Μάθημα 2ο   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος)   11/10/2018

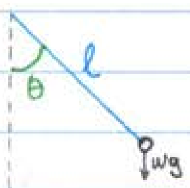
1.2 Διαταραχές Χαμιλτονιανών Συστημάτων

$$(1)\begin{cases} x' = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ y' = -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

$H(x,y)$ χαμιλτονιανή

Έστω $(x(t),y(t))$ λύση του (1).

Αν πάρω $\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}x' + \frac{\partial H}{\partial y}y' \overset{(1)}{=} \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0$



$\theta' = y$

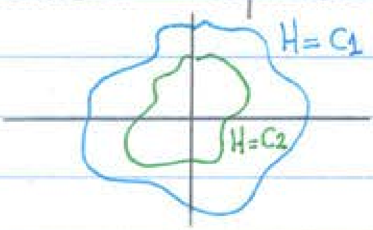
$y' = \left(-\frac{g}{l}\right)\sin\theta$

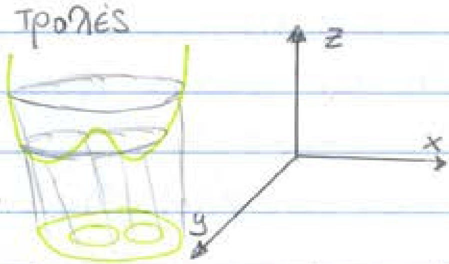
$H(\theta,y) = \frac{1}{2}y^2 + \left(1 - \frac{\cos\theta}{l}\right)g$

κινητική   δυναμική

(2) ⟹ Οι λύσεις είναι καμπύλες στάθμης H $\{(x,y) \mid H(x,y) = c\}$

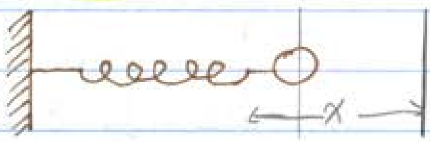
Κλειστές καμπύλες ⟺ περιοδικές τροχιές





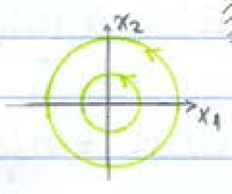
$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ $x_1' = x_2$

$x_2' = -x_1$



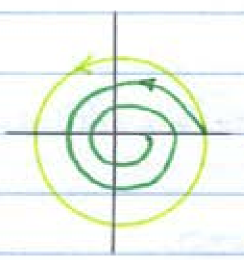
$x' + x = 0$

$x_2' = x_1'' = -x = -x_1$

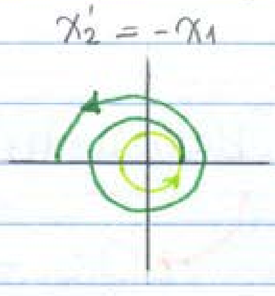


Αν "χαλάσει" το σύστημα $x_1' = x_2 + \varepsilon g$

$x_2' = -x_1$



Αν χάνω ενέργεια

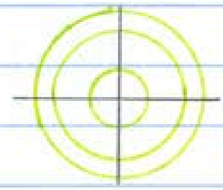


Αν κερδίζω ενέργεια

Θεωρούμε το σύστημα

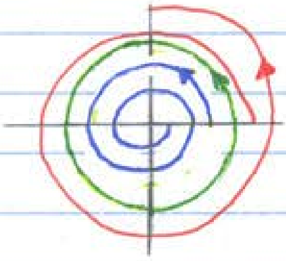
$$(14)\begin{cases} x_1' = x_2 + \varepsilon f_1(x_1,x_2) \\ x_2' = -x_1 + \varepsilon \cdot f_2(x_1,x_2) \end{cases} \qquad f_i \;\; C^1 \text{ συναρτήσεις}$$

$$\text{Το } (P_0) \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases} \longrightarrow$$



$\varepsilon = 0$

Θα δείξουμε ότι με $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει μια τροχιά που διατηρείται



$|\varepsilon| << 1$

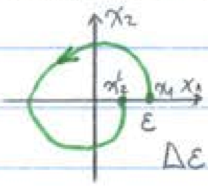
$E(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x^2)$

$(x_1(t), x_2(t))$ λύση του (14)

$$\frac{d}{dt} E(x_1(t),x_2(t)) = x_1(t)\,x_1'(t) + x_2(t)\,x_2'(t) = x_1(t)\left[x_2(t) + \varepsilon f_1(x_1,x_2)\right] + x_2(t)\left[-x_1(t) + \varepsilon \cdot f_2(x_1,x_2)\right]$$

$$= \varepsilon\left[f_1(x_1(t),x_2(t))\,x_1(t) + f_2(x_1(t),x_2(t))\,x_2(t)\right] = \varepsilon \cdot \dot{E}(x_1(t),x_2(t))$$

$$\dot{E}(x_1,x_2) = f_1(x_1,x_2) + f_2(x_1,x_2)$$

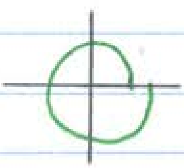


$\Delta\varepsilon < 0$

Θα υπάρχει κάποιος χρόνος που ξεκινάω και θα καταλήγω στον άξονα x_1

$$x_2^{\varepsilon}(0) = x_2^{\varepsilon}(T(\varepsilon)) = 0$$

ορίζω την μεταβολή



$\Delta\varepsilon > 0$

$$\Delta\varepsilon = \int_0^{T(\varepsilon)} \varepsilon \cdot \dot{E}(x_1^{\varepsilon}(t), x_2^{\varepsilon}(t))\,dt$$

Λήμμα: $\Delta\varepsilon = \varepsilon \cdot \int_0^{2\pi} \dot{E}(A\cdot\cos(t-t_0), A\sin(t-t_0))\,dt + o(\varepsilon)$ $\quad o(\varepsilon): \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$

Απόδειξη:

$$(x_1^{\varepsilon}(t), x_2^{\varepsilon}(t)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (x_1^{0}(t), x_2^{0}(t)) \Longrightarrow T(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi$$, ομοιόμορφα σε t συμπαγή

$0 \quad 4\pi \qquad T_0 = 2\pi \qquad 0 \le t \le 4\pi$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^{\varepsilon}(t), x_2^{\varepsilon}(t))\,dt =$$

$$= \varepsilon \cdot \left[\int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^{0}(t), x_2^{0}(t))\,dt + \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^{0}(t), x_2^{0}(t))\,dt - \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^{0}(t), x_2^{0}(t))\,dt + \int_0^{T(\varepsilon)} \left(\dot{E}(x_1^{\varepsilon}(t), x_2^{\varepsilon}(t)) - \dot{E}(x_1^{0}(t), x_2^{0}(t))\right)dt\right]$$

Ξέρω ότι $T(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi$ άρα $\qquad O(1) \longrightarrow 0 \qquad \varepsilon \to 0$

Ορίζω μια ποσότητα που εξαρτάται από το πλάτος του συστήματος αναφοράς.

Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος) 11/10/2018

$F(A) := \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))\,dt$ $\quad$ $F(A) > 0$ ανοίγει η έλικα $\quad \varepsilon \to 0$

$\Delta\varepsilon = \varepsilon\,[F(A) + O(\varepsilon)/\varepsilon]$ $\quad$ $F(A) < 0$ κλείνει η έλικα

Θεώρημα: Έστω ότι η F έχει απλή ρίζα στο A_0 δηλαδή $F(A_0) = 0$, $F'(A_0) \neq 0$. Τότε το (14) έχει περιοδική λύση πλάτους $A_0 + O(\varepsilon)$ για $|\varepsilon| \ll 1$

Απόδειξη: (Θέλουμε να κάνουμε χρήση του Θ.Π.Σ)

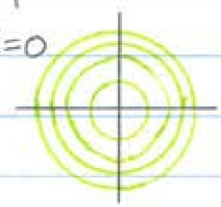
Ορίζουμε $Q(\varepsilon, A) := F(A) + O(\varepsilon)/\varepsilon$ Η συνάρτηση $(\varepsilon, A) \longrightarrow Q(\varepsilon, A)$ είναι C^1 και για $\varepsilon = 0$ (από θεώρημα εξάρτησης ως προς παραμέτρους)

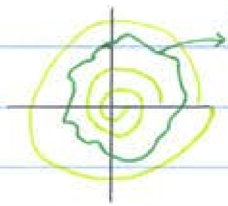
Ξέρω ότι $Q(0, A_0) = 0$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial A}(0, A_0) \neq 0$ άρα το Θ.Π.Σ εφαρμόζεται $\Longrightarrow$

$A = A(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $Q(\varepsilon, A(\varepsilon)) = 0 \quad |\varepsilon| < \delta$

Άρα το (14) έχει λύση που είναι κλειστή καμπύλη, άρα περιοδική

$\varepsilon = 0$





$F'(A_0) < 0$ ασυμπτωτική ευστάθεια του οριακού κύκλου

Παράδειγμα (Ταλαντωτής Van der Pol, 1928)

Θεωρούμε την $x'' + x = \varepsilon \cdot x'(1 - x^2)$ (ηλεκτρικό κύκλωμα χωρίς αντίσταση)

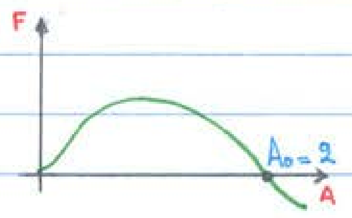
Το γράφω σαν σύστημα:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -x_1 + \varepsilon \cdot x_2(1 - x_1^2)$$

Γράφω $\dot{E}(x_1, x_2) = x_2^2(1 - x_1^2)$

$$F(A) = \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2(t - t_0)\,(1 - A^2\cos^2(t - t_0))\,dt = \pi\left(A^2 - \frac{A^4}{4}\right)$$

Παρατηρώ



$F'(2) < 0$

Κατά συνέπεια η εξίσωση έχει περιοδική λύση για $|\varepsilon| < 1$ κοντά στη περιφέρεια $x_1^2 + x_2^2 = 4$

Μάθημα 3ο Ει. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος) 25/10/2018

Ομαλές Διαταραχές

$$(\Pi_\varepsilon)\ \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + \varepsilon y^2 & |\varepsilon| << 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(\Pi_0)\ \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Λύση $\exists$ σε κλειστή μορφή

(Π_ε) Bernoulli: $\quad y^{-2}y' = -\frac{1}{y} + \varepsilon$

$\quad -(y^{-1})' = -\frac{1}{y} + \varepsilon \qquad u = 1/y$

$$y(t,\varepsilon) = \frac{e^{-t}}{1+\varepsilon(e^{-t}-1)} \quad (*)$$

$$(*) \xRightarrow{\text{Taylor ως προς } \varepsilon} y(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) + \dots$$

Θα προσποιηθούμε τώρα ότι δεν γνωρίζουμε την λύση και ξεκινάμε με το λεγόμενο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα.

Δεν κοιτάμε αν συγκλίνει.

$y(t,\varepsilon) = y_0 t + (\varepsilon y_1 t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$

$y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \dots = -(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots)^2$

Εξισώνω τους συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ε.

Εφαρμόζω το ίδιο και για την αρχική συνθήκη.

$y(0,\varepsilon) = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \dots$

$y_0(0) = 1 \quad y_1(0) = y_2(0) = \dots = 0$

$\varepsilon^0: \quad y_0' + y_0 = 0 \qquad y_0(0) = 1$

$\varepsilon^1: \quad y_1' + y_1 = y_0^2 \qquad y_1(0) = 0$

$\varepsilon^2: \quad y_2' + y_2 = 2 \cdot y_0 y_1 \qquad y_2(0) = 0$

$\vdots$

λύνω $y_0(t) = e^{-t}$

$y_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

$y_2(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$ $\qquad\qquad \sum k e^{-kt}$

Παρατηρώ ότι για $t \geq \delta > 0$ έχω ομοιόμορφη σύγκλιση ως προς $t \in (\delta, \infty)$

Στοιχεία της μεθόδου

Μπορώ θεωρητικά βλέποντας το σχήμα
κατασκευάζω ένα ανάπτυγμα $y_{np}(t) = y_0(t) + \varepsilon \cdot y_1(t) + \dots + \varepsilon^n y_n(t) + \underbrace{O(\varepsilon^{n+1})}_{\text{σφάλμα}}$

y_{np}: προσεγγιστική λύση

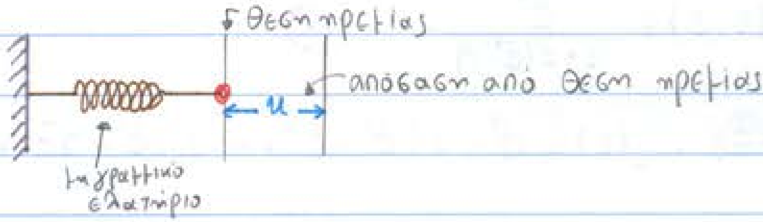
Από την ανάλυση μας το σφάλμα $O(\varepsilon^{n+1})$ ομοιόμορφο για $t \in [0, \infty)$

Μπορώ να δείξω ότι : $|y_{ακριβής}(t) - y_n^{np}(t)| = O(\varepsilon^{n+1})$ χωρίς να ξέρω την ακριβή λύση

$\left(|O(\varepsilon^{n+1})| \leq c\,\varepsilon^{n+1}, \; |o(\varepsilon^{n+1})| / \varepsilon^{n+1} \longrightarrow 0 \right)$

Ιδιάζουσες διαταραχές

Εξίσωση Duffing



$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0 \qquad u(0) = 1, \; u'(0) = 0$

$H(u_1, u_2) = \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\varepsilon}{4} u_1^4$

$u_1 = u \qquad | \quad u_1' = u_2$

$u_2 = u_1' = u' \quad | \quad u_2' = -u_1 - \varepsilon u_1^3$

Μπορώ να το γράψω σαν σύστημα σε επίπεδο φάσης

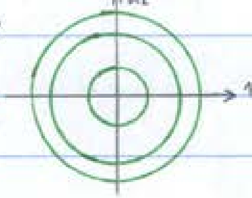
$u_1' = \dfrac{\partial H(u_1, u_2)}{\partial u_2}$

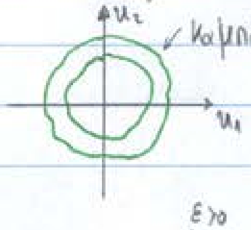
$u_2' = -\dfrac{\partial H(u_1, u_2)}{\partial u_1}$

Δηλαδή ξέρω ότι είναι χαμιλτονιανό, δηλαδή ότι διατηρείται η ενέργεια δηλαδή $\frac{d}{dt} H(u_1(t), u_2(t)) = 0$

Ξέρω ότι στο επίπεδο φάσης όλες οι λύσεις είναι περιοδικές.

$\varepsilon = 0$





καμπύλες στάθμης της H

δηλαδή κινούμε

$\Sigma^c = \{(u_1, u_2) \mid H(u_1, u_2) = c\}$

$\varepsilon \neq 0$ μικρό

Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος) 25/10/2018

Συμπέρασμα (ΣΔΕ κεφάλαιο 10 Αλικάκος + Καλογερόπουλος)
Όλες οι λύσεις είναι περιοδικές

Θα επαναλάβουμε και εδώ τη διαδικασία με τα αναπτύγματα
Έστω η λύση $u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots$

$(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)'' + (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = 0$

$u_0(0) = 1 \;,\; u_1(0) = u_2(0) = \dots = 0$

$\varepsilon^0: \; u_0'' + u_0 = 0 \qquad u_0(0) = 1 \longrightarrow u_0(t) = \cos t \qquad (\cos^3\theta = 3\cos\theta + \cos 3\theta)$

$\varepsilon^1: \; u_1'' + u_1 = -u_0^3 \qquad u_1(0) = 0 \qquad \underbrace{u_1'' + u_1 = -(\cos t)^3 = -3\cos t}_{\text{έχουμε πρόβλημα}} - \cos 3t$

$\varepsilon^2: \; u_2'' + u_2 = -3u_0^2 u_1 \qquad u_2(0) = 0$

$\vdots$

Με βάση της λύσης για $u_1'' + u_1 = -3\cos t - \cos 3t$

$u_1(t) = \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8} t \sin t$

Οι πρώτοι δύο όροι δίνουν $y_{pp}(t) = \cos t + \varepsilon\left[\frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8} t \sin t\right]$

Με ενδιαφέρει η $|u_{ak}(t) - u_{np}(t)| = O(\varepsilon^2)$ αν είναι και για πόσο
Παρατηρώ το εξής: Η προσέγγιση δεν είναι ικανοποιητική για $t \sim 1/\varepsilon$
δηλαδή για $t\,[0, 1/\varepsilon]$, τότε ο όρος $-\frac{3}{8} t \sin t$ είναι μεγάλος
και αυτό έχει σαν συνέπεια η $u_{np}(t)$ δεν είναι φραγμένη στο $t \in [0, \infty)$

Παρατηρώ ότι η ποσότητα u^2 διατηρείται

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} u'^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{1}{4}\varepsilon u^4(t) = C \\ &u(0) = 1 \;,\; u'(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow C = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$$

Άρα η λύση είναι φραγμένη για όλο το t, αφού παίρνω $\frac{1}{2}u^2(t) \leq C$
Η προσέγγιση όμως όχι!!!
Άρα δεν έχω αξιόπιστη μέθοδος. Το πρόβλημα είναι γιατί δεν λάβαμε υπόψιν ότι η περίοδος εξαρτάται από το ε.

Θα εισάγουμε μια νέα κλίμακα χρόνου
$t \longrightarrow \tau$

$t = (1+\varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)\tau$ $\quad$ w_1, w_2, σταθερές υπό προσδιορισμό

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{du}{d\tau}\frac{1}{(\ )}$$

$\cdot = d/d\tau$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{d\tau^2}\frac{1}{(\ )^2}$$

$$\ddot u + (1+\varepsilon w_1+\varepsilon^2 w_2+\dots)^2(u+\varepsilon u^3)=0$$

$$u(\tau) = u_0(\tau)+\varepsilon u_1(\tau)+\varepsilon^2 u_2(\tau)+\dots$$

$\ddot u_0 + u_0 = 0$, $u(0)=1$

$\ddot u_1 + u_1 = -u_0^3 - 2w_1 u_0$, $u_1(0)=\dot u_1(0)=0$

Ξέρω $\ddot u_1 + u_1 = -(\cos\tau)^3 - 2w_1\cos\tau = -\left(\frac{3}{4}+2w_1\right)\cos\tau - \frac{1}{4}\cos 3\tau$

Επιλέγω $w_1 = -\frac{3}{8}$ για να αποφύγω τον συντονισμό που μου προκαλεί ο όρος $\alpha\cdot\cos\tau$

Παίρνω $u_1(\tau) = \frac{1}{32}(\cos 3\tau - \cos\tau)$.

Παρατηρώ ότι η προσέγγιση είναι περιοδική

προσέγγιση 2 όρων $u_{\pi\rho}(t) = \cos\left(t+\frac{3}{8}\varepsilon t\right) + \frac{\varepsilon}{32}\left[\cos 3\left(t+\frac{3}{8}\varepsilon t\right)\right]$

κλίμακα $\quad$ 2η κλίμακα