Μάθημα 4ο Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος) 1/11/2018

Σχόλια για την εξίσωση Duffing

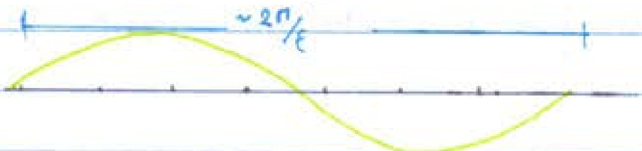
$\ddot{u} + \dot{u} + \varepsilon u^3 = 0$

Η λύση είχε ένα όρο $\ldots \cos(t + \frac{3}{8}\varepsilon t) \ldots$

$$\cos t \cdot \cos(\tfrac{3}{8}\varepsilon t) - \sin t \sin(\tfrac{3}{8}\varepsilon t)$$

$T_1 = 2\pi$

Η μία κλίμακα



$T_2 = \frac{2\pi}{\varepsilon}\frac{8}{3}$

η άλλη κλίμακα

Η λύση είναι γινόμενο 2 συναρτήσεων άρα υπάρχουν 2 χαρακτηριστικές κλίμακες ($f_1(t) \cdot f_2(\varepsilon t)$)

Το πρόβλημα το λέμε ιδιόμορφο γιατί δεν μπορούμε να το λύσουμε παίρνοντας το ομαλό ανάπτυγμα $u(t) = \underbrace{u_0(t)}_{\cos t} + \varepsilon u_1(t) + \ldots$ γιατί έχω το φαινόμενο του συντονισμού και καταλήγω να πρέπει να κάνω αλλαγή κλίμακας.

Αν θεωρήσουμε το γραμμικό τελεστή $Lh = \ddot{h} + h$, $Ker(L) \neq \emptyset$ (2π-περιοδικών συναρτήσεων) και τεχνικά αυτό είναι πρόβλημα γιατί "γεννάει" την άλλη κλίμακα

Οριακό Στρώμα

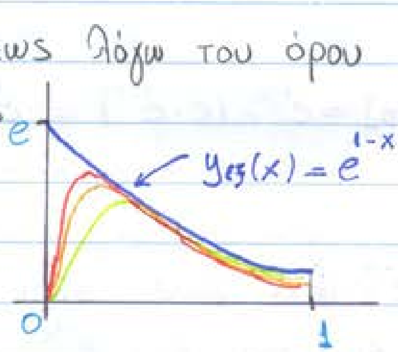
$$\begin{cases} \varepsilon y'' + (1+\varepsilon) y' + y = 0 & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0, \ y(1) = 1 \end{cases}$$

Ένα απλό πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Η λύση είναι εύκολο να υπολογιστεί:

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1} - e^{-1/\varepsilon}}$$ Παρατηρώ ότι έχω 2 κλίμακες

Έχω φαινόμενο συγκεντρώσεως λόγω του όρου $e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ και το γράφημα της λύσης για διάφορα ε



Πρόβλημα Συγκέντρωσης

Έχω 2 οριακά προβλήματα

2 διακεκριμένα όρια.

① Παίρνω $\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x) = e^{1-x} =: y_{\varepsilon\xi}(x)$ $\quad (0 < x \leq 1)$

Παρατηρώ ότι αν θέσω $\varepsilon = 0$ $\quad y_0' + y_0 = 0 \quad y_0(1) \rightsquigarrow y_0(x) = e^{1-x}$

άρα μακριά από αυτό το οριακό στρώμα είμαστε καλά

② Κλίμακα μεγέθυνσης

Εισάγω την $\eta = x/\varepsilon$ και γράφω το πρόβλημα μου σε αυτή τη κλίμακα

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\eta}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2}{d\eta^2}$$

ορίζω $y(x) = Y(\eta)$ και παίρνω:

$\frac{1}{\varepsilon}\ddot{Y} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\dot{Y} + Y = 0 \qquad Y(0) = 0$ (γιατί κινούμαι προς την αριστερότερη)

(Θεωρώ ότι οι όροι $\ddot{Y}, \dot{Y}, Y$ είναι φραγμένοι ως προς ε) άρα πολλαπλασιάζοντας

$$\ddot{Y} + (1+\varepsilon)\dot{Y} + \varepsilon Y = 0$$

Άρα πάω σε ένα πρόβλημα $\quad \ddot{V} + \dot{V} = 0$, $V(0) = 0$

Λύνω και παίρνω $V(\eta) = c_1(1 - e^{-\eta})$

έχουμε το εξωτερικό ανάπτυγμα: (x-κλίμακα) $\quad y_{\varepsilon\xi}(x) = e^{1-x}$

και το εσωτερικό ανάπτυγμα: (η-κλίμακα) $\quad V_{\varepsilon\sigma}(\eta) = c_1(1 - e^{-\eta})$

Συναρμογή

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{y_{\varepsilon\xi}(x)}_{= e} = \lim_{\eta\to\infty} \underbrace{V_{\varepsilon\sigma}(\eta)}_{= c_1}$$

Ομοιόμορφη προσέγγιση

$$y_{o\mu}(x) = y_{\varepsilon\xi}(x) + V_{\varepsilon\sigma}(\eta) - [\text{κοινό όριο}] = e^{1-x} - (e - e^{1-\eta}) = e^{1-x} - e^{1-\eta} = \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1}}$$

Παρατηρώ οτι διαφέρει από την λύση που ξέρουμε

Αν πάω με ανάπτυγμα Taylor $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ στο $\varepsilon = 0$ όλοι οι όροι είναι 0

και έτσι δεν μπορεί να "εντοπίσει" τον όρο $e^{-1/\varepsilon}$

Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος) 1/11/2018

Συστηματοποίηση

Γράφουμε το εξωτερικό ανάπτυγμα: $y_{εξ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\varepsilon^n$

Την συνθήκη την επιβάλουμε στον πρώτο όριο $y_0(1)=1$ και οι άλλοι $y_n(1)=0$, $n=1,2,\dots$

$$\varepsilon(y_0''+\varepsilon y_1''+\dots)+(1+\varepsilon)(y_0'+\varepsilon y_1'+\dots)+(y_0+\varepsilon y_1+\dots)=0$$

και εξισώνω τους όρους.

$\varepsilon^0:\ y_0'+y_0=0,\ y_0(1)=1 \Rightarrow y_0(x)=e^{1-x}$

$\varepsilon^1:\ y_1'+y_1=-y_0''-y_0',\ y_1(1)=0 \Rightarrow y_1(x)\equiv 0$

$\vdots$

$\varepsilon^n:\ y_n'+y_n=-y_{n-1}''-y_{n-1}',\ y_n(1)=0 \Rightarrow y_n(x)\equiv 0$

Άρα $y_{εξ}(x)=e^{1-x}$

Επιλογή κλίμακας

$\eta=\frac{x}{\varepsilon^{\gamma}}$ ορίζω $Y(\eta)=y(x)$ θα πάρω $\underbrace{\varepsilon\cdot\varepsilon^{-2\gamma}}_{\varepsilon^{1-2\gamma}}\ddot{Y}+\underbrace{(1+\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma}}_{\varepsilon^{-\gamma}}\dot{Y}+\underbrace{Y}_{\varepsilon^{0}}=0$

Προσπαθώ να κάνω εξισορρόπηση: Η αρχή είναι να αναιρούνται 2 όροι και οι υπόλοιποι όροι να είναι αμελητέοι

- $1-2\gamma=\gamma$ ($1^{ος}=2^{ος}$) $\Rightarrow \gamma=1$ ← Επιλέγω αυτόν γιατί στην $2^{η}$ περίπτωση
- $1-2\gamma=0$ ($1^{ος}=3^{ος}$) $\Rightarrow \gamma=1/2$ ο $2^{ος}$ όρος δεν είναι αμελητέος ενώ
- $-\gamma=0$ ($2^{ος}=3^{ος}$) $\Rightarrow \gamma=0$ στην $3^{η}$ παίρνω την ίδια κλίμακα x

Επομένως για $\gamma=1 \rightsquigarrow \frac{1}{\varepsilon}\ddot{Y}_\varepsilon+\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\dot{Y}_\varepsilon+Y_\varepsilon=0$

Γράφω την εξίσωση $Y_{\eta\eta}+(1+\varepsilon)Y_\eta+\varepsilon Y=0$ (Y_η = η πρώτη παράγωγος ως προς η)

και το εσωτερικό ανάπτυγμα γίνεται:

$Y_{εσ}(\eta)=Y_0(\eta)+\varepsilon Y_1(\eta)+\dots$, $Y_0(0)=0$, $Y_1(0)=Y_2(0)=\dots=0$

κάνω αντικατάσταση στην εξίσωση και έχω:

$(Y_0+\varepsilon Y_1+\varepsilon^2Y_2+\dots)^{\cdot\cdot}+(1+\varepsilon)(Y_0+\varepsilon Y_1+\dots)^{\cdot}+\varepsilon(Y_0+\varepsilon Y_1+\dots)=0$, εξισώνω τους όρους

$\varepsilon^0:\ \ddot{Y}_0+\dot{Y}_0=0\quad Y_0(0)=0 \Rightarrow Y_0(\eta)=A_0(1-e^{-\eta})$

$\vdots$

$\varepsilon^n:\ \ddot{Y}_n+\dot{Y}_n=-\dot{Y}_{n-1}-Y_{n-1},\ Y_n(0)=0 \Rightarrow Y_n(\eta)=\int_0^{\eta}(A_ne^{-z}-Y_{n-1}^{(z)})\,dz$

Συναρμογή

$y_{εξ}(x)=y_{εσ}(x) \Rightarrow e\cdot e^{-\eta/\varepsilon}=e\left(1-\varepsilon\eta+\frac{\varepsilon^2\eta^2}{2!}-\frac{\varepsilon^3y^3}{3!}+\dots\right)\simeq Y_0(\eta)+\varepsilon Y_1(\eta)+\dots$

$A_0=e \Rightarrow Y_0(\eta)=e(1-e^{-\eta})$ $\quad \eta>>1\ \ \eta\to\infty$

$Y_1(\eta)=\int_0^{\eta}(A_1e^{-z}-Y_0(z))\,dz=(A_0+A_1)(1-e^{-\eta})-e\eta \Rightarrow A_0+A_1=0$

$Y_\nu(\eta)=e\left[\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\right]\eta^\nu\quad \nu=1,2,\dots$ $\qquad Y_{εσ}(\eta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^\nu\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\eta^\nu-e=e^{1-\varepsilon\eta}-e^{1-\eta}=e^{1-x}-e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}$

Ομοιόμορφη προσέγγιση

$y_{ομ}(x)=y_{εξ}(x)+Y_{εσ}(\eta)-[\text{κοινή τιμή}]=e^{1-x}+(e^{1-x}-e^{1-\frac{x}{\varepsilon}})-e^{1-x}$