ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

1. Θεωρούμε μια συνάρτηση f, η οποία ορίζεται στο διάστημα $[a,b]$, με τιμές θετικές, και υποθέτουμε ότι

$$\min_{a\le t\le b}|f(t)| = m_o, \quad \max_{a\le t\le b}|f^{(k)}(t)| = M_k, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

(α) Έστω $p_{n-1}(f;\cdot)$ το πολυώνυμο βαθμού $\le n-1$ το οποίο παρεμβάλλεται στην f στα n σημεία του Chebyshev (ρίζες του πολυωνύμου T_n) ως προς το διάστημα $[a,b]$. Βρείτε μια εκτίμηση για το μέγιστο σχετικό σφάλμα $r_n = \max_{a\le t\le b}\left|\dfrac{f(t)-p_{n-1}(f;t)}{f(t)}\right|$.

(β) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα του (α) στη συνάρτηση $f(t)=\ln t$ στο διάστημα $I_r = \{e^r \le t \le e^{r+1}\}$, r ακέραιος, $r\ge 1$. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι $r_n \le \alpha(r,n)c^n$, $0<c<1$.

2. Το σφάλμα της γραμμικής παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα σημεία x_0, x_1 δίνεται από τον τύπο

$$f(x)-p_1(f;x) = (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi(x))}{2}, \quad x_0<x<x_1,$$

υπό την προϋπόθεση ότι η $f\in C^2[x_0,x_1]$. Να βρεθεί το $\xi(x)$ αναλυτικά στην περίπτωση $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$, $x_1=2$ και να υπολογισθούν τα $\max_{1\le x\le 2}\xi(x)$ και $\min_{1\le x\le 2}\xi(x)$.

3. Θεωρούμε την τετραγωνική παρεμβολή στα ισαπέχοντα σημεία x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$. Βρείτε ένα άνω φράγμα για το $\|f-p_2(f;\cdot)\|_\infty$ ως προς τα $\|f'''\|_\infty$ και h.

4. Δείξτε ότι η δύναμη x^n στο διάστημα $-1\le x\le 1$ μπορεί να προσεγγισθεί ομοιόμορφα από ένα γραμμικό συνδυασμό των δυνάμεων $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ με σφάλμα $\le 2^{-(n-1)}$.

5. Αν λ_n και Λ_n είναι η συνάρτηση και η σταθερά του Lebesgue για το πολυώνυμο παρεμβολής $p_n(f;\cdot)$ στα διακριτά σημεία $x_i\in[a,b]$, $i=0,1,\ldots,n$, δείξτε ότι η ανισότητα

$$\|p_n(f;\cdot)\|_\infty \le \Lambda_n\|f\|_\infty \text{ για όλες τις } f\in C[a,b],$$

μπορεί να γίνει ισότητα για κάποια $f=\phi\in C[a,b]$.

Υπόδειξη: Έστω $\|\lambda_n\|_\infty = \lambda_n(x_\infty)$. Θεωρήστε την κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση $\phi\in C[a,b]$ τέτοια ώστε $\phi(x_i) = \mathrm{sign} l_i(x_\infty)$, $i=0,1,\ldots,n$.

6. Δείξτε ότι $S_m^m(\Delta) = \mathbb{P}_m$.

7. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\le x\le x_i, \\[2ex] \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i\le x\le x_{i+1}, \quad i=1,2,\ldots,n, \\[2ex] 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

όπου $x_0=x_1$ και $x_{n+1}=x_n$ (οπότε, για $i=1$ λείπει η πρώτη εξίσωση και για $i=n$ η δεύτερη), αποτελούν βάση του χώρου $S_1^0(\Delta)$.

8. Έστω $\Delta = [0,1] \cup [1,2] \cup [2,3]$ μια διαμέριση του διαστήματος $[0,3]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση s με

$$s(t) = \begin{cases} 2 - t(3 - 3t + t^2), & 0 \le t \le 1, \\ 1 & 1 < t \le 2, \\ \dfrac{1}{4}t^2(3-t), & 2 < t \le 3. \end{cases}$$

Σε ποιά κλάση $S_m^k(\Delta)$ ανήκει η s;

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ (t-1)^4, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

(α) Προσεγγίστε την f στο διάστημα $[0,2]$ με μία τμηματικά πολυωνυμική συνάρτηση p της μορφής

$$p(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ \alpha + \beta(t-1) + \gamma(t-1)^2 + \delta(t-1)^3, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ υποθέτοντας ότι $p \in C^1[0,2]$ και ότι $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p(1) = f(1)$, $p(2) = f(2)$, $p'(2) = f'(2)$.

(β) Συμπίπτει η συνάρτηση p με την παρεμβάλλουσα κυβική spline s της f στα σημεία $\{0,1,2\}$ με συνοριακές συνθήκες $s'(0) = f'(0)$, $s'(2) = f'(2)$;