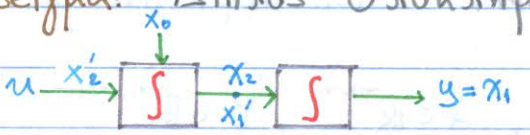
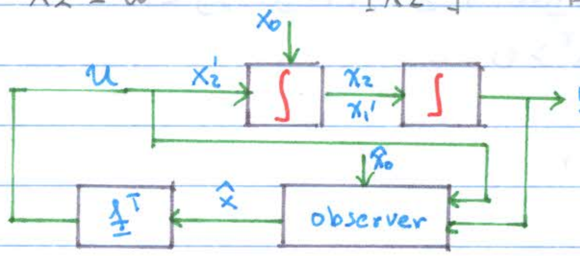
Μάθημα 13ο   Ε12. Θεωρία Ελέγχου   27/11/2018

Παράδειγμα: "Διπλός Ολοκληρωτής"



$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= u \end{aligned}\right\} \qquad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b} u$$



$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1' \\ \hat{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \quad (x_1 - \hat{x}_1)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1$$

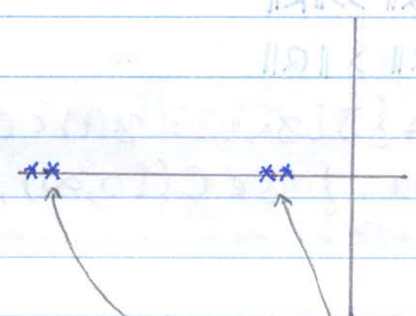
$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \quad , \; x_2' = u \\ \hat{x}_1' &= \hat{x}_2 - L_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{x}_2' &= u - L_2(x_1 - \hat{x}_1) \\ u &= f_1 \hat{x}_1 + f_2 \hat{x}_2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \hat{x}_1 \\ e_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1' = x_2 \quad , \quad x_2' = f_1(x_1 - e_1) + f_2(x_2 - e_2)$$

$$e_1' = x_1' - \hat{x}_1' = \underbrace{x_2 - \hat{x}_2}_{e_2} + L_1 \underbrace{(x_1 - \hat{x}_1)}_{e_1} \Rightarrow e_1' = L_1 e_1 + e_2$$

$$e_2' = x_2' - \hat{x}_2' = u - u + L_2 \underbrace{(x_1 - \hat{x}_1)}_{e_1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ e_1' \\ e_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & -f_1 & -f_2 \\ \hline 0 & 0 & L_1 & 1 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \end{array}\right]}_{A_c} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$



$$\varphi_{A_c} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -f_1 & \lambda - f_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - L_1 & -1 \\ -L_2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - f_2\lambda - f_1)(\lambda^2 - L_1\lambda - L_2)$$

Πρόβλημα LQR
(Linear, Quadric, Regulator) (σε άπειρο διάστημα)

Σύστημα : $\Sigma(A,B)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

"Συνάρτηση κόστους" : $J[\underline{x}_0, \underline{u}] = \int_0^\infty \{ \underline{x}^T(t) Q \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) R \underline{u}(t) \} dt$

$Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$

Υπόθεση 1: $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο

Υπόθεση 2: $\Sigma(A,Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο.
($\Sigma(A,Q^{1/2})$ πλήρως παρατηρήσιμο)

$Q = \mathcal{U}\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathcal{U}^T$ $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\Lambda_1) > 0$ $Q^{1/2} = \mathcal{U}\begin{bmatrix} \Lambda_1^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathcal{U}^T$

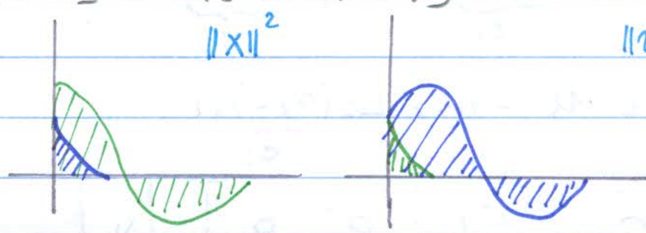
$Q^{1/2} \cdot Q^{1/2} = Q$

Πρόβλημα LQR: $\inf\{ J[\underline{x}_0, \underline{u}] : \underline{u} \in C([0,\infty), \mathbb{R}^m) \}$

Το πως κατανέμεται το κόστος εξαρτάται από τα R και Q

Αν $\|Q\| \gg \|R\|$

Αν $\|R\| > \|Q\|$



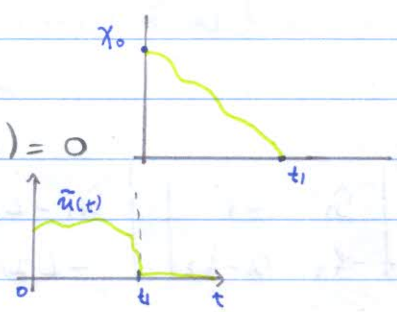
Λήμμα: (1) $\inf\{ J[\underline{x}_0, \underline{u}] : \underline{u}(t) \in C([0,\infty), \mathbb{R}^m) \} < \infty$

(2) Έστω $\mathcal{U} = \{ \underline{u} \in C([0,\infty), \mathbb{R}^m) : \underline{x}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \}$ τότε αν $J[\underline{x}_0, \underline{u}] < \infty$ $\Rightarrow \underline{u} \in \mathcal{U}$

"Απόδειξη"

(1) $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο $\Rightarrow \exists\, u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$: $\underline{x}(t_1) = 0$

Ορίζω $u(t) = \tilde{u}(t)$ $t \in [0, t_1]$
$= 0$ $t > t_1$



$J[\underline{x}_0, \underline{u}] = \int_0^{t_1} (x^T Q x + u^T R u)\, dt < \infty$

Ε12. Θεωρία Ελέγχου

27/11/2018

ή αλλιώς

$\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο $\exists\, F : A_c = A + BF \quad \sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$

$u(t) = Fx \Rightarrow \underline{x}' = A_c \underline{x} \Rightarrow x(t) = e^{A_c t} \underline{x_0} \Rightarrow u(t) = F e^{A_c t} \underline{x_0}$

$$J[x_0, \underline{u}] = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt = \underline{x_0}^T \left(\int_0^\infty e^{A_c^T t} (Q + F^T R F) e^{\overset{\sigma(A_c)}{A_c t}} dt \right) \underline{x_0} < \infty$$

2) Αν $J[\underline{x_0}, \underline{u}] < \infty \Rightarrow \|x\| \to 0$

Ορίζουμε $\Sigma(A, B, Q^{1/2}) : \left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= Q^{1/2} \underline{x} \end{aligned}\right\}$

Εφόσον $\Sigma(A, Q^{1/2})$ πλήρως παρατηρήσιμο $\exists\, L \in \mathbb{R}^{n \times m} : \sigma(A - LQ^{1/2}) \subseteq \mathbb{C}_-$

$$J[\underline{x_0}, \underline{u}] = \int_0^\infty \{ \underbrace{\underline{x}^T Q \underline{x}}_{x^T Q^{1/2} Q^{1/2} x \,=\, y^T y = \|y\|^2} + u^T R u \} dt = \int_0^\infty (\|y(t)\|^2 + \underline{u}^T R \underline{u}) dt < \infty$$

$\underline{y}(t) \to 0 \qquad \underline{u} \to 0$

Τότε μπορώ να γράψω:

$$\underline{x}' = (\underbrace{A - LQ^{1/2}}_{\sigma(\,) \in \mathbb{C}_-}) \underline{x} + L \underbrace{Q^{1/2} x}_{\underline{y}} + B \underline{u} = (A - LQ^{1/2}) \underline{x} + [L \;\; B] \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{u} \end{bmatrix}}_{\underline{\xi} \to 0} \Rightarrow \underline{x} \to 0$$

Θεώρημα: Η βέλτιστη λύση του προβλήματος LQR (υπό των υποθέσεων 1 και 2) υπάρχει, είναι μοναδική και της μορφής ανάδρασης καταστάσεων:

$\hat{\underline{u}}(t) = -\underbrace{R^{-1} B^T P}_{F} x(t)$ δηλαδή $J[\underline{x_0}, \hat{u}] \le J[\underline{x_0}, u] \;\; \forall\, \underline{u} \in C([0,\infty), \mathbb{R}^m)$

όπου $P = P^T > 0$ είναι η μοναδική θετικά ορισμένη $(P > 0)$ λύση της Αλγεβρικής Εξίσωσης Riccati (AER)

$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$ τέτοια ώστε

$A_c = A - BR^{-1}B^T P$ είναι Hurwitz $(\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-)$

Επιπλέον $J[\underline{x_0}, \hat{u}] = \underline{x_0}^T P \underline{x_0}$

Παρατήρηση: Αν $u = \hat{u}(t)$, τότε $\underline{x}' = A\underline{x} + B(-R^{-1}B^T P)x \Rightarrow \underline{x}' = \underbrace{A - BR^{-1}B^T P}_{A_c} \underline{x}$

$\Rightarrow \underline{x}(t) = e^{A_c t} \underline{x_0} \Rightarrow \hat{\underline{u}}(t) = F e^{A_c t} \underline{x_0}$

Μάθημα 14ο Ε12. Θεωρία Ελέγχου 29/11/2018

Θεώρημα: Η βέλτιστη λύση του προβλήματος LQR, όπου $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο και $\Sigma(A,Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο, υπάρχει, είναι μοναδική και της μορφής ανάδρασης καταστάσεων:
$\underline{\hat{u}}(t) = -R^{-1}B^T P \underline{x}(t)$ δηλαδή $J[\underline{x}_0,\underline{\hat{u}}] \leq J[\underline{x}_0,\underline{u}] \ \forall \underline{u} \in C([0,\infty),\mathbb{R}^m)$
όπου $P=P^T>0$ είναι η μοναδική θετικά ορισμένη $(P>0)$ λύση της Αλγεβρικής Εξίσωσης Riccati:
$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$ τέτοια ώστε $A_c = A-BR^{-1}B^TP$ είναι Hurwitz
Επιπλέον $J[\underline{x}_0,\underline{\hat{u}}] = \underline{x}_0^T P \underline{x}_0$

Απόδειξη:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $u \in \mathcal{U} := \{u \in C([0,\infty),\mathbb{R}^m) : \|\underline{x}\| \to 0\}$

Έχουμε $\int_0^\infty (\underline{x}^T(t) P \underline{x}(t))' dt = \lim_{t\to\infty} \cancel{\underline{x}^T P \underline{x}} - \underline{x}_0^T P \underline{x}_0$

Τότε $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \ \forall \underline{u} \in \mathcal{U}$

$$J[\underline{x}_0,\underline{u}] - \underline{x}_0^T P \underline{x}_0 = \int_0^\infty \underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u} + (\underline{x}^T P \underline{x})' dt$$

$$= \int_0^\infty \underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u} + \underbrace{(\underline{x}')^T}_{x^TA^T + u^TB} P \underline{x} + \underline{x}^T P \underbrace{\underline{x}'}_{Ax+Bu} dt$$

$$= \int_0^\infty \{ \underbrace{\underline{x}^T (Q + A^TP + PA)\underline{x}}_{\underline{x}^T PBR^{-1}B^T \underline{x}} + \underline{u}^T R \underline{u} + \underline{u}^T B^T P \underline{x} + \underline{x}^T P B \underline{u} \} dt$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{(\underline{u}^T + \underline{x}^T PBR^{-1})}_{\underline{\xi}^T} \underbrace{R}_{>0} \underbrace{(\underline{u} + R^{-1}B^TP\underline{x})}_{\underline{\xi}} dt \geq 0 \qquad \underline{x}_0^T P \underline{x}_0 \leq J[\underline{x}_0,\underline{u}] \ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R} \ \forall u \in \mathcal{U}$$

Επιλέγοντας

$\underline{\hat{u}} = R^{-1}B^T P \underline{x} \implies \underline{x}_0^T P \underline{x}_0 = J[\underline{x}_0,\underline{\hat{u}}]$

Θα δείξουμε ότι το $\underline{\hat{u}} \in \mathcal{U}$, δηλαδή ότι η λύση του $\begin{pmatrix} \underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{\hat{u}} \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{pmatrix}$

έχει την ιδιότητα $\underline{x} \to 0$ καθώς $t \to \infty$

Το σύστημα με $\underline{u} = \underline{\hat{u}}$

$\underline{x}' = A\underline{x} + B(-R^{-1}B^TP\underline{x}) \implies \underline{x}' = \overbrace{(A - BR^{-1}B^TP)}^{A_c}\underline{x}$ το οποίο $\to 0 \ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

αν και μόνο αν $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$

Η Αλγεβρική Εξίσωση Riccati $A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A^T - PBR^{-1}B^T)}_{A_c^T}P + P\underbrace{(A - BR^{-1}B^TP)}_{A_c} + PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

$$\Leftrightarrow A_c^TP + PA_c + \underbrace{PBR^{-1}B^TP}_{\geq 0} + \underbrace{Q}_{\geq 0} = 0$$

Έστω $\lambda \in \sigma(A_c)$ και $\underline{\xi} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{\xi} \neq 0$: $A_c \underline{\xi} = \lambda \underline{\xi}$

Τότε $\underline{\xi}^*(A_c^T P + PA_c + PBR^{-1}B^T P + Q)\underline{\xi} = 0 \iff \qquad (\underline{\xi}^* = (\bar{\underline{\xi}})^T)$

$$\underbrace{\underline{\xi}^* A_c^T}_{\bar{\lambda}\underline{\xi}^*} P \underline{\xi} + \underline{\xi}^* P \underbrace{A_c \underline{\xi}}_{\lambda \underline{\xi}} + \underline{\xi}^* PBR^{-1}B^T P \underline{\xi} + \underline{\xi}^* Q \underline{\xi} = 0 \iff$$

$$2\,\mathrm{Re}(\lambda) \underbrace{\underline{\xi}^* P \underline{\xi}}_{\geq 0} + \underbrace{\underline{\xi}^* PBR^{-1}B^T P \underline{\xi}}_{\geq 0} + \underbrace{\underline{\xi}^* Q \underline{\xi}}_{\geq 0} = 0 \implies$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \\ \text{ή} \\ \mathrm{Re}(\lambda) = 0 \quad \text{και} \quad B^T P \underline{\xi} = \underline{0} \quad \text{και} \quad Q\underline{\xi} = \underline{0} \end{cases}$$

Στη περίπτωση $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} (A - BR^{-1}B^T P)\underline{\xi} &= A\underline{\xi} = \lambda \underline{\xi} \qquad (\underline{\xi} \neq 0) \\ Q\underline{\xi} &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ Q \end{bmatrix} \underline{\xi} = 0 \quad (\text{Άτοπο γιατί } \Sigma(A,Q) \text{ π.π})$$

Επομένως $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_- \implies \hat{\underline{u}} \in \mathcal{U} \implies \min\{J[\underline{x}_0, \underline{u}], \underline{u} \in C([0,\infty), \mathbb{R}^m)\} = \underline{x}_0^T P \underline{x}_0$

Παρατήρηση: Αν υποθέσουμε ότι:

1) $\Sigma(A,B)$ σταθεροποιήσιμο

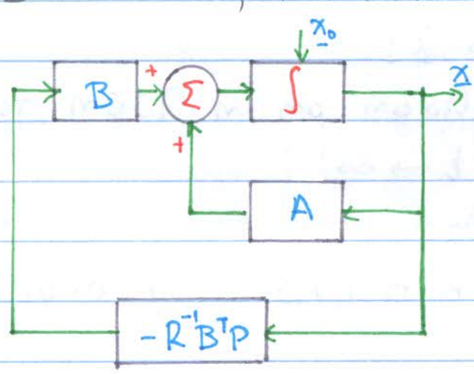
2) $\Sigma(A,Q)$ ανιχνεύσιμο τότε

Το θεώρημα ισχύει, με μόνη διαφορά ότι $P = P^T \geq 0$

Επισκόπηση

$\Sigma(A,B) \qquad J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\,dt \longrightarrow \min$

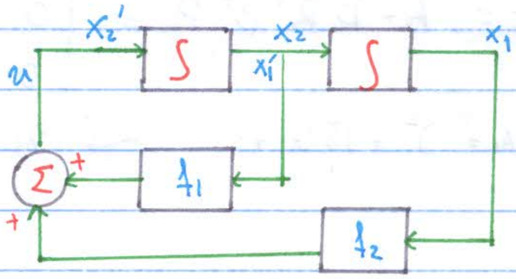
$\hat{u}(t) = -\underbrace{R^{-1}B^T P}_{F} x \qquad , \quad A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$



Ε.12 Θεωρία Ελέγχου 29/11/2018

Παράδειγμα: Σύστημα διπλού ολοκληρωτή

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{\underline{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{B}} u$$



$$\min \leftarrow J[\underline{x}_0, u] = \int_0^\infty x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty [x_1 \ x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u \underset{\uparrow R}{1} u \ dt$$

Πίνακας ελεγξιμότητας

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(\Gamma_c) = -1 \neq 0 \implies \Sigma(A, B) \text{ πλήρως ελέγξιμο}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ B & AB \end{array}$$

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}Q \\ \\ \}QA \end{matrix} \quad \text{rank}(\Gamma_o) = 2 \implies \Sigma(A, Q) \text{ πλήρως παρατηρήσιμο}$$

Η αλγεβρική εξίσωση Riccati: $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} [P_2 \ P_3]} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

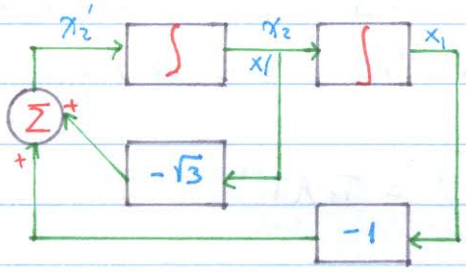
$P = P^T > 0 \iff P_1 > 0, \ P_3 > 0, \ P_1 P_3 - P^2 > 0$

$$\left.\begin{aligned} (1,1) &: -P_2^2 + 1 = 0 \\ (1,2) &: P_1 - P_2 P_3 = 0 \\ (2,2) &: 2P_2 - P_3^2 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} P_2^2 &= 1 & &\implies P_2 = 1 \\ P_1 &= P_2 P_3 & &\implies P_1 = P_3 \\ P_3^2 &= 2P_2 + 1 & &\implies P_3^2 = 3 \implies P_3 = \sqrt{3} = P_1 \end{aligned}$$

Άρα $P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$\hat{u} = -R^{-1}B^T P \underline{x} = -[0 \ 1] \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Άρα



$$A_c = A - BR^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{A_c} = \lambda^2 + \sqrt{3}\lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}$$

Επίλυση Αλγεβρικής Εξίσωσης Riccati (AER)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Πίνακας Hamiltonian : $H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

Ισχύουν:

(1) Η AER γράφεται ως $\begin{bmatrix} P & \vdots & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = 0$

(2) $\lambda \in \sigma(H) \Leftrightarrow -\lambda \in \sigma(H)$

(3) Κάτω από τις υποθέσεις : $\Sigma(A,B)$ πε και $\Sigma(A,Q)$ nn $\lambda \in \sigma(H) \Rightarrow Re(\lambda) \neq 0$

Επομένως $\sigma_+(H) = -\sigma_-(H)$ και $\exists\, T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}, T_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n} : \sigma(\Lambda) \subseteq \mathbb{C}_- :$

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

(4) $\det(T_1) \neq 0$

(5) $P = T_2 T_1^{-1}$ ικανοποιεί $P = P^T > 0$ και είναι η μοναδική λύση της AER:

$\sigma(A_c) = \sigma(A - BR^{-1}B^T P) \subseteq \mathbb{C}_-$

Απόδειξη:

(1) Απλές πράξεις $\quad\quad J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ συμπλεκτική ιδιότητα

(2) Ισχύει ότι $J^{-1} H J = -H^T \longrightarrow \sigma(H) = \sigma(J^{-1}HJ) = \sigma(-H^T) = \sigma(-H) = -\sigma(H)$

(5) $AT_1 - BR^{-1}B^T T_2 = T_1 \Lambda \Rightarrow A - BR^{-1}B^T \overbrace{(T_2 T_1^{-1})}^{P} = T_1 \Lambda T_1^{-1}$

$\sigma(A_c) = \sigma(A - BR^{-1}B^T P) \subseteq \mathbb{C}_-$ και

$-QT_1 - A^T T_2 = T_2 \Lambda \Rightarrow -Q - A^T T_2 T_1^{-1} = T_2 \Lambda T_1^{-1} \Rightarrow$

$-Q - A^T \underbrace{T_2 T_1^{-1}}_{P} = T_2 T_1^{-1} T_1 \Lambda T_1^{-1} = P(A - BR^{-1}B^T P)$