyle\int_E |\det D_x G|\, dm$

απόδειξη (β) $\|x\| = \max\limits_{1\le j\le n} |x_j|$, $\underbrace{\|T\|}_{\substack{n\times n\\ \text{πίνακας}}} = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^n |T_{ij}|$. Τότε $\|Tx\| \le \|T\|\cdot\|x\|$

$$\left((Tx)_i = \sum_{j=1}^n T_{ij} x_j \Rightarrow |(Tx)_i| \le \sum_{j=1}^n |T_{ij}| \underbrace{|x_j|}_{\le \|x\|} \le \|T\|\cdot\|x\| \right)$$

① Έστω Q κύβος $Q = \{y \in \mathbb{R}^n / \|y-x\| \le h\}$, $h>0$

Αν $y \in Q$ τότε $g_i(y) - g_i(x) = \sum\limits_{j=1}^n (y_j - x_j) \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow |g_i(y) - g_i(x)| \le \|y-x\| \max\limits_{\xi\in Q} \|D_\xi G\| \le h \max\limits_{\xi \in Q} \|D_\xi G\|$

Άρα $G(Q) \subseteq$ στον κύβο με κέντρο το $G(x)$ και ακτίνα $h \max\limits_{\xi\in Q} \|D_\xi G\|$. Άρα $m(G(Q)) = m(Q)\left[\max\limits_{\xi\in Q} \|D_\xi(G)\|\right]^n$

② Αν $T \in GL_n$ τότε $m(G(Q)) \le |\det T| \max\limits_{\xi\in Q} \|T^{-1} D_\xi G\|]^n m(Q)$

[Γράφουμε $m(G(Q)) = m(T(T^{-1}\circ G)(G)) = |\det T|\, m(T^{-1}\circ G)(Q))$
$\le |\det T| \left[\max\limits_{\xi\in Q} \|T^{-1} D_\xi(G)\|\right]^n m(Q)$

③ Αφού η $y \mapsto D_y G$ είναι συνεχής ως προς y $\forall y$ και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω. αν $\|z-y\| < \delta$ τότε $\|(D_z G)^{-1} D_y G\|^n < 1+\varepsilon$

[$y \in Q$ / Q συμπαγής / μπορώ το δ να το πάρω το ίδιο για όλα τα $y \in Q$]
Χωρίζουμε τον κύβο Q σε υποκύβους μη επικαλυπτόμενους με ακμή $<\delta$
Έχουμε $m(G(Q)) \le \sum_j m(G(Q_j)) \le$

$$\le \sum_j |\det D_{x_j}G| \left[\max_{y \in Q_j} \|(D_xG)^{-1} D_y G\|\right]^n m(Q_j) \le (1+\varepsilon)\sum_j |\det D_xG| m(Q_j)$$

$$= (1+\varepsilon)\int_Q \sum_j |\det D_{x_j}G| \chi_{Q_j}) \, dm \xrightarrow{\delta \to 0} (1+\varepsilon)\int_Q |\det D_xG| \, dm$$

Για $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε $m(G(Q)) \le \int_Q |\det D_xG| \, dm$

Αν $U \subseteq \Omega$ ανοιχτό τότε μπορούμε να γράψουμε $U = \bigcup Q_n$, μη επικαλυπτόμενοι κύβοι (Λήμμα σελ 63) και τότε
$$m(G(U)) \le \sum_n m(GQ_n)) \le \sum_n \int_{Q_n} |\det D_xG| \, dm = \int_{\bigcup Q_n} |\det D_xG| \, dm$$

Παίρνουμε $M>0$ και ορίζουμε $\Omega_M = \{x \in \Omega \,/\, \|x\| \le M$ και $|\det D_xG| \le M\}$
Αν E είναι Borel $\subseteq \Omega_M$, υπάρχουν ανοικτά $U_j \subseteq \Omega_{M+1}$ τ.ω $U_j \downarrow E$. Τότε $m(G(E)) \le \lim_{j\to\infty} m(G(U_j)) \le$

$$\le \lim_{j\to\infty} \int_{U_j} |\det D_x G| \, dm \overset{\text{ΘΚΣ}}{=} \int_E |\det D_x G| \, dm$$

Για το τυχόν E γράφουμε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap \Omega_n$, $E \cap \Omega_n \nearrow E$

$$m(G(E)) \le \lim_n m(G(E\cap\Omega_n)) \le \lim_n \int_{E\cap\Omega_n} |\det D_x G| \, dm \le \int_E |\det D_xG| \, dm$$

Δείξαμε $m(G(E)) \le \int_E |\det D_xG| \, dm$ για $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (*)

Πάμε τώρα στο (α) και δείχνουμε την "$\le$" πρώτα για $f = \chi_E$, $E \subseteq G(\Omega)$.
$$\int_{G(\Omega)} \chi_E \, dm = m(E)$$

$$\int_\Omega \chi_E \circ G \, |\det D_xG| \, dm = \int_\Omega \chi_{G^{-1}(E)} |\det D_xG| \, dm$$

Γράφουμε $m(E) = m(G(G^{-1}(E)) \overset{(*)}{\le} \int_{G^{-1}(E)} |\det D_xG| \, dm =$

$= \int_{\Omega} \chi_{G^{-1}(E)} |\det D_x G| \, dm$. Μετά το περνάμε σε απλές και μετρήσιμες.

Τώρα δείχνουμε το άλλο μισό του (α): " $\geq$ "

$$\int_{\Omega = G^{-1}(G(\Omega))} f \circ G \, |\det D_x G| \, dm \leq \int_{G(\Omega)} (f \circ G) \circ G^{-1} \underbrace{|\det D_{G(x)} G| \, |\det D_x G^{-1}|}_{=1} =$$

$$= \int_{G(\Omega)} f \, dm$$

(β) " $\geq$ " απο το (α) για την χ_E. Μετά περνάμε στο $\mathcal{L}_n$ απο το $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ όπως συνήθως γράφονται $\mathcal{L}_n = \{E \cup F \, (E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \, F \subseteq N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \, m(N) = 0\}$

Ορισμοί

Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ λέγεται προσημασμένο μέτρο αν:

(α) $\nu(\phi) = 0$

(β) η ν παίρνει το πολύ μια από τις τιμές $-\infty, +\infty$

(γ) Αν $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{M}$ τότε $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$ και αν $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \in \mathbb{R}$ τότε $\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| < \infty$

Παραδείγματα

1) Έστω μ_1, μ_2 μέτρα στην $\mathcal{M}$ με το ένα από τα δύο πεπερασμένο. Τότε η $\nu = \mu_1 - \mu_2$ είναι προσημασμένο μέτρο

2) Έστω $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to [-\infty, +\infty]$ με $\int f^+ d\mu < \infty$ ή $\int f^- d\mu < \infty$. Ορίζουμε $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$. Η ν είναι προσημασμένο μέτρο.

$\rightsquigarrow$ Θα δούμε ότι ουσιαστικά αυτά είναι τα μόνα παραδείγματα προσημασμένων μέτρων.

Πρόταση (α) Αν $\{E_j\}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{M}$ και $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ τότε $\nu(E_j) \to \nu(E)$

(β) Αν $\{E_j\}$ φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{M}$ και $\nu(E_1) \in \mathbb{R}$ και αν $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ τότε $\nu(E_j) \to \nu(E)$

Ορισμός Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$

- Ένα σύνολο $E \in \mathcal{M}$ λέγεται ν-θετικό αν $\forall F \subseteq E$, $F \in \mathcal{M}$ ισχύει $\nu(F) \geq 0$
- Ένα σύνολο $E \in \mathcal{M}$ λέγεται ν-αρνητικό αν $\forall F \subseteq E$, $F \in \mathcal{M}$ ισχύει $\nu(F) \leq 0$
- Ένα σύνολο $E \in \mathcal{M}$ λέγεται ν-μηδενικό αν $\forall F \subseteq E$, $F \in \mathcal{M}$ ισχύει $\nu(F) = 0$

Άσκηση Στο παράδειγμα 2 ένα E είναι ν-θετικό ανν $f \geq 0$ μ-σ.π. στο E

Λήμμα (α) Αν το E είναι ν-θετικό και $F \subseteq E$, $F \in \mathcal{M}$ τότε το F είναι ν-θετικό

(β) Αν $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ν-θετικών συνόλων, τότε το $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ είναι ν-θετικό

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για ν-αρνητικά και ν-μηδενικά σύνολα.

Απόδειξη (β) Ορίζουμε $B_1 = E_1$, $B_n = E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j$, $\forall n \geq 2$

Τα B_n είναι ξένα και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Έστω $F \subseteq E$. Τότε

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap F) \overset{\text{ξένα}}{\Longrightarrow} \nu(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\nu(F \cap B_n)}_{\geq 0} \geq 0$$, διότι έχουμε $\forall n$:

$$F \cap B_n \subseteq F \cap E_n \subseteq E_n \overset{(\alpha)}{\Longrightarrow} \nu(F \cap B_n) \geq 0$$

Θεώρημα διάσπαση Hahn ενός προσημασμένου μέτρου

Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. $\exists\, P, N \in \mathcal{M}$ τ.ω.

$P \cup N = X$, $P \cap N = \emptyset$, το P είναι ν-θετικό, το N είναι ν-αρνητικό

Αν $X = P_1 \cup N_1$ είναι μια άλλη τέτοια διάσπαση τότε ισχύει

$\nu(P \triangle P_1) = 0$ και $\nu(N \triangle N_1) = 0$.

απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ν δεν παίρνει την τιμή $+\infty$.

Ορίζουμε $m = \sup\{\nu(E) \mid E \in \mathcal{M},\ \nu\text{-θετικό}\}$

Μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία ν-θετικών συνόλων P_j τ.ω.

$\nu(P_j) \to m$. Το σύνολο $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ είναι ν-θετικό και $\nu(P) = m$

[αυτό δείχνει και ότι $m < \infty$] $\nu(P_1 \cup \dots \cup P_n \cup P_{n+1}) = \nu(P_1 \cup \dots \cup P_n) + \underbrace{\nu(P_{n+1} \setminus P_1 \cup \dots \cup P_n)}_{\subseteq P_{n+1}\ \nu\text{-θετικό άρα} \geq 0}$

$\geq \nu(P_1 \cup \dots \cup P_n)$. Άρα $\nu(\bigcup_{k=1}^{n} P_k) \uparrow \nu(P)$

Μένει ν.δ.ο. το $N = X \setminus P$ είναι ν-αρνητικό.
Με απαγωγή σε άτοπο:
Παρατηρήσεις (i) Το N δεν μπορεί να περιέχει E ν-θετικό με $\nu(E) > 0$
[Θα ορίζαμε $P' = P \cup E$, το P' θα ήταν ν-θετικό και
$\nu(P') = \nu(P) + \nu(E) > \nu(P) = m$]
(ii) Αν $E \subseteq N$ και $\nu(E) > 0$ τότε υπάρχει $B \subseteq E$ με $\nu(B) > \nu(E)$
[γιατί υπάρχει $C \subseteq E$ με $\nu(C) < 0$ (αφού το E δεν μπορεί να είναι ν-θετικό) και τότε για το $B = E \setminus C$ έχουμε $\nu(B) = \nu(E) - \nu(C) > \nu(E)$]
Βρίσκουμε το μικρότερο φυσικό αριθμό $n_1 \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $E_1 \subseteq N$ με $\nu(E_1) \geq \frac{1}{n_1}$. Χρησιμοποιώντας το (ii)

βρίσκουμε το μικρότερο $n_2 \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $E_2 \subseteq E_1$ με $\nu(E_2) \geq \nu(E_1) + \frac{1}{n_2}$ και συνεχίζουμε έτσι.

Ορίζουμε $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$. Τότε, $\infty > \nu(E) = \lim_{j \to \infty} \nu(E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} > 0$

Έπεται ότι $n_j \to +\infty$. Κάνοντας το ίδιο επιχείρημα βρίσκουμε $B \subseteq E$ με $\nu(B) > \nu(E) + \frac{1}{n_0}$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$.
Αφού $n_j \to +\infty$ μπορούμε να βρούμε j: $n_j > n_0$ άρα
$B \subseteq E$ και $\nu(B) > \nu(E) + \frac{1}{n_0} \overset{*}{\geq} \nu(E_{j-1}) + \frac{1}{n_0}$ άτοπο γιατί θα

έπρεπε $n_0 \geq n_j$ από τον τρόπο ορισμού του n_j.
(*) $\nu(E_j) \uparrow \nu(E)$
"Μοναδικότητα" $X = P \cup N = P_1 \cup N_1$
$$\left.\begin{array}{ll} P \setminus P_1 \subseteq P \Rightarrow \nu(P \setminus P_1) \geq 0 & \text{διότι } P \text{ ν-θετικό} \\ P \setminus P_1 \subseteq N_1 \Rightarrow \nu(P \setminus P_1) \leq 0 & \text{διότι } N_1 \text{ ν-αρνητικό} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$\Rightarrow \nu(P \setminus P_1) = 0$ Όμοια $\nu(P_1 \setminus P) = 0$ άρα $\nu(P_1 \triangle P) = 0$
$$\nu(P_1 \triangle P) = \nu(N_1 \triangle N)$$

μάθημα 16°
29/11/18

Ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(r\theta)\, r^{n-1}\, dr\, d\sigma(\theta)$$

όπου $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, |x| = 1\}$

Κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ γράφεται $x = rx'$ όπου $r = |x|$ και $x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$

Ορίζουμε $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,\infty) \times S^{n-1}$ με $\Phi(x) = (r, x')$

Η αντίστροφη $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$

Ορίζουμε m_* στα Borel υποσύνολα του $(0,\infty) \times S^{n-1}$ με $m_*(E) = m(\Phi^{-1}(E))$. Ορίζουμε επίσης $\rho = \rho_n$ το μέτρο στην $\mathcal{B}((0,\infty))$ με $\rho(A) = \int_A r^{n-1}\, dm$

Θεώρημα (α) Υπάρχει μέτρο σ στην $\mathcal{B}(S^{n-1})$ τ.ω. $m_* = \rho \times \sigma$

(β) Για κάθε Borel μετρήσιμη f (≥ 0 ή στην $L^1(m)$)

$$\int f\, dm = \int f(\Phi^{-1}(r,x'))\, d(\rho\times\sigma) = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(rx')\, r^{n-1}\, dr\, d\sigma$$

απόδειξη (β) Αν έχουμε το (α) αρκεί να ελέγξουμε ότι για κάθε Borel $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\int \chi_E\, dm}_{= m(E)} = \int \chi_E \circ \Phi^{-1}\, d(\rho\times\sigma)$$

$$= \int \chi_{\Phi(E)}\, d(\rho\times\sigma) = (\rho\times\sigma)(\Phi(E)) = m_*(\Phi(E)) = m(\Phi^{-1}(\Phi(E))) = m(E)$$

(α) Θεωρούμε σύνολα της μορφής $E_a = \Phi^{-1}((0,a] \times E) = \{rx' \,/\, x' \in E,\ 0 < r \leq a\}$ (όπου E Borel $\subseteq S^{n-1}$ και $a > 0$)

Θα θέλαμε $m_*((0,1] \times E) = m(E_1)$ άρα $\sigma(E) = n \cdot m(E_1)$

$$\rho((0,1])\sigma(E) = \frac{1}{n}\sigma(E)$$

Πρώτα δείχνουμε ότι για σταθερό $E \in \mathcal{B}(S^{n-1})$ και κάθε $0 < a < b$ ισχύει

$$m_*((a,b] \times E) = (\rho\times\sigma)((a,b]\times E) = \sigma(E)\rho((a,b]) = \sigma(E)\int_a^b r^{n-1}\, dr = \sigma(E)\frac{b^n - a^n}{n}$$

Αν το δείξουμε, επειδή τα $(a,b]$ παράγουν την $\mathcal{B}((0,\infty))$ θα έχουμε για σταθερό E ισχύει $m_*(A\times E) = \rho(A)\sigma(E)$ $\forall A \in \mathcal{B}((0,\infty))$

Δηλ. $m_* = \rho\times\sigma$ στα ορθογώνια του $(0,\infty)\times S^{n-1}$ $\Rightarrow m_* = \rho\times\sigma$

Όμως $m_*((a,b]\times E) = m_*((0,b]\times E \setminus (0,a]\times E) =$

$= m_*((0,b]\times E) - m_*((0,a]\times E) = m(\Phi^{-1}((0,b]\times E)) - m(\Phi^{-1}((0,a]\times E))$
$= m(E_b) - m(E_a)$

$E_b = \{rx' / x' \in E,\ 0 < r \leq b\} = bE_1 \Rightarrow m(E_b) = m(bE_1) = b^n m(E_1)$

Άρα $m_*((a,b]\times E) = (b^n - a^n)\, m(E_1) = (b^n - a^n)\dfrac{\sigma(E)}{n}$

Ορισμός Λέμε ότι δύο προσημασμένα μέτρα μ και ν στον $(X, \mathcal{M})$ είναι αμοιβαία ιδιάζοντα και γράφουμε $\mu \perp \nu$ αν $\exists\, E, F \in \mathcal{M}$ τ.ω. $E \cup F = X$, $E \cap F = \phi$ και το E να είναι ν-μηδενικό και το F να είναι μ-μηδενικό.

Θεώρημα (διάσπαση Jordan)
Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Υπάρχουν δύο θετικά μέτρα ν^+ και ν^- τέτοια ώστε $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$

απόδειξη Από το Θ. Hahn υπάρχουν ν-θετικό P και ν-αρνητικό N τ.ω. $P \cup N = X$ και $P \cap N = \phi$. Ορίζουμε ν^+, ν^- στην $\mathcal{M}$ ως εξής:

$\nu^+(A) = \nu(A \cap P) \geq 0$

$\nu^-(A) = -\nu(A \cap N) \geq 0$

Τα ν^+ και ν^- είναι (θετικά) μέτρα και για κάθε $A \in \mathcal{M}$ έχουμε
$\nu(A) = \nu(A\cap P) + \nu(A \cap N) = \nu^+(A) - \nu^-(A)$. Άρα $\nu = \nu^+ - \nu^-$

Για να δείξουμε ότι $\nu^+ \perp \nu^-$ αρκεί ν.δ.ο. το N είναι ν^+-μηδενικό και το P είναι ν^--μηδενικό. Έστω $B \in \mathcal{M}$, $B \subseteq N$. Ζητάμε $\nu^+(B) = 0$. Έχουμε $\nu^+(B) = \nu(B \cap P) = \nu(\phi) = 0$
$\hookrightarrow B\cap P \subseteq N \cap P = \phi$

Όμοια, αν $A \subseteq P$ τότε $\nu^-(A) = -\nu(A \cap N) = -\nu(\phi) = 0$

Παρατήρηση Η διάσπαση Jordan είναι μοναδική. Δηλαδή, αν $\nu = \mu_1 - \mu_2$ με τα μ_1, μ_2 θετικά μέτρα, αμοιβαία ιδιάζοντα τότε $\mu_1 = \nu^+$ και $\mu_2 = \nu^-$.

απόδειξη Έχουμε $E \cup F = X$, $E \cap F = \phi$, F είναι μ_1-μηδενικό, E είναι μ_2-μηδενικό.

Έστω $B \subseteq F$. Τότε $\nu(B) = \overset{0}{\mu_1(B)} - \mu_2(B) \leq 0$ άρα F ν-αρνητικό. Όμοια το E είναι ν-θετικό. Άρα από τη μοναδικότητα στο Hahn έχω $\nu(F \triangle N) = 0$ και $\nu(E \triangle P) = 0$

Εστω $A \in \mathcal{M}$. Τοτε $\mu_1(A) = \mu_1(\overset{0}{A \cap F}) + \mu_1(A \cap E) = \mu_1(A \cap E) - \overset{0}{\mu_2(A \cap E)}$
$= \nu(A \cap E) \overset{\nu(E \cap P)=0}{=\!=} \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$. Αρα $\mu_1 = \nu^+$.
Ομοια $\mu_2 = \nu^-$.

Ορισμος Η <u>κύμανση</u> του ν είναι το θετικό μέτρο $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$
($\forall A \in \mathcal{M}$ ορίζουμε $|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A)$)

Ασκηση 1 Το $E \in \mathcal{M}$ είναι ν-μηδενικό $\Leftrightarrow |\nu|(E) = 0$

Ασκηση 2 Αν μ θετικο μετρο τοτε $\nu \perp \mu \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |\nu| \perp \mu \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \nu^+ \perp \mu$ και $\nu^- \perp \mu$

Ορισμός Εστω μ θετικό μέτρο, ν προσημασμενο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$
Λεμε οτι το ν είναι <u>απολυτως συνεχές</u> ως προς το μ και γράφουμε
$\nu \ll \mu$ αν $\forall A \in \mathcal{M}$ με $\mu(A) = 0$ εχουμε $\nu(A) = 0$

Παραδειγμα Εστω $f \in L^1(\mu)$. Αν ορίσουμε $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ τοτε το
ν είναι προσημασμένο μετρο και $\nu \ll \mu$.
(αν $\mu(E) = 0$ τοτε $\underbrace{\int_E f \, d\mu}_{=\nu(E)} = 0$)

Ασκηση 3 $\nu \ll \mu \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |\nu| \ll \mu \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \nu^+ \ll \mu$ και $\nu^- \ll \mu$

Ασκηση 4 Αν $\nu \perp \mu$ και $\nu \ll \mu$ τοτε $\nu \equiv 0$

Προταση Αν ν πεπερασμένο $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: αν $\mu(A) < \delta$ τοτε $|\nu(A)| < \varepsilon$
<u>αποδειξη</u> <u>παρατήρηση</u>: $|\nu(A)| = |\nu^+(A) - \nu^-(A)| \leq \nu^+(A) + \nu^-(A) = |\nu|(A)$
($\Leftarrow$) Εστω οτι $\mu(A) = 0$. Για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ βρίσκουμε δ_n τ.ω.
$\mu(E) < \delta_n \Rightarrow |\nu(E)| < \frac{1}{n}$. Τοτε $\forall n$ $\mu(A) = 0 < \delta_n \Rightarrow \forall n \; |\nu(A)| < \frac{1}{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \nu(A) = 0$.
($\Rightarrow$) Αν όχι, $\exists \varepsilon > 0$: $\forall n \; \exists A_n$: $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ με $|\nu(A_n)| \geq \varepsilon$.

αρα και $|\nu|(A_n) \geq \varepsilon$. Ορίζω $A = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow A$

Αφού $\sum \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A) = 0$.

Επίσης $|\nu|(A) = \lim |\nu|(B_n) \geq \limsup |\nu|(A_n) \geq \limsup |\nu(A_n)| \geq \varepsilon$

άτοπο διότι από άσκηση 3 $\nu \ll \mu \Rightarrow |\nu| \ll \mu$.

μάθημα 17°
3/12/18

<u>απόδειξη άσκησης 1</u>

($\Rightarrow$) Έστω E ν-μηδενικό $|\nu|(E) = \nu(\underbrace{E\cap P}_{\subseteq E}) - \nu(\underbrace{E\cap N}_{\subseteq E}) =$

$\overset{E\ \nu\text{-μηδ}}{=} 0 - 0 = 0$

($\Leftarrow$) Έστω $F \subseteq E$, $F \in \mathcal{M}$. $|\nu(F)| = |\nu^+(F) - \nu^-(F)| \leq$

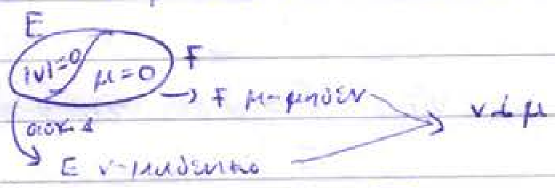
$\leq \nu^+(F) + \nu^-(F) = |\nu|(F) \leq |\nu|(E) = 0$

<u>απόδειξη άσκησης 2</u>

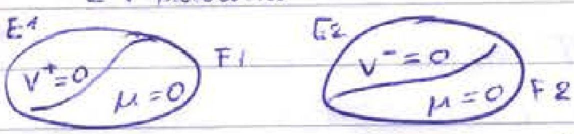
$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ Το E είναι ν-μηδενικό $\Rightarrow |\nu|(E) = 0 \Rightarrow \forall F \subseteq E \ |\nu|(F) = 0$

άρα E $|\nu|$-μηδενικό. Και το F είναι μ-μηδενικό άρα $|\nu| \perp \mu$

$\overset{(1)}{\Leftarrow}$

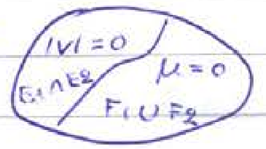


$\overset{(2)}{\Leftarrow}$



$E = E_1 \cap E_2 \Rightarrow E^c = E_1^c \cup E_2^c = F_1 \cup F_2$

• ν^+, ν^- μηδενικά στο E $\Rightarrow |\nu| = \nu^+ + \nu^-$ μηδενικά στο E



• $\mu(F_1) = \mu(F_2) = 0 \Rightarrow \mu(F_1 \cup F_2) = 0$

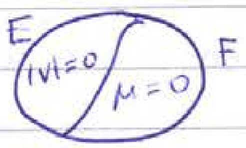
<u>απόδειξη άσκησης 3</u>

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ Έστω $A \in \mathcal{M}$ με $\mu(A) = 0$ Τότε A ν-μηδενικό $\overset{\text{ασκ 1}}{\Longrightarrow}$ A $|\nu|$-μηδενικό $|\nu|(A) = 0$

$\overset{(2)}{\Leftarrow}$ Έστω $A \in \mathcal{M}$ με $\mu(A) = 0$ Τότε $|\nu|(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

<u>απόδειξη άσκησης 4</u>

Έχουμε $|\nu| \perp \mu$ και $|\nu| \ll \mu$



$\forall A \in \mathcal{M} \quad |\nu|(A) = |\nu|(\underbrace{A \cap E}_{\subseteq E}) + |\nu|(\underbrace{A \cap F}_{\subseteq F}) = 0 + 0 = 0$

$\hookrightarrow \mu(A \cap F) = 0$

Θεώρημα (Lebesgue-Radon-Nikodym)

Έστω ν ένα σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και μ σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Υπάρχουν μοναδικά σ-πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα λ, ρ στον $(X, \mathcal{M})$ τ.ω. $\lambda \perp \mu$, $\rho \ll \mu$ και $\nu = \lambda + \rho$

επίσης υπάρχει μ-extended-ολοκληρώσιμη f τ.ω. $\forall A \in \mathcal{M}$

$\rho(A) = \int_A f \, d\mu$ [όπου f μ-extended-ολοκληρώσιμη αν τουλάχιστον

ένα από τα $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ είναι πεπερασμένο] και η f ορίζεται

σπ-μονοσήμαντα.

Λήμμα Έστω μ, ν πεπερασμένα θετικά μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$. Τότε είτε $\mu \perp \nu$ είτε υπάρχουν $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) > 0$ και $\varepsilon > 0$ τ.ω. το E να είναι $(\nu - \varepsilon\mu)$-θετικό [δηλ. $\forall F \subseteq E$ $\nu(F) \geq \varepsilon \mu(F)$]

απόδειξη $\forall n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ και το $\nu - \frac{1}{n}\mu$

Από Hahn $\exists P_n, N_n \in \mathcal{M}$ τ.ω. $P_n \cup N_n = X$, $P_n \cap N_n = \emptyset$,

P_n: $\nu - \frac{1}{n}\mu$ θετικό, N_n: $\nu - \frac{1}{n}\mu$ αρνητικό

1η περίπτωση Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\mu(P_{n_0}) > 0$. Παίρνουμε $E = P_{n_0}$ και $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$ και έχουμε $\mu(E) > 0$, E $(\nu - \varepsilon\mu)$-θετικό.

2η περίπτωση $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu(P_n) = 0$. Ορίζουμε $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$

$N = P^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$

(α) $\forall n$ $\mu(P_n) = 0$ Άρα $\mu(P) = \mu(\bigcup P_n) \leq \sum \underbrace{\mu(P_n)}_{=0} = 0$

$\forall n$ έχουμε $\nu(N) \leq \nu(N_n) \leq \frac{1}{n}\mu(N_n) \leq \frac{1}{n}\underbrace{\mu(X)}_{<\infty} \to 0$

απόδειξη θεωρήματος

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι τα μ, ν είναι πεπερασμένα θετικά μέτρα. Ορίζουμε $\mathcal{F} = \{ f : X \to \mathbb{R}^+ \text{ τ.ω. } \forall E \in \mathcal{M} \ \int_E f \, d\mu \leq \nu(E) \}$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$ Η $f \equiv 0$ είναι στην $\mathcal{F}$.

Ορίζουμε $A = \sup \{ \int_X f \, d\mu \mid f \in \mathcal{F} \}$

<u>Ισχυρισμός</u> $\exists f \in \mathcal{F}$ τ.ω. $\int_X f \, d\mu = A$

<u>απόδειξη</u> Βρίσκαμε $f_n \in \mathcal{F}$ τ.ω. $\int_X f_n \, d\mu \to A$

Ορίζουμε $g_n = \max\{f_1, \dots, f_n\}$. Ισχύει ότι αν $f, g \in \mathcal{F}$ τότε $\max\{f, g\} =: h \in \mathcal{F}$. Έστω $E \in \mathcal{M}$. Τότε $\int_E h \, d\mu = \int_{E \cap \{f<g\}} h \, d\mu +$

$$+ \int_{E \cap \{f \geq g\}} h \, d\mu = \int_{E \cap \{f<g\}} g \, d\mu + \int_{E \cap \{f \geq g\}} f \, d\mu \overset{f,g \in \mathcal{F}}{\leq} \nu(E \cap \{f<g\}) +$$
$$+ \nu(E \cap \{f \geq g\}) = \nu(E)$$

Επαγωγικά, $g_n = \max\{f_1, \dots, f_n\} \in \mathcal{F}$. Τώρα η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα $\Rightarrow g_n \uparrow f$, $f: X \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη. Από ΘΜΣ έχουμε

(i) $\forall E \in \mathcal{M}$ $\int_E f \, d\mu = \lim \int_E g_n \, d\mu \leq \nu(E)$ δηλ. $f \in \mathcal{F} \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq A$

(ii) $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$ και $g_n \geq f_n \Rightarrow \int_X g_n \, d\mu \geq \int_X f_n \, d\mu \xRightarrow{\text{εφαρμ. lim}}$

$\Rightarrow \int_X f \, d\mu \geq A$ και τελικά $\int_X f \, d\mu = A$

Ορίζουμε $\rho(A) = \int_A f \, d\mu$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, $\rho \ll \mu$

(αν $\mu(A) = 0$ τότε ξέρουμε ότι $\int_A f \, d\mu = 0$)

Θέτουμε $\lambda = \nu - \rho \geq 0$ και μένει ν.δ.ο. $\lambda \perp \mu$. Έστω ότι δεν ισχύει.
Υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) > 0$ και $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $\lambda(F) \geq \varepsilon \mu(F)$ $\forall F \subseteq E$.
Θεωρούμε την $g = f + \varepsilon \chi_E$. Δείχνουμε ότι $g \in \mathcal{F}$. Μετά έχουμε άτοπο γιατί $\int_X g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \varepsilon \mu(E) = A + \varepsilon \mu(E) > A$.

Έχουμε $g \in \mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $C \in \mathcal{M}$. Ζητάμε $\int_C (f + \varepsilon \chi_E) \, d\mu \leq \nu(C)$

Έχουμε $\int_C (f + \varepsilon \chi_E) \, d\mu = \int_C f \, d\mu + \underbrace{\varepsilon \mu(E \cap C)}_{\subseteq E \text{ άρα } \varepsilon\mu < \lambda} \leq \int_C f \, d\mu + \lambda(E \cap C) =$

$$= \rho(C) + \lambda(E \cap C) \overset{\lambda \geq 0}{\leq} \rho(C) + \lambda(C) = \nu(C)$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι μ, ν σ-πεπερασμένα θετικά μέτρα.
Υπάρχουν $B_j, C_i \in \mathcal{M}$, B_j ξένα με $\mu(B_j) < \infty$, C_i ξένα με $\nu(C_i) < \infty$ $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \xRightarrow{A_{ij} = B_j \cap C_i} \exists A_k \in \mathcal{M}$ ξένα με $\mu(A_k) < \infty$

και $\nu(A_k) < \infty$ $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Ορίζουμε $\mu_k(E) = \mu(E \cap A_k)$, $\nu_k(E) = \nu(E \cap A_k)$
$E \in \mathcal{M}$. Τα μ_k, ν_k είναι πεπερασμένα και εφαρμόζεται το (α).
Άρα $\forall k$ $\nu_k = \lambda_k + \rho_k$, $\lambda_k \perp \mu_k$, $\rho_k \ll \mu_k$. Ορίζουμε $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$
$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k$. Ισχύει $\lambda + \rho = \nu$. Έστω $E \in \mathcal{M}$

$$\text{Τότε } \nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\nu(E \cap A_k)}_{\nu_k(E)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(E)}_{\lambda(E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(E)}_{\rho(E)}$$

Τέλος $\lambda \perp \mu$ και $\rho \ll \mu$. Πράγματι, $\rho_k \ll \mu_k$ και $\mu_k \ll \mu \Rightarrow \rho_k \ll \mu$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \ll \mu$ άρα $\rho \ll \mu$. Και $\lambda_k \perp \mu_k$. $\exists U_k, V_k$:

$U_k \cup V_k = A_k$, $U_k \cap V_k = \emptyset$, $\lambda_k(U_k) = 0$, $\mu_k(V_k) = 0$
Ορίζουμε $U = \bigcup_k U_k$, $V = \bigcup_k V_k$. Τότε $U \cap V = \emptyset$ και $U \cup V = X$

$$\text{Έχουμε } \lambda(U) = \lambda\Big(\bigcup_k U_k\Big) \xlongequal{A_k \text{ ξένα} \Rightarrow U_k \text{ ξένα}} \sum_k \lambda(U_k) \overset{U_k \subseteq A_k}{=} \sum_k \lambda(U_k \cap A_k) = \sum_k \underbrace{\lambda_k(U_k)}_{=0} = 0$$

και όμοια $\mu(V) = \sum_k \mu_k(V_k) = 0$. Άρα $\lambda \perp \mu$.

(γ) ν προσημασμένο σ-πεπερασμένο, μ - σ πεπερασμένο.
Γράφουμε $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Τα ν^+, ν^- είναι σ-πεπερασμένα, θετικά.
Υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$ τ.ω. $\lambda_i \perp \mu$, $\rho_i \ll \mu$, $\nu^+ = \lambda_1 + \rho_1$, $\nu^- = \lambda_2 + \rho_2$
Αν $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\rho = \rho_1 - \rho_2$ έχουμε $\nu = \lambda + \rho$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 \perp \mu \\ \lambda_2 \perp \mu\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \perp \mu \qquad \left.\begin{array}{l}\rho_1 \ll \mu \\ \rho_2 \ll \mu\end{array}\right\} \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 \ll \mu$$

μάθημα 18°
4/12/18

<u>Μοναδικότητα</u> Υποθέτουμε πρώτα ότι ν, μ θετικά και πεπερασμένα
Έστω ότι $\forall E \in \mathcal{M}$ (*) $\nu(E) = \lambda(E) + \int_E f\,d\mu = \lambda_1(E) + \int_E f_1\,d\mu$, $\lambda, \lambda_1 \perp \mu$

$\Rightarrow (\lambda - \lambda_1)(E) = \int_E (f_1 - f)\,d\mu \Rightarrow \lambda - \lambda_1 \ll \mu$ όμως $\lambda, \lambda_1 \perp \mu \Rightarrow \lambda - \lambda_1 \perp \mu$
$\Rightarrow \lambda - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda$

απο την (*) $\forall E \int_E f\, d\mu = \int_E f_1\, d\mu \Rightarrow f = f_1$ μ-σ.π

Θεωρημα (Radon-Nikodym)
Εστω ν σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και μ σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Αν $\nu \ll \mu$ τότε υπάρχει μοναδική f μ-ολοκληρώσιμη τ.ω. $\forall E \in \mathcal{M}$ $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$. Η $\frac{d\nu}{d\mu} := f$ ονομάζεται Radon-Nikodym παράγωγος του ν ως προς μ.
αποδειξη $\exists \lambda, f : \nu(E) = \lambda(E) + \int_E f\, d\mu$, $\lambda \perp \mu$

Εστω $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) = 0 \overset{\nu \ll \mu}{\Longrightarrow} \nu(E) = 0$ και $\int_E f d\mu = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$

Δηλ. $\lambda \ll \mu$ Ομως $\lambda \perp \mu$ άρα $\lambda \equiv 0$

Προταση Εστω ν σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και μ, λ σ-πεπερασμένα θετικά μέτρα ωστε $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \lambda$ στον $(X, \mathcal{M})$.
(α) Αν $g \in L^1(\nu)$ τοτε $g \frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ και $\int g\, d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$

οπου $L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$
(β) $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}$ σ.π

αποδειξη (α) Υποθέτουμε οτι το ν είναι θετικό
• Παίρνουμε αρχικά $g = \chi_E$, $E \in \mathcal{M}$.
$\int \chi_E\, d\nu = \nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \int \chi_E \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$

• Το ίδιο ισχυει για απλές και με το ΘΜΣ για μη αρνητικές μετρήσιμες
• Τέλος παίρνουμε $g = g^+ - g^-$ και άρα ισχύει για $g \in L^1(\nu)$
Για τη γενική περίπτωση, γράφουμε $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \forall g \in L^1(\nu) : \int g\, d\nu^+ &= \int g \frac{d\nu^+}{d\mu}\, d\mu \\ \int g\, d\nu^- &= \int g \frac{d\nu^-}{d\mu}\, d\mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int g\, d\nu = \int g \left(\frac{d\nu^+}{d\mu} - \frac{d\nu^-}{d\mu}\right) d\mu$$

$\nu^+(A) = \int_A \frac{d\nu^+}{d\mu}\, d\mu$, $\nu^-(A) = \int_A \frac{d\nu^-}{d\mu}\, d\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu(A) = \int \left(\frac{d\nu^+}{d\mu} - \frac{d\nu^-}{d\mu}\right) d\mu$ άρα $\frac{d\nu^+}{d\mu} - \frac{d\nu^-}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu}$

(β) Θέλουμε $\underbrace{\frac{d\nu}{d\lambda}}_{f} = \underbrace{\frac{d\nu}{d\mu}}_{g} \cdot \underbrace{\frac{d\mu}{d\lambda}}_{h}$

δηλ. $\forall A \in \mathcal{M}$ $\nu(A) = \int_A g h \, d\lambda$. Γράφουμε $\int_A g h \, d\lambda = \int (\chi_A g) h \, d\lambda \overset{(a)}{=}$

$= \int \chi_A g \, d\mu \overset{(a)}{=} \int \chi_A \, d\nu = \nu(A)$.

Παραδείγματα

1) $\mu = m$ στο $(0,1)$ $\nu(A) = \int_A \frac{1}{x} dm(x)$. Δεν είναι πεπερασμένο. Έχουμε

όμως $\nu \ll m$ [Αν $m(A) = 0$ τότε $\int_A \frac{1}{x} dm(x) = 0$]

Έστω $\varepsilon = 1$. Για οποιοδήποτε $\delta \in (0,1)$ έχουμε $\int_{(0,\frac{\delta}{2})} \frac{1}{x} dm(x) = +\infty$

και $m((0,\frac{\delta}{2})) < \delta$ (αντιπαράδειγμα για την πρόταση στη σελ 71)

2) $X = \mathbb{N}$ $\nu =$ το μέτρο αρίθμησης, $\mu(E) = \sum_{n \in E} \frac{1}{2^n}$ (δηλ $\mu(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$)

Εδώ $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$ γιατί $\mu(E) = 0$ ή $\nu(E) = 0 \Rightarrow E = \emptyset$.

Το μ είναι πεπερασμένο και το ν είναι άπειρο.

Η "$\Rightarrow$" της πρότασης σελ 71 δεν ισχύει. Παίρνω $\varepsilon > 0$ και δείχνω ότι $\forall \delta > 0$ $\exists E$ με

$\mu(E) < \delta$ και $\nu(E) > \varepsilon$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \delta$

Ορίζουμε $E = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ Τότε $\mu(E) < \delta$ και $\nu(E) = +\infty$

3) $X = [0,1]$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}([0,1])$. m το μέτρο Lebesgue, μ το μέτρο αρίθμησης, $\mu(\{x\}) = 1$. Δεν είναι σ-πεπερασμένο. [τα σύνολα πεπερασμένου μέτρου μ είναι πεπερασμένα. Αν το μ ήταν σ-πεπερασμένο τότε το $[0,1]$ θα ήταν αριθμήσιμο] Έχουμε $m \ll \mu$ [αν $\mu(E) = 0$ $\Rightarrow E = \emptyset \Rightarrow m(E) = 0$] Το m δεν έχει Radon-Nikodym παράγωγο ως προς το μ. Θα υπήρχε $f \in L^1(\mu)$ $\forall E \in \mathcal{M}$ $m(E) = \int_E f \, d\mu$

Τότε $\underset{0}{m(\{x\})} = \int_{\{x\}} f \, d\mu = f(x)$. Άρα $f \equiv 0 \Rightarrow m(E) = 0$ $\forall E \in \mathcal{M}$

Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

$\nu \ll m$, $m =$ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nu(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} f \, dm \quad , \text{όπου } f = \frac{d\nu}{dm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu(B(x,r))}{m(B(x,r))} = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, dm$$

Αν υπάρχει το όριο καθώς το $r \to 0^+$:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\nu(B(x,r))}{m(B(x,r))} = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x)$$

Ορισμός f τοπικά ολοκληρώσιμη ($f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) αν για κάθε φραγμένο μετρήσιμο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ $\int_K |f(y)|\, dy < \infty$

Θεώρημα Αν $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ τότε:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x) \quad m\text{-σ.π.} \quad (*)$$

απόδειξη

Παρατήρηση Αν η f είναι συνεχής, τότε η $(*)$ ισχύει $\forall x$.
Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: αν $|y-x| < \delta$ τότε $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
Παίρνουμε $0 < r < \delta$ και γράφουμε $\left| \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy - f(x) \right| =$

$$= \left| \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x))\, dy \right| \leq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{<\varepsilon}\, dy < \varepsilon$$

Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε g συνεχή τ.ω. $\int |f - g|\, dm < \varepsilon$.

Γράφουμε $\left| \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy - f(x) \right| := \left| ⨍_{B(x,r)} f(y)\, dy - f(x) \right| \leq$

$$\leq \underbrace{\left| ⨍_{B(x,r)} (f(y) - g(y))\, dy \right|}_{A(r)} + \underbrace{\left| ⨍_{B(x,r)} g(y)\, dy - g(x) \right|}_{B(r)} + \underbrace{|g(x) - f(x)|}_{\Gamma}$$

$$(*) \left| ⨍_{B(x,r)} (f(y) - g(y))\, dy \right| \leq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - g(y)|\, dy \leq$$

$\leq \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-g(y)|\,dy = \mathcal{M}_{f-g}(x)$ Άρα $A(r) \leq \mathcal{M}_{f-g}(x)$

Ορισμός Αν $h \in L^1_{loc}$ τότε η μεγιστική συνάρτηση της h είναι η
$\mathcal{M}_h(x) = \sup_{r>0} ⨍_{B(x,r)} |h(y)|\,dy$

Ορισμός $\limsup_{r\to 0} \left| ⨍_{B(x,r)} g(y)\,dy - g(x)\right| = \lim_{r \to 0} \left(\sup_{0<\delta<r} \left| ⨍_{B(x,r)} g(y)\,dy - g(x)\right| \right)$

Έχουμε $\limsup_{r\to 0} \left| ⨍_{B(x,r)} f(y)\,dy - f(x)\right| \leq \limsup_{r\to 0} A(r) + \limsup_{r\to 0} B(r) + \Gamma$ → 0 από παρατήρηση διότι g συνεχής

Έστω $\eta > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $A_\eta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \limsup_{r \to 0^+} \left| ⨍_{B(x,r)} f(y)\,dy - f(x) \right| \geq \eta \right\}$

Αν δείξουμε ότι $m(A_\eta) = 0 \ \forall \eta > 0$ τότε $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n} \right) = 0$

και $\forall x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$ θα έχουμε $\limsup_{r\to 0^+} \left| ⨍_{B(x,r)} f(y)\,dy - f(x)\right| < \frac{1}{n} \ \forall n$

Ορίζουμε $B_{\eta,g} = \{ x \in \mathbb{R}^n / \mathcal{M}_{f-g}(x) \geq \frac{\eta}{2} \}$ και $\Gamma_{\eta,g} = \{ x \in \mathbb{R}^n / |f(x) - g(x)| \geq \frac{\eta}{2} \}$
άρα είναι 0 ~ $⨍_{B(x,r)} f(y)\,dy \xrightarrow{r \to 0} f(x)$

Έχουμε $A_\eta \subseteq B_{\eta,g} \cup \Gamma_{\eta,g} \Rightarrow m(A_\eta) \leq m(B_{\eta,g}) + m(\Gamma_{\eta,g})$

Πρώτη ανισότητα: $m(\Gamma_{\eta,g}) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{2}{\eta} \int |f-g|\,dm$

Δεύτερη ανισότητα $m(B_{\eta,g}) = m(\mathcal{M}_{f-g} \geq \eta) \leq \frac{C_n}{\eta} \int |f-g|\,dm$

που μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό για σταθερό η με κατάλληλη επιλογή της g

Ανισότητα των Hardy-Littlewood

Εστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ Θεωρούμε την $M_f(x) = \sup\limits_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$

Τότε $\forall a>0$, $m(\{x \in \mathbb{R}^n / M_f(x) > a\}) \le \frac{3^n}{a} \|f\|_1$

Παρατηρηση Η M_f δεν είναι "ποτέ" ολοκληρώσιμη.

Λημμα καλυψης (Vitali)

Εστω E μετρήσιμο $\subseteq \mathbb{R}^n$, και $E \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} B_i$, B_i - ανοιχτές μπάλες.

Αν $\gamma < m(E)$ τότε $\exists\, i_1, \dots, i_N \in I$ τ.ω. οι $B_{i_1}, \dots, B_{i_N}$ να είναι ξένες ανά δύο και $m(B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_N}) \geq \frac{1}{3^n} \gamma$

αποδειξη ανισοτητας Hardy-Littlewood

Εστω $x \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $M_f(x) > a$ Από τον ορισμό της M_f $\exists\, r_x > 0$ ωστε $\frac{1}{m(B(x,r_x))} \int |f(y)|dy > a$ Αρα $A = \{x / M_f(x) > a,\ |x| < k\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} B(x, r_x)$

από το λήμμα του Vitali υπάρχουν $x_1, \dots, x_N \in A$ τ.ω. οι $\underbrace{B(x_1, r_{x_1})}_{:=B_1}, \dots, \underbrace{B(x_N, r_{x_N})}_{:=B_N}$ να είναι ξένες και $m(B_1 \cup \dots \cup B_N) \geq \tau m(A)$

Από $m(A) \le \frac{1}{\tau} \sum\limits_{i=1}^{N} m(B(x_i, r_{x_i})) \le \frac{1}{\tau} \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{a} \int_{\underbrace{B(x_i, r_{x_i})}_{\text{ξενες}}} |f(y)|dy =$

$= \frac{1}{\tau a} \int_{\bigcup B(x_i, r_{x_i})} |f| \le \frac{1}{\tau a} \int_{\mathbb{R}^n} |f|$

αποδειξη λημματος καλυψης (Vitali)

$\boxed{\text{μαθημα 19} \quad 6/12/18}$

Βρισκουμε πρωτα $K \subseteq E$, K συμπαγες με $m(K) > \gamma$

Τοτε $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists\, J \subseteq I$ πεπερασμένο $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} B_i$

Επιλεγουμε $i_1 \in J$ τ.ω. η B_{i_1} να εχει τη μεγαλυτερη δυνατη ακτινα. Μετα επιλεγουμε απο αυτες τις B_i, $i \in J$ για τις οποιες $B_i \cap B_{i_1} = \emptyset$ μια που να εχει τη μεγαλυτερη δυνατη

ακτίνα. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και η διαδικασία τελειώνει γιατί J = πεπερασμένο σε κάποια N βήματα. Αν B_i είναι οποιαδήποτε από τις μπάλες $B_i, i \in J$ $\exists k$ (το ελάχιστο δυνατό) τ.ω. $B_i \cap B_{i_k} \neq \emptyset$
Τότε $B_i \cap B_{i_s} = \emptyset$ $\forall s < k$. Άρα η ακτίνα της B_i είναι μικρότερη ή ίση από την ακτίνα της B_{i_k}. Θεωρούμε την $B_{i_k}^*$ που είναι η μπάλα που έχει το ίδιο κέντρο με την B_{i_k} και τριπλάσια ακτίνα.
Αφού $B_i \cap B_{i_k} \neq \emptyset$ και $r(B_i) \leq r(B_{i_k})$ από τριγωνική ανισότητα $B_i \subseteq B_{i_k}^*$. Άρα $K \subseteq \bigcup_{i \in J} B_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B_{i_k}^* \Rightarrow \gamma < m(K) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_{i_k}^*\right) \leq$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} m(B_{i_k}^*) = 3^n \sum_{k=1}^{N} m(B_{i_k})$$

Έστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε $M_f(x) = \sup\limits_{r>0} \underbrace{\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy}_{:= A_r f(x)}$

Η M_f είναι μετρήσιμη, γιατί $\forall r > 0$
η $x \mapsto A_r f(x)$ είναι συνεχής (άσκηση) και $\{M_f > \alpha\} = \underbrace{\bigcup_{\{q \,/\, q \in \mathbb{Q},\, q > 0\}} \{A_q f > \alpha\}}_{\text{μετρήσιμη}}$

Η M_f δεν είναι ολοκληρώσιμη (ακόμα και αν η f είναι ολοκληρώσιμη) εκτός αν $f = 0$ σ.π.

<u>Βασική Ανισότητα</u> Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε $\forall \alpha > 0$ ισχύει:

$$m(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, M_f(x) > \alpha\}}_{:= E_\alpha}) \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_{L^1} = \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy$$

<u>απόδειξη</u> $\forall x \in E_\alpha$ $\exists B_x$ τ.ω. $\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\,dy > \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|\,dy$$

Έχουμε $E_\alpha \subseteq \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$ και αν $\gamma < m(E_\alpha)$, $\exists x_1, \dots, x_N \in E_\alpha$ τ.ω.

οι B_{x_i} να είναι ξένες και $\gamma < 3^n \sum_{k=1}^{N} m(B_{x_i}) < \frac{3^n}{\alpha} \sum_{k=1}^{N} \int_{B_{x_i}} |f(y)|\,dy =$

$$\overset{B_{x_i}\text{ ξένες}}{=} \frac{3^n}{\alpha} \int_{\bigcup_{i=1}^{N} B_{x_i}} |f(y)|\,dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy$$

Θεώρημα παραγώγισης Lebesgue

Έστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Τότε $\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x)$ m-σ.π

παρατήρηση Αν η g είναι συνεχής, αυτό ισχύει $\forall x$.

απόδειξη Υποθέτουμε ότι $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε g συνεχή, $g \in L^1$ τ.ω. $\|f-g\|_{L_1} < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy - f(x)\right| \le \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-g(y)|\,dy +$$

$$+ \left|\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} g(y)\,dy - g(x)\right| + |g(x) - f(x)| \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \limsup_{r \to 0^+} \left|\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy - f(x)\right| \le \underbrace{\limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-g(y)|\,dy}_{:= A_\eta}$$

$$+ 0 + |g(x) - f(x)|$$

Δείχνουμε ότι $\forall \eta > 0$ $m\left(\left\{x \,/\, \limsup_{r \to 0^+} \left|\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy - f(x)\right| \ge \eta\right\}\right) = 0$

και έπειτα ($\eta = 1, \frac{1}{2}, \dots$) ότι $m(\{x \,/\, \limsup_{r \to 0^+} |\dots| > 0\}) = 0$

Έχουμε $A_\eta \subseteq B_\eta \cup \Gamma_\eta$ όπου $B_\eta = \{x \,/\, M_{f-g}(x) \ge \frac{\eta}{2}\}$ και $\Gamma_\eta = \{x \,/\, |f(x) - g(x)| \ge \frac{\eta}{2}\}$

$$\left[\limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-g(y)|\,dy \le M_{f-g}(x)\right]$$

Έχουμε $m(B_\eta) \underset{\text{ανισότητα}}{\overset{\text{βασική}}{\le}} \frac{3^n}{\eta/2} \|f-g\|_1$

και $m(\Gamma_\eta) \overset{\text{Markov}}{\le} \frac{2}{\eta} \|f-g\|_1$

Άρα $m(A_\eta) \le \frac{2}{\eta}(3^n+1)\|f-g\|_{L_1} < \frac{2}{\eta}(3^n+1)\varepsilon$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $m(A_\eta) = 0$.

Σημείωση Από το Θεώρημα έπεται ότι

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x))\,dy = 0 \quad m\text{-σ.π.}$$

Ορισμός Έστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ένα $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο Lebesgue της f αν $\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy = 0$.

Θεώρημα Αν $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ τότε $m(\mathbb{R}^n \setminus Leb(f)) = 0$ όπου $Leb(f)$ είναι το σύνολο των σημείων Lebesgue της f.

απόδειξη Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $f(x) \in \mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{Q}$:

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy \leq \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-t|\,dy + |t-f(x)|$$

Η $g_t(y) = |f(y)-t|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη. Από το θεώρημα παραγώγισης υπάρχει $E_t \subseteq \mathbb{R}^n$ με $m(E_t)=0$ τ.ω. $\forall x \notin E_t$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-t|\,dy = |f(x)-t|$$

Ορίζουμε $E = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}} E_t$. Τότε $m(E)=0$.

$$\forall x \notin E \quad \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)| \leq 2|f(x)-t| \quad \forall t \in \mathbb{Q}$$

Εφαρμογή $E \subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο $f = \chi_E$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Το θεώρημα μας δίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ $\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \chi_E(y)\,dy \xrightarrow{r\to 0^+} \chi_E(x)$

δηλ. $\frac{m(E \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} \xrightarrow{r\to 0^+} \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in E \\ 0, & \text{αν } x \notin E \end{cases}$

Για "$x \in E$" το μεγαλύτερο μέρος της $B(x,r)$ είναι στο E καθώς το $r\to 0^+$. Για "$x \notin E$" το μεγαλύτερο μέρος της $B(x,r)$ είναι στο E^c καθώς το $r \to 0^+$.

Ορισμός Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο. Ένα $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο πυκνότητας του E αν $\lim_{r\to 0^+} \frac{m(E \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = 1$

⇝ Είδαμε ότι σχεδόν κάθε $x \in E$ είναι σημείο πυκνότητας του E.

Ορισμός Μια οικογένεια $\{E_r\}_{r>0}$ μετρησίμων $\subseteq \mathbb{R}^n$ συρρικνούται φυσιολογικά στο $x \in \mathbb{R}^n$ αν $\exists \alpha > 0$ τ.ω.:

- $\forall r > 0$ $E_r \subseteq B(x,r)$
- $\forall r > 0$ $m(E_r) > \alpha m(B(x,r))$

Θεώρημα Αν $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ τότε $\lim\limits_{r \to 0^+} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)|\,dy \to 0$ μ-σ.π.

απόδειξη $\frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y)-f(x)|\,dy \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy \to 0$ μ-σ.π.

Ορισμός Ένα μέτρο Borel v στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται κανονικό αν:
(α) $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές ισχύει $v(K) < \infty$
β) $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει $v(E) = \inf\{v(U) \,/\, U$ ανοικτό, $E \subseteq U\}$
Αν το v είναι προσημασμένο λέμε ότι είναι κανονικό αν το $|v|$ είναι κανονικό

Παράδειγμα Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$. Τότε $dv = f\,dm$ κανονικό $\iff f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

απόδειξη "$\Rightarrow$" Αν E φραγμένο, μετρήσιμο $\subseteq \mathbb{R}^n$, $\exists K$ συμπαγές: $E \subseteq K$
$\Rightarrow \int_E f\,dm = v(E) \leq v(K) < \infty$

"$\Leftarrow$" Το (α) όμοια $v(K) = \int_K f\,dm < \infty$ αφού $f \in L^1_{loc}$

Ζητάμε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U \supseteq E$ τ.ω. $\int_U f\,dm < \int_E f\,dm + \varepsilon \iff \int_{U \setminus E} f\,dm < \varepsilon$

Άσκηση Αν $m(E) < \infty$ βρίσκω U ανοικτό, $U \supseteq E$ με $m(U \setminus E) < \delta$ όπου $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\forall A$ με $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f\,dm < \varepsilon$

Αν $m(E) = \infty$ γράφω $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, E_j ξένα, $m(E_j) < \infty$.

Βρίσκω U_j ανοικτό, $U_j \supseteq E_j$ τ.ω. $\int_{U_j \setminus E_j} f\,dm < \frac{\varepsilon}{2^j}$ και παίρνω

$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$

Θεώρημα Έστω ν κανονικό προσημασμένο μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $d\nu = d\lambda + f\,dm$ η Lebesgue - Radon - Nikodym διάσπαση του ν ως προς το m [έχουμε $\lambda \perp m$] Τότε $\lim_{r \to 0^+} \frac{\nu(B(x,r))}{m(B(x,r))} = f(x)$ m-σ.π.

Σημείωση: Το ίδιο αν αντί για $B(x,r)$ παίρνουμε $E_r(x) \downarrow x$
$M \subseteq B(0,1)$ $\forall r$ $\forall x$ $m(M) > \alpha m(B(0,1))$ $E_r(x) = x + rM$

απόδειξη Θεωρήματος

$d\nu = d\lambda + f\,dm \Rightarrow d|\nu| = d|\lambda| + |f|\,dm$ και αφού $|\nu|$ κανονικό, τα $|\lambda|$, $|f|\,dm$ είναι κανονικά. Ειδικότερα, η $|f|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη $\Rightarrow f \in L^1_{loc}$. Άρα στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το ν είναι θετικό μέτρο. Έχουμε

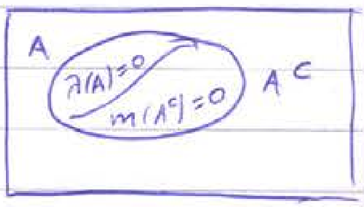
$$\frac{\nu(B(x,r))}{m(B(x,r))} = \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} + \underbrace{\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f\,dm}_{\downarrow \; f(x) \text{ m-σ.π.}}$$

από το θεώρημα παραγώγισης

μένει ν.δ.ο. $\frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} \xrightarrow{r \to 0^+} 0$ m-σ.π.

Ξέρουμε ότι $\lambda \perp m$. Ζητάμε $m\left(\left\{\limsup_{r\to 0^+} \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} > 0\right\}\right) = 0$

Αρκεί ν.δ.ο. $\forall k \in \mathbb{N}$ $m\Big(\underbrace{\left\{\limsup_{r\to 0^+} \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} > \frac{1}{k}\right\}}_{:= A_k}\Big) = 0$



Το λ είναι κανονικό. Παίρνω $\varepsilon > 0$ και βρίσκω U ανοικτό, $U \supseteq A$ με $\lambda(U) < \varepsilon$. Έστω $x \in A_k \cap U$ τότε υπάρχουν οσοδήποτε μικρά $r_x > 0$: $m(B(x,r_x)) < k\lambda(B(x,r_x))$ (*). Μπορώ να βρω $r_x > 0$: ισχύει η (*) και $B(x,r_x) \subseteq U$. Τότε $A_k \cap U \subseteq \bigcup_{x \in A_k \cap U} B(x,r_x)$. Από λήμμα Vitali

$\exists x_1, \dots, x_N \in A_k \cap U$: οι $B(x_i, r_{x_i})$ είναι ξένες και $\sum_{i=1}^{N} m(B(x_i, r_{x_i})) > \frac{1}{3^n} m(A_k \cap U)$

Άρα $m(A_k \cap U) \le 3^n \sum_{i=1}^{N} m(B(x_i, r_{x_i})) < 3^n k \sum_{i=1}^{n} \lambda(B(x_i, r_{x_i})) \overset{\text{ξένες}}{=}$

$$= 3^n k\, \lambda\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r_{x_i})}_{\subseteq U}\Big) \leq 3^n k\, \lambda(U) < \varepsilon$$

Τοτε $m(A_k) = m(A_k \cap U) + m(\underbrace{A_k \cap U^c}_{\subseteq A^c \text{ και } m(A^c)=0}) < \varepsilon$

Το ε το ηταν τυχον, αρα $m(A_k) = 0$.

Τοτε $m\left(\left\{x \,/\, \limsup\limits_{r\to 0^+} \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(x,r))} > 0\right\}\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$