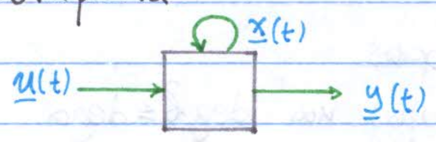
Μάθημα 6ο   Ε12. Θεωρία Ελέγχου   30/10/2018

Ισοδύναμα Συστήματα

$\Sigma(A, B, C, D)$

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} \end{aligned}\right\}$$



Έστω ότι ορίζω ένα νέο διάνυσμα κατάστασης $\tilde{\underline{x}}$ τέτοιο ώστε:

$\underline{x} = P\tilde{\underline{x}}$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\det(P) \neq 0$

Τότε $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u} = P\tilde{\underline{x}}' \implies P^{-1}A\underline{x} + P^{-1}B\underline{u} = \tilde{\underline{x}}' \implies$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\underline{x}}' &= P^{-1}AP\tilde{\underline{x}} + P^{-1}B\underline{u} \\ \underline{y} &= CP\tilde{\underline{x}} + D\underline{u} \end{aligned}\right\}$$

Τα δύο συστήματα έχουν τις ίδιες εξόδους για την είσοδο $\underline{u}(t)$

Ορισμός: Τα συστήματα λέγονται "ισοδύναμα" $\Sigma(A,B,C,D) \sim \Sigma(P^{-1}AP, P^{-1}B, CP, D)$ και ο μετασχηματισμός P λέγεται μετασχηματισμός ισοδυναμίας.

Επειδή P επιλέχθηκε αυθαίρετα $\implies \exists$ άπειρα ισοδύναμα συστήματα με το $\Sigma(A,B,C,D)$

Περιμένουμε οι σχέσεις εισόδου και εξόδου να παραμένουν αναλλοίωτες
$\implies$ Άρα και η συνάρτηση μεταφοράς περιμένουμε να παραμείνει αναλλοίωτη.

Στις καινούργιες συντεταγμένες θα έχω:

$$\hat{\tilde{G}}(s) = D + CP[sI - P^{-1}AP]^{-1}P^{-1}B = D + CP[P^{-1}(sI-A)P]^{-1}P^{-1}B =$$
$$= D + CP \cdot P^{-1}(sI-A)^{-1} \cdot P \cdot P^{-1}B = D + C(sI-A)^{-1}B = \hat{G}(s)$$

Επίσης $A \xrightarrow{P} P^{-1}AP \implies \sigma(A) = \sigma(P^{-1}AP)$

(μετασχηματισμός ομοιότητας) $\varphi_A(s) = \varphi_{P^{-1}AP}(s)$

Πραγματοποίηση Συστήματος

Πρόβλημα εύρεσης τετράδας πινάκων $\Sigma(A,B,C,D)$ γνωρίζοντας την συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

Εξετάζουμε την απλή περίπτωση που έχουμε συστήματα 1 εισόδου και 1 εξόδου

Συστήματα 1 εισόδου και 1 εξόδου

Έστω $\hat{g}(s) \in \mathbb{R}(s)$ μια συνάρτηση μεταφοράς

$\hat{g}(s) = \dfrac{\tilde{b}(s)}{\alpha(s)}$, $\tilde{b}(s), \alpha(s) \in \mathbb{R}[s]$ (πολυώνυμα) και $\deg \tilde{b} \leq \deg \alpha$

Έστω $\deg \alpha = \deg \tilde{b} = n$, τότε $\hat{g}(s) = \underset{\text{σταθερά}}{d} + \dfrac{b(s)}{\alpha(s)}$, $\alpha, b \in \mathbb{R}[s]$, $d \in \mathbb{R}$ και $\deg b < \deg \alpha = n$

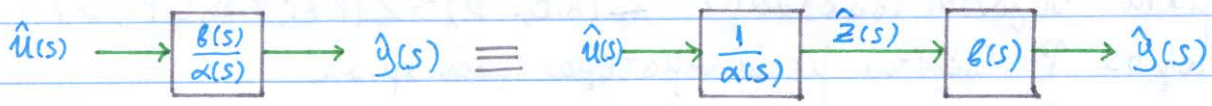
Το πρόβλημα ανάγεται στο να βρώ πραγματοποίηση του $\dfrac{b(s)}{\alpha(s)}$

(Με ενδιαφέρει να βρώ τους πίνακες A,B,C)

Γράφουμε αναλυτικά τα 2 πολυώνυμα

Έστω $\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$
$\quad\; b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0$ } χωρίς βλάβη της γενικότητας $\alpha_n = 1$

Σχηματικά μπορώ να γράψω το σύστημά μου:



Θα βρώ σε δύο βήματα τη συνάρτηση μεταφοράς. Πρωταρχικά εξετάζουμε το $\dfrac{1}{\alpha(s)}$

Το "πρώτο σύστημα"

$$\alpha(s)\cdot\hat{z}(s) = \hat{u}(s) \Longrightarrow (s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s_1 + \alpha_0)\hat{z}(s) = \hat{u}(s)$$

Αν αντιστρέψω τον μετασχηματισμό Laplace $\left(\mathcal{L}^{-1}(s\hat{z}(s)) = z'(t),\ \hat{z}(s) = \mathcal{L}(z(t)), \hat{u}(s) = \mathcal{L}(u(t))\right)$

$$\Longrightarrow z^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 z'(t) + \alpha_0 z(t) = u(t)$$

Ορίζω: $x_1 = z$
$\quad x_2 = z'$ και $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ έχουμε
$\quad \vdots$
$\quad x_n = z^{(n-1)}$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \cdot u(t)$$

Ο πίνακας A είναι σε μορφή "companion"

Και η τελευταία του γραμμή προκύπτει από τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αν τους πάρω με την ανάποδη σειρά και $-$. $\varphi(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 30/10/2018

$\hat{y}(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0)\hat{z}(s)$ αντιστρέφω και εδώ τον μετασχηματισμό Laplace

$\Rightarrow y(t) = b_0 z + b_1 z' + \dots + b_{n-1} z^{(n-1)}$ και με βάση τον ορισμό του διανύσματος κατάστασης.

$y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n \iff y(t) = \underbrace{[b_0 \ b_1 \dots b_{n-1}]}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{d} \cdot u$

Επομένως το $\dfrac{b(s)}{\alpha(s)} \sim \Sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [b_0, b_1 \dots b_{n-1}], 0 \right)$

(έχει πραγματοποίηση)

Το ζεύγος A, B είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητα.

Για το αρχικό σύστημα:

$$\frac{b(s)}{\alpha(s)} + d = \hat{g}(s) = \Sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [b_0 \ b_1 \dots b_{n-1}], d \right)$$

Παράδειγμα

Έστω συνάρτηση μεταφοράς μιας εισόδου και μιας εξόδου

$\hat{g}(s) = \dfrac{2s^2+s}{s^2+3s+2} = \dfrac{\tilde{b}(s)}{\alpha(s)}$ $\quad \deg(\tilde{b}) = \deg(\alpha) = 2$

Θέλουμε να την γράψουμε στη μορφή $\hat{g}(s) = d + \dfrac{\gamma s + \delta}{s^2+3s+2}$

$\hat{g}(s) = 2 + \dfrac{\gamma s + \delta}{s^2+3s+2} = \dfrac{2 \cdot s^2 + (6+\gamma)s + (\delta+4)}{s^2+3 \cdot s+2}$ $\quad \gamma + 6 = 1 \Rightarrow \gamma = -5$

$\delta + 4 = 0 \Rightarrow \delta = -4$

$\hat{g}(s) = 2 - \dfrac{5s+4}{s^2+3s+2} \Rightarrow \dfrac{-5s+4}{s^2+3s+2} \sim \Sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [-4 \ -5], 0 \right)$

$\hat{g}(s) \sim \Sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [-4 \ -5], 2 \right)$

Ελεγξιμότητα / Παρατηρισιμότητα

Προκαταρκτικά

[A] Θετικά ορισμένοι / ημι-ορισμένοι Πίνακες

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Θα λέμε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος $(A > 0) \overset{\text{ορς}}{\iff} \underline{x}^T A \underline{x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και θετικά ημιορισμένος $(A \geq 0) \overset{\text{ορς}}{\iff} \underline{x}^T A \underline{x} \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρώ $A = A^T$

Γενικά $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{B} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{\Gamma}$ $\quad B = B^T$ (συμμετρικός)

$\Gamma = -\Gamma^T$ (αντισυμμετρικός) $\Rightarrow \underline{x}^T \Gamma \underline{x} = 0$

Επομένως $\left.\begin{matrix} \underline{x}^T A \underline{x} > 0 \\ \forall\, x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \underline{x}^T (A+A^T)\underline{x} > 0 \\ \forall\, \underline{x} \neq 0 \end{matrix}\right\}$

και θα ορίσουμε

$S_+^n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^T > 0\} \subseteq S^n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^T\}$, επίσης $\bar{S}_+^n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^T \geq 0\}$

Ο S^n είναι διανυσματικός χώρος του $\mathbb{R}^{n\times n}$ διάστασης $n(n+1)/2$

Ιδιότητες

(1) S_+^n και $\bar{S}_+^n$ είναι κυρτοί κώνοι στον χώρο $\mathbb{R}^{n\times n}$, δηλαδή

(i) $A, B \in S_+^n \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda) B \in S_+^n \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$

(ii) $A \in S_+^n \Rightarrow \lambda A \in S_+^n \quad \forall\, \lambda > 0$

(2) Αν $P \in S_+^n \Rightarrow \det(P) \neq 0$: Αν $\det(P) = 0 \Rightarrow \exists\, \underline{x} \neq 0 : P\underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x}^T P \underline{x} = \underline{0}$ Άτοπο.

(3) $P \in S_+^n \Rightarrow \sigma(P) \subseteq \mathbb{R}^+$

(4) $P \in \bar{S}_+^n$ τότε $\underline{x}^T P \underline{x} = 0 \Leftrightarrow P\underline{x} = 0$

(5) Έστω $Q(\tau) \in C([0,t], \mathbb{R}^{n\times n})$ (τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία συνεχείς συναρτήσεις)

και $P(t) = \int_0^t Q(\tau) Q^T(\tau)\, d\tau = P^T(t)$ $\quad (t>0)$ τότε $P(t)\underline{x} = 0 \Leftrightarrow Q(\tau)\underline{x} = 0 \;\forall\, \tau \in [0,t]$

Θεώρημα (Cayley-Hamilton)

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$ τότε $\varphi(A) = A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I = 0$

δηλαδή $A^n \in \operatorname{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$

Ορισμός: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $V \subseteq \mathbb{R}^n$ υπόχωρος, τότε ο V είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν $\forall\, \underline{x} \in V \Rightarrow A\underline{x} \in V$ $\quad (AV \subseteq V)$