Μάθημα 16ο: Ε12. Θεωρία Ελέγχου 20/12/2018

Άσκηση 1: Δίνεται πίνακας

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

α Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A

β Αν ο A είναι απλής δομής να βρεθεί ο πίνακας T που τον διαγωνιοποιεί - διαφορετικά να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan του A

γ Να βρεθεί ο πίνακας e^{At}

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2$$

- $\lambda_1 = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\lambda I - A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{u} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha+\beta=0 \\ \gamma=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \beta=0 \\ \beta=\gamma \end{matrix} \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} A u_2 = \lambda_2 u_2 \\ (\lambda_2 I - A) u_3 = -u_2 \Leftarrow A u_3 = \lambda_2 u_3 + u_2 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \beta=1 \\ \beta=\gamma \end{matrix} \Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $U = [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot [u_1 \; u_2 \; u_3] = [u_1 \; u_2 \; u_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} Au_1 &= 0\cdot u_1 \\ Au_2 &= 1\, u_2 \\ Au_3 &= 1\cdot u_3 + u_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A = UJU^{-1} \Rightarrow e^{At} = Ue^{Jt}U^{-1} = U\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}U^{-1}$$

Άσκηση 2: Δείξτε ότι $e^{(A+B)t} = e^{At}\cdot e^{Bt}$ αν $AB = BA$

$$\phi(t) = e^{(A+B)t}\cdot e^{-At}\, e^{-Bt}$$

$$\phi'(t) = 0 \Rightarrow \phi(t) = \phi(0) = I$$

Άσκηση 5: Η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

δίνει τη σχέση εισόδου $u(t)$ και εξόδου $y(t)$ ενός συστήματος. Να γίνει περιγραφή του συστήματος σε μορφή χώρου κατάστασης.

$$y''' + 5y'' + y' + 2y = u$$

$$y = x_1 \quad , y' = x_2 \quad , y'' = x_3$$

$$\underset{\underline{x}'}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}}_{A} \underset{\underline{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} + \underset{u}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Άσκηση 10: Γραμμικοποιείστε το σύστημα $\ddot{x} + (3+\dot{x}^2)\cdot\dot{x} + (1+x+x^2)u = 0$, γύρω από το σημείο ισορροπίας $x = \dot{x} = 0$ και την συνάρτηση εισόδου $u(t) = 0$.

$x_1 = x$, $x_2 = x'$ $\qquad (x_1, x_2, u) = (0, 0, 0) = \underline{0}$

Ε12 Θεωρία Ελέγχου 20/12/2018

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(3+x_2^2)x_2 - (1+x_1+x_1^2)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,u) \\ f_2(x_1,x_2,u) \end{bmatrix}$$

το σημείο ισορροπίας (εδώ όλα 0)

$$x_1 = \bar{x}_1 + \delta x_1$$
$$x_2 = \bar{x}_2 + \delta x_2 \quad \Longrightarrow \quad (\delta \underline{x})' = A(\delta \underline{x}) + B(\delta u)$$
$$u = \bar{u} + \delta u$$

$$A = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = (1+2x_1)u\Big|_0 = 0 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_0 = 0$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_0 = 1 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_0 = -3-3x_2^2\Big|_0 = -3 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_0 = -1$$

$$(\delta \underline{x})' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \delta \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \delta \underline{u}$$

Άσκηση 11: Έστω ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t)$ (δηλαδή ο A πίνακας Hurwitz). Δικαιολογείστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

α Ο πίνακας $-A^T A$ είναι Hurwitz

β Ο πίνακας e^A είναι Hurwitz

γ Ο πίνακας $A + A^T$ είναι Hurwitz

δ Ο πίνακας A^k είναι Hurwitz για $k = 1, 3, \dots$

ε Ο πίνακας A^{-1} είναι Hurwitz

στ Ο πίνακας $A - \alpha I$ είναι Hurwitz για $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.

α) Σωστό $\quad A < 0 \iff \begin{cases} A \le 0 \\ |A| \ne 0 \end{cases}$

β) Λάθος $A=-1$, $e^{A}=e^{-1}>0$

γ) Λάθος $A=\begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$

$$A+A^T = \begin{bmatrix} -2 & \alpha \\ \alpha & -2 \end{bmatrix} \quad \alpha>0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = \det(A+A^T) = 4-\alpha^2 \Rightarrow <0$$

αν $|\alpha|>2$

άρα μια απο $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

δ) Λάθος πχ $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\lambda_{1,2} = e^{\pm \frac{2\pi}{3} i}$ $\sigma(A^3) = \{1\}$

αν έλεγε μόνο για ιδιοτιμές πραγματικές θα ίσχυε.

ε) Ισχύει, $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$

$\lambda = re^{i\theta}$ $\lambda \in \mathbb{C}_-$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} < -\theta < -\pi/2$

στ) $Re(\lambda(A))<0 \Rightarrow Re(\lambda(A-\alpha I)) = \lambda(A)-\alpha<0.$