Μάθημα 12ο   Ε12. Θεωρία Ελέγχου   22/11/2018

Θεώρημα: Έστω $\Sigma(A,B)$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, πλήρως ελέγξιμο. Τότε $\exists\ F_0 \in\mathbb{R}^{m\times n}$ και $\underline{v}\neq 0$: $\Sigma(A+BF_0, B\underline{v})$ πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη:

$\exists\ \underline{v}\neq 0$ έτσι ώστε $B\underline{v}\neq\underline{0}$. Τότε θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία από διανύσματα $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}\subseteq\mathbb{R}^n$ (τα οποία ορίζονται από $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_{n-1}\}\subseteq\mathbb{R}^m$) ως εξής:

$\underline{e}_1 = B\underline{v}$

$\underline{e}_{j+1} = A\underline{e}_j + B\underline{u}_j \quad , \ j=1,2,\dots,n-1$

έτσι ώστε τα $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ βάση του $\mathbb{R}^n$

$$\Big(\underline{e}_1 = B\underline{v}\ ,\ \overset{\text{επιλέγω}}{\underline{u}_1} \longrightarrow \underline{e}_2,\ \overset{\text{επιλέγω}}{\underline{u}_2}\longrightarrow\underline{e}_3\ , \dots \underline{e}_k\ ,\ \overset{\text{επιλέγω}}{\underline{u}_k}\longrightarrow \underline{e}_{k+1}, \dots \underline{e}_{n-1}, \overset{\text{επιλέγω}}{\underline{u}_{n-1}}\rightarrow\underline{e}_n\ \Big)$$

Έστω ότι ο αλγόριθμος δεν ολοκληρώνεται, τότε $\exists\ k: 0<k<n$ ώστε $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\forall\ \underline{u}\in\mathbb{R}^m$:

$A\underline{e}_k + B\underline{u} \in \operatorname{span}\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k\} := E_0$

Αν επιλέξω $\underline{u}=0 \Longrightarrow A\underline{e}_k \in E_0$ ⊛ $\Longrightarrow B\underline{u}\in E_0 \quad \forall\, u\in\mathbb{R}^m\ (\mathcal{R}(B)\subseteq E_0)$

Επίσης $A\underline{e}_j = \underline{e}_{j+1} - B\underline{u}_j \quad j=1,2,\dots,k-1$: και επομένως $A\underline{e}_j\in E_0\ \forall j=1,2,\dots,k-1$ και επιπλέον $A\,\underline{e}_j\in E_0\ \ \forall j=1,2,\dots,k$ (από την ⊛) Επομένως ο E_0 είναι A-αναλλοίωτος

(αν $\underline{x}\in E_0$ τότε $\underline{x} = \sum_{j=1}^{k}\gamma_j e_j \Rightarrow A\underline{x} = \sum_{j=1}^{k}\gamma_j(Ae_j) \Rightarrow A\cdot E_0 \subseteq E_0$)

Εφόσων ο E_0 είναι A-αναλλοίωτος και περιέχει την εικόνα του B τότε $\mathcal{X}_c\subseteq E_0$ και έχω υποθέσει ότι είναι πλήρως ελέγξιμο $\mathcal{X}_c=\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow E_0=\mathbb{R}^n$ και $k=n$ άρα ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται.

Ορίζω γραμμική απεικόνιση $F_0 : \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$

$F_0\underline{e}_j = \underline{u}_j \qquad j=1,\dots,n$ τότε

$\underline{e}_{j+1} = A\underline{e}_j + BF_0\underline{e}_j = (A+BF_0)\underline{e}_j = (A+BF_0)^2\underline{e}_{j-1} = \dots = (A+BF_0)^j\underline{e}_1 = (A+BF_0)^j B\underline{v}$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma(A+BF_0, B\underline{v})$:

$\Gamma_c = [\,B\underline{v} \ \vdots\ (A+BF_0)B\underline{v}\ \vdots\ \dots\ \vdots\ (A+BF_0)^{n-1}B\underline{v}\,] = [\,e_1\ \vdots\ e_2\ \vdots\ \dots\ \vdots\ e_n\,]$

$\Rightarrow \det(\Gamma_c)\neq 0$ (επειδή $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ βάση του $\mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow \Sigma(A+BF_0, B\underline{v})$ πλήρως ελέγξιμο

Θεώρημα: Έστω $\Sigma(A,B)$ $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ και έστω $\mathbb{D}=\{\varphi(\lambda)\in\mathbb{R}[s] : deg(\varphi)=n\}$ Τότε $\forall\, d\in\mathbb{D}\ \exists\, F\in\mathbb{R}^{m\times n} : \varphi_{A+BF}(\lambda)=d(\lambda)$ αν και μόνο αν $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη:

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο, τότε $\exists\, F_0\in\mathbb{R}^{m\times n}$ και $\underline{v}\in\mathbb{R}^{m}$: $\Sigma(A+BF_0, B\underline{v})$ πλήρως ελέγξιμο. Επομένως $\forall\, d(\lambda)\in\mathbb{D}$ $\exists\, \underline{f}\in\mathbb{R}^{n}$: $\varphi_{(A+BF_0)+B\underline{v}\underline{f}^T}(\lambda)=d(\lambda)$

Επομένως αν $F=F_0+\underline{v}\,\underline{f}^T$ τότε $\varphi_{A+BF}(\lambda)=d(\lambda)$

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $\forall\, d\in\mathbb{D}\ \exists\, F : \varphi_{A+BF}(\lambda)=d(\lambda)$ και έστω (για αντίφαση) ότι $\Sigma(A,B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο τότε (από Λήμμα Kalman) $\forall\, F : \varphi_{A+BF}(\lambda)=\varphi^{F}(\lambda)\,\varphi^{o}(\lambda)$ όπου $\varphi^{o}(\lambda)$ σταθερό πολυώνυμο ανεξάρτητο του F

Ορισμός: $\Sigma(A,B)$ λέγεται "σταθεροποιήσιμο" (stabilisable) αν
$\exists\, F\in\mathbb{R}^{m\times n} : \sigma(A+BF)\subseteq\mathbb{C}_-=\{z\in\mathbb{C} : Re(z)<0\}$

(ειδικές περιπτώσεις $\sigma(A)\subseteq\mathbb{C}_-$ ή $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο)

Θεώρημα: Έστω $\Sigma(A,B)$ $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, τότε το $\Sigma(A,B)$ είναι σταθεροποιήσιμο αν και μόνο αν: $rank([sI-A \,\vdots\, B])=n\ \forall\, s\in\overline{\mathbb{C}}_+=\{z\in\mathbb{C} : Re(z)\geq 0\}$ (ισοδύναμα $\forall\, s\in\overline{\mathbb{C}}_+\cap\sigma(A)$)

Απόδειξη:

Έστω $\Sigma(A,B)\overset{Q}{\sim}\Sigma(\overbrace{Q^{-1}AQ}^{\hat{A}}, \overbrace{Q^{-1}B}^{\hat{B}})$
$$\hat{A}=\begin{array}{cc} n_c & n-n_c \\ \left[\begin{matrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ 0 & \hat{A}_{22}\end{matrix}\right] & \begin{matrix} n_c \\ n-n_c\end{matrix}\end{array} \qquad \hat{B}=\left[\begin{matrix}\hat{B}_1\\ 0\end{matrix}\right]\begin{matrix} n_c \\ n-n_c\end{matrix}$$

όπου $\Sigma(\hat{A}_{11},\hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο $\qquad n_c=rank(\Gamma_c)=dim(\mathcal{X}_c)$

Αν $F\in\mathbb{R}^{m\times n}$: $A+BF=Q\hat{A}Q^{-1}+Q\hat{B}\hat{F}Q^{-1}=Q(\hat{A}+\hat{B}\hat{F})Q^{-1}$

$F=\hat{F}Q^{-1}$ τότε $F\rightarrow\hat{F}$ είναι 1-1 και επίσης $\sigma(A+BF)=\sigma(\hat{A}+\hat{B}\hat{F})$

Επομένως $\Sigma(A,B)$ σταθεροποιήσιμο $\Leftrightarrow$ $\Sigma(\hat{A},\hat{B})$ σταθεροποιήσιμο

Αν $\hat{F}=[\hat{F}_1 \,\vdots\, \hat{F}_2]$, $\hat{F}_1\in\mathbb{R}^{m\times n_c}$, $\hat{F}_2\in\mathbb{R}^{m\times(n-n_c)}$ τότε

$$\hat{A}+\hat{B}\hat{F}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ 0 & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\ 0\end{bmatrix}[\hat{F}_1 \,\vdots\, \hat{F}_2]=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11}+\hat{B}_1\hat{F}_1 & \hat{A}_{12}+\hat{B}_1\hat{F}_2\\ 0 & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}$$

Και $\sigma(\hat{A}+\hat{B}\hat{F})=\underbrace{\sigma(\hat{A}_{11}+\hat{B}_1\hat{F}_1)}_{\subseteq\mathbb{C}_-}\cup\sigma(\hat{A}_{22})$

Άρα $\Sigma(\hat{A},\hat{B})$ είναι σταθεροποιήσιμο $\Leftrightarrow$ $\sigma(\hat{A}_{22})\subseteq\mathbb{C}_-$ $\Leftrightarrow$

Ε12. Θεωρία Ελέγχου

22/11/2018

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}[sI_{n-n_c} - \hat{A}_{22}] = n - n_c \quad \forall\ s \in \overline{\mathbb{C}}_+$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc:c} sI - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ 0 & sI - \hat{A}_{22} & \end{array}\right] = n \quad \forall\ s \in \overline{\mathbb{C}}_+$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}[sI_n - \hat{A} \,\vdots\, \hat{B}] = n \quad \forall\ s \in \overline{\mathbb{C}}_+$ (όμως $\hat{A} = Q^{-1}AQ$, $\hat{B} = Q^{-1}B$ άρα)

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}[sI - Q^{-1}AQ \,\vdots\, Q^{-1}B] = n \quad \forall\ s \in \overline{\mathbb{C}}_+$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}\left([Q^{-1}(sI - A) \,\vdots\, B]\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right) = n \quad \Leftrightarrow \operatorname{rank}[sI - A \,\vdots\, B] = n \ \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+$

Ορισμός: Έστω $\Sigma(A,C)$ $(\underline{x}' = A\underline{x}\,;\ \underline{y} = C\underline{x})$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Το $\Sigma(A,C)$ λέγεται "ανιχνεύσιμο" (detectable) αν $\exists\ L \in \mathbb{R}^{n\times p}: \sigma(A + LC) \subseteq \mathbb{C}_-$

Θεώρημα: (i) Το $\Sigma(A,C)$ $(\underline{x}' = A\underline{x}\,,\ \underline{y} = C\underline{x})$ είναι ανιχνεύσιμο αν και μόνο αν το $\Sigma(A^T, C^T)$ $(\underline{x}' = A^T\underline{x} + C^T\underline{u})$ είναι σταθεροποιήσιμο.
(ii) Το $\Sigma(A,C)$ ανιχνεύσιμο αν και μόνο αν $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall\ s \in \overline{\mathbb{C}}_+$

Απόδειξη: (i) $\Sigma(A,C)$ ανιχνεύσιμο $\overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \exists\ L: \sigma(A + LC) \subseteq \mathbb{C}_-$

$\Leftrightarrow \exists\ L: \sigma(A^T + C^T \underset{F}{\underset{\parallel}{L^T}}) \subseteq \mathbb{C}_- \Leftrightarrow \Sigma(A^T, C^T)$ σταθεροποιήσιμο

(ii) $\Sigma(A^T, C^T)$ σταθεροποιήσιμο $\Leftrightarrow \operatorname{rank}[sI - A^T \,\vdots\, C^T] = n \ \forall\ s \in \overline{\mathbb{C}}_+ \Leftrightarrow \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A \\ \hdashline C \end{bmatrix} = n \ \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+$

- $\Sigma(A,B)$ $(\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u})$
  - Πλήρως Ελέγξιμο $\begin{cases} \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\Gamma_c) = n \\ \Leftrightarrow \operatorname{rank}([sI - A \,\vdots\, B]) = n \ \forall\ s \in \mathbb{C} \ (\forall s \in \sigma(A)) \end{cases}$
  - σταθεροποιήσιμο $(\exists\ F: \sigma(A + BF) \subseteq \overline{\mathbb{C}}_+)$ $\Big\{ \Leftrightarrow \operatorname{rank}([sI - A \,\vdots\, B]) = n \ \forall\ s \in \overline{\mathbb{C}}_+$
- $\Sigma(A,C)$ $\begin{pmatrix} \underline{x}' = A\underline{x} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{pmatrix}$
  - Πλήρως Παρατηρήσιμο $\begin{cases} \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\Gamma_o) = n \\ \Leftrightarrow \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n \ \forall\ s \in \mathbb{C} \end{cases}$
  - ανιχνεύσιμο $(\exists\ L: \sigma(A + LC) \subseteq \mathbb{C}_-)$ $\Leftrightarrow \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n \ \forall\ s \in \overline{\mathbb{C}}_+$

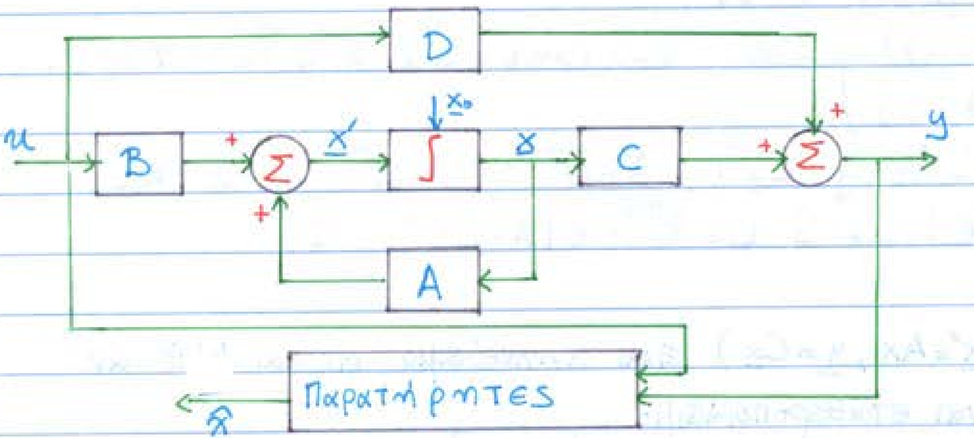
Παρατηρητές (Observers)

εκτιμητές κατάστασης

Έστω $\Sigma(A,B,C,D)$

$\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$ $\underline{x}(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$ $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$



Χρησιμοποιώντας την είσοδο u, και την έξοδο y στο διάστημα $[0,t]$ ο παρατηρητής κατασκευάζει μια εκτίμηση της κατάστασης $\hat{\underline{x}}(t)$ $t>0$

Θέλουμε $\|\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)\| \longrightarrow 0$, $t \longrightarrow \infty$

$\Sigma:$ $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$

$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$

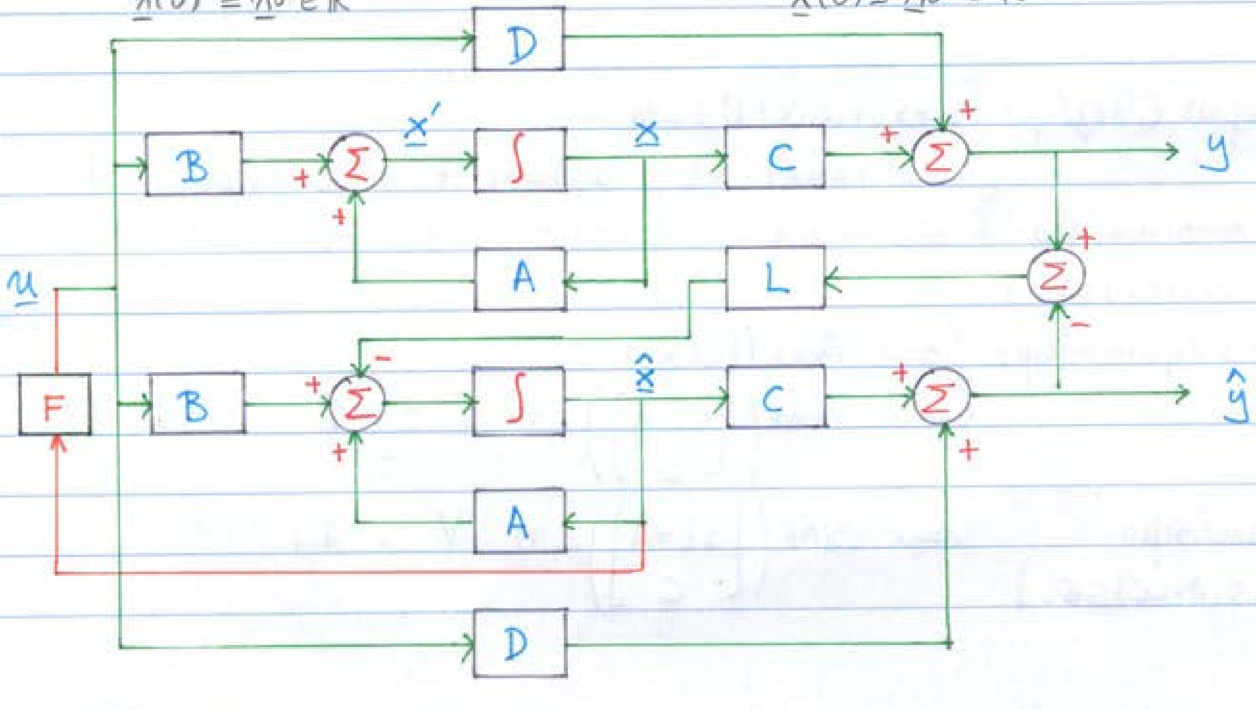
$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$\Sigma_0:$ $\hat{\underline{x}}' = A\hat{\underline{x}} + B\underline{u} - L(y - \hat{y})$

$\hat{\underline{y}} = C\hat{\underline{x}} + D\underline{u}$

$\hat{\underline{x}}(0) = \hat{\underline{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$

Άρα έχουμε



③

Ε12. Θεωρία Ελέγχου

22/11/2018

Ορίζω $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$ $\qquad \underline{e}_0 = \underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}(0) = \underline{x}_0 - \hat{x}_0$

$$\underline{e}'(t) = \underline{x}' - \hat{\underline{x}}' = A\underline{x} + B\underline{u} - (A\hat{\underline{x}} + B\underline{u} - L(C\underline{x} + D\underline{u} - C\hat{\underline{x}} - D\underline{u})) \iff$$

$$\underline{e}'(t) = A(\underbrace{\underline{x} - \hat{\underline{x}}}_{\underline{e}}) + LC(\underbrace{\underline{x} - \hat{\underline{x}}}_{e}) \Rightarrow e'(t) = (A + LC)\underline{e}(t)$$ (αυτόνομο σύστημα χωρίς είσοδο)

$$\Rightarrow \underline{e}(t) = \exp\{(A + LC)t\}\underline{e}_0 \qquad (\underline{x}(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0) : \underset{\sigma(A+LC) \subseteq \mathbb{C}_-}{\underline{e}(t) \xrightarrow[\Updownarrow]{} 0} \quad \forall \underline{e}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$\exists L : \sigma(A + LC) \subseteq \mathbb{C}_- \iff \Sigma(A, C)$ ανιχνεύσιμο

Το $\varphi_{A+LC}(\lambda)$ καθορίζεται αυθαίρετα αν και μόνο αν $\varphi_{A^T + C^TL^T}(\lambda)$ καθορίζεται αυθαίρετα αν και μόνο αν $\Sigma(A^T, C^T)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma(A, C)$ πλήρως παρατηρήσιμο

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} \\ \underline{x}(0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \Sigma_p \qquad \left.\begin{aligned} \hat{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} - L(\underline{y} - \hat{\underline{y}}) \\ \hat{\underline{y}} &= C\hat{\underline{x}} + D\underline{u} \\ \hat{\underline{x}}(0) &= \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} \Sigma_o$$

$$u = F\hat{x}(t)$$

Επιλέγω διάνυσμα κατάστασης το $\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{pmatrix}$ $\quad \underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$

$$\underline{e}' = (A + LC)\underline{e}$$

$$\underline{x}' = A\underline{x} + BF\hat{\underline{x}} = A\underline{x} + BF(\underline{x} - \underline{e}) = (A + BF)\underline{x} - BF\underline{e}$$

Το σύστημα κλειστού βρόχου περιγράφεται

$$\begin{pmatrix} x' \\ e' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A + LC \end{pmatrix}}_{A_c} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A_c) = \sigma(A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αυθαίρετα αν} \\ (A,B)\text{ πλήρως ελέγξιμο}}}{+} BF) \cup \sigma(A + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αυθαίρετα αν} \\ (A,C)\text{ πλήρως παρατηρήσιμο}}}{L}C)$$

"Αρχή του Διαχωρισμού"