Μάθημα 15ο: Ε.12 Θεωρία Ελέγχου 6/12/2018

Ευστάθεια

Συστήματα χρονικά ανεξάρτητα

$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$\underline{f}: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (Lipschitz) , $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (ανοιχτό)

$\underline{x}_e \in \mathbb{R}^n$ σημείο ισορροπίας , $\underline{f}(\underline{x}_e) = \underline{0}$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\underline{x}_e = \underline{0}$

(Διαφορετικά $\underline{y} = \underline{x} + \underline{x}_e \Longrightarrow \dot{\underline{y}} = \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{y} + \underline{x}_e) := \underline{g}(\underline{y})$ και $\underline{g}(\underline{0}) = \underline{f}(\underline{x}_e) = 0$.)

Ορισμός: Το σημείο ισορροπίας $\underline{x} = \underline{0}$ λέγεται

- ευσταθές (κατά L) αν $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|\underline{x}(0)\| \leq \delta \Longrightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon$
- ασταθές αν δεν είναι ευσταθές
- ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και το δ μπορεί να επιλεγεί: $\|\underline{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$

Παράδειγμα

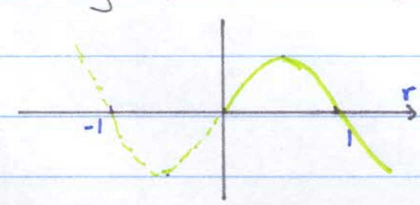
Αστάθεια σε μη γραμμικά συστήματα δεν συνεπάγεται (αναγκαστικά) μη φραγμένες λύσεις.

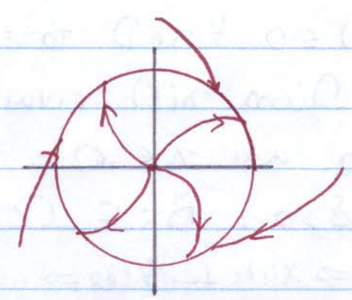
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{pmatrix}$$

με αλλαγή μεταβλητών : $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $\tan(\theta) = x_2/x_1$ οι εξισώσεις γίνονται

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r(r^2-1) \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \theta(t) = \theta_0 \qquad r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t}}}$$

$$\dot{r} = g(r) = -r(r^2-1) = -r(r+1)(r-1)$$





1

Λήμμα: $f(t,x)$ τμηματικά συνεχής ως προς t και Lipschitz ως προς $\underline{x}$ για $t \geq 0$ και $\underline{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ (ανοικτό). Έστω επίσης W είναι συμπαγές υποσύνολο του D και $x_0 \in W$ και έστω ότι είναι γνωστό ότι κάθε λύση του ΠΑΤ $\dot{\underline{x}} = f(t,x)$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ περιέχεται στο W για $t \geq t_0$. Τότε η λύση υπάρχει, είναι μοναδική και ορίζεται σε όλο το $[t_0, \infty)$

Θεώρημα: Έστω $\underline{x}=0$ σημείο ισορροπίας του $\dot{\underline{x}} = f(x)$, $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (ανοικτό) και f Lipschitz και έστω $\underline{0} \in D$. Έστω ότι υπάρχει $V: D \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 τέτοιο ώστε $V(\underline{0}) = 0$, $V(\underline{x}) > 0$ $\forall x \in D \setminus \{0\}$, $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ $\forall \underline{x} \in D$. Τότε $x=0$ είναι ευσταθές.
Αν επιπλέον $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ $\forall \underline{x} \in D \setminus \{0\}$ τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Έστω $x(t)$ είναι η λύση του $\dot{\underline{x}} = f(x)$ $\quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{V}(\underline{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \langle \underline{\nabla} V(x), \underline{f}(x) \rangle$$

Απόδειξη: (α) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$ $\forall t \geq 0$
Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε $r \in (0, \varepsilon]$ ώστε $\bar{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \subseteq D$
Ορίζω $\alpha = \min\{V(\underline{x}) : \|\underline{x}\| = r\} > 0$
Έστω $b \in (0, \alpha)$ και ορίζουμε $\Omega_b = \{x \in \bar{B}_r : V(x) \leq b\}$
Τότε $\Omega_b \subseteq B_r\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$
(αν $p \in \Omega_b \cap \partial B_r$ τότε $p \in \Omega_b \Rightarrow V(p) \leq b$ και $p \in \partial B_r \Rightarrow V(p) \geq \alpha$
από αυτά τα δύο $\Rightarrow$ $\alpha \leq V(p) \leq b$, άτοπο εφόσον $b < \alpha$)
Επίσης Ω_b θετικά αναλλοίωτο, δηλαδή $x_0 \in \Omega_b \to x(t) \in \Omega_b$ $\forall t \geq 0$
(Εφόσον $\dot{V}(x) \leq 0$ $\forall x \in D$ τότε $V(x(t)) \leq V(x(0)) < b$ $\quad \forall t \geq 0$ αν $x(0) \in \Omega_b$)
Επομένως η λύση $x(t)$ είναι μοναδική και:
Ορίζεται $\forall t \geq 0$ και $x \in \Omega_b$ $\forall t \geq 0$
Επομένως $\exists \delta > 0$: $B_\delta \subseteq \Omega_b$
και αν $\underline{x}_0 \in B_\delta \Rightarrow x(t) \in \Omega_b \forall t \geq 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x(t) \in B_\varepsilon$ $\forall t \geq 0$ $\Rightarrow$ ευσταθεία

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 6/12/2018

(β) Θα δείξουμε ότι $\exists\, \delta > 0 : \underline{x}(t) \longrightarrow 0$ καθώς $t \longrightarrow \infty$

(δηλαδή $\|x(t)\| \leq \alpha \quad \forall\, t \geq T$)

Από το πρώτο μέρος $\forall\, \alpha > 0 \ \exists\, b > 0 : \underset{\{\underline{x} : V(x) \leq b\}}{\Omega_b} \subseteq B_\alpha = \{x : \|x\| < \alpha\}$

$\|\underline{x}\| \to \underline{0} \Leftarrow V(x) \longrightarrow 0 \quad t \longrightarrow \infty$

Ισχύει: $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall\, \underline{x} \in D \setminus \{0\}$

και επομένως $V(x) \downarrow$ επίσης

$V(x) \geq 0$ και επομένως $V(x) \to c \geq 0$

Έστω για αντίφαση $c > 0$ τότε $\exists\, d > 0$:

τέτοιο ώστε $B_d \subseteq \Omega_c$. Άρα $x(t) \notin B_d \ \forall\, t \geq 0$

Έστω $-\gamma = \max\{\dot{V}(x(t)) : d < \|x\| < r\}$

Ισχύει ότι $\gamma > 0$ εφόσον $0 \notin \{d < \|x\| < r\}$

Τότε $V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \underbrace{\dot{V}(x(\tau))}_{\leq -\gamma} d\tau \ \leq V(x(0)) - \gamma t < 0$ αν $t > \frac{V(x(0))}{\gamma}$

αντίφαση $\Longrightarrow c = 0$.

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) \end{pmatrix}$$

Σημείο ισορροπίας $(x_1, x_2) = (0, 0)$

Έστω $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

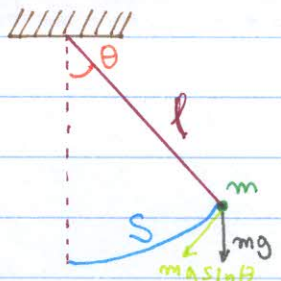
$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 2x_1(x_1(r^2-2) - 4x_1x_2^2) + 2x_2(4x_1^2 + x_2(r^2-2))$$

$$= 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2) < 0$$

$D = \{\|x\| < \sqrt{2}\} \Longrightarrow$ Ασυμπτωτική ευστάθεια.

Παράδειγμα: Εκκρεμές

$v = \frac{ds}{dt} = l\dot{\theta}$



$\dot{v} = l\ddot{\theta}$

Νεύτωνας $l m \ddot{\theta} = -mg\sin\theta + kl\dot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Έστω ότι ορίζω $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix}$$

Σ.Ι: $x_2 = 0 \Rightarrow \sin x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Σ.Ι $(0,0)$, $(\pi, 0)$

(1) $k=0$

$$V(\underline{x}) = \frac{g}{\ell}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}x_2^2 = g/\ell\,(1-\cos x_1) + 1/2\, x_2^2$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = g/\ell \cdot \sin x_1\, x_2 + x_2\left[-g/\ell \sin x_1\right] = 0 \leq 0$$

$\Rightarrow$ Ευστάθεια

(2) $k>0$

$$V(x) = g/\ell\,(1-\cos x_1) + 1/2\, x_2^2 > 0 \quad \forall\ (x_1, x_2) \neq (0,0),\quad D = \{-\pi/2 < x_1 < \pi/2\}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \dots = -\frac{k}{m}x_2^2 \leq 0$$ ($\dot{V}$ θετικά ημιορισμένη) $\Rightarrow$ Ευστάθεια

Καθολική Ευστάθεια

Θεώρημα: Έστω $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ τότε αν:

(1) $V(x) > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$

(2) $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(3) $V(\underline{x}) \to \infty$ καθώς $\|x\| \to \infty$

Τότε $\underline{x} = 0$ είναι καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές ($x \to 0\ \forall x_0$)

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) \Rightarrow \dot{\xi} = A\xi \qquad A = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial f_n/\partial x_1 & & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix}$$

$\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ $\Downarrow$ ασυμπτωτική ευστάθεια $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$

$\sigma(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq 0$ $\Downarrow$ αστάθεια