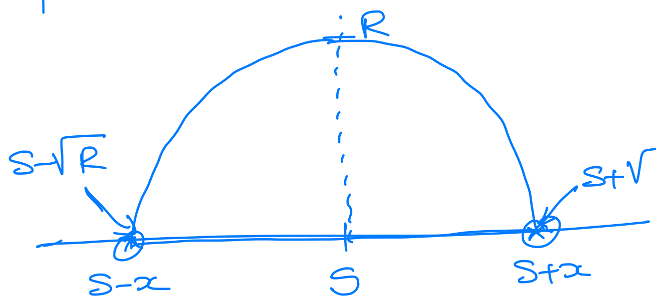
2021-10-13

Μονοπώλιο

Παραγωγός θα τοποθετήσει ένα κατάστημα στη θέση s, κι θα βάλει τιμή πώλησης p.

Έστω η περίπτωση που $b-a \to \infty$

Το κατάστημα τοποθετείται στη θέση s



Αν $p=0$. θα αυξήσει τους πελάτες με $s-x \le t \le s+x$

$s+x$: $\quad R-(s+x-s)^2=0 \Rightarrow R-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{R}$

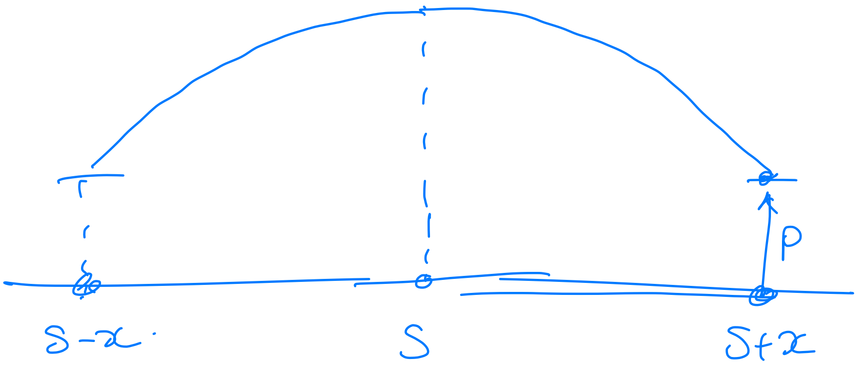
το μέγιστο μέγεθος αγοράς που μπορεί να κερδίσει

$= 2x = 2\sqrt{R}$

Έστω ότι ο παραγωγός προσδιορίζει <u>το x</u>

έτσι ώστε να <u>μεγιστοποιήσει τα</u> έσοδα

(περιμένουμε $x<\sqrt{R}$)



$\forall\, x$: οι πιο απομακρυσμένοι πελάτες (2) βρίσκονται σε απόσταση x

έχουν ωφέλεια $R-p-x^2=0 \Rightarrow p(x)=R-x^2$

Έσοδα $R(x) = \underbrace{2x}_{\text{ζήτηση}} \cdot p(x) = 2x(R-x^2) = 2Rx-2x^3$

$R'(x)=2R-6x^2$, $R''(x) = -12x<0 \quad (x>0)$

$R(x)$: κοίλη $\Rightarrow$ max για $R'(x)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R-3x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{R}{3} \Rightarrow \boxed{x^*=\frac{\sqrt{3R}}{3}}$$

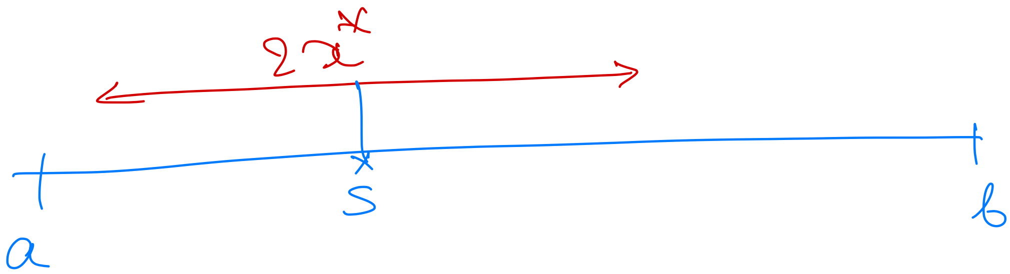
$$p^*=R-\frac{R}{3}=\frac{2}{3}R \Rightarrow \boxed{p^*=\frac{2R}{3}}$$

Αν θεωρήσουμε αγορά $[a, b]$

(1) $b-a > 2x^* \Rightarrow$ η προηγ. λύση βέλτιστη

$$p^* = 2R/3$$

$$2x^* - b - a \Rightarrow \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{R} < b-a}$$



Το s είναι οποιοδήποτε τέτοιο ώστε

$$s - x^* > a \;,\quad s + x^* < b \Rightarrow$$

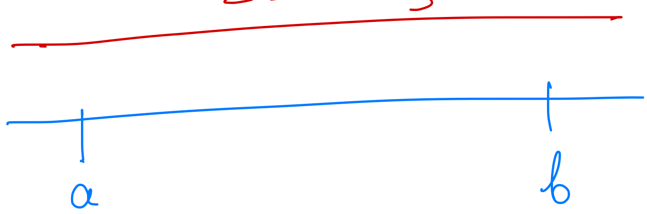
$$\Rightarrow \underline{a + x^*} < s < \underline{b - x^*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a + \frac{\sqrt{R}\sqrt{3}}{3} < s < b - \frac{\sqrt{R}\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boxed{p = \frac{2R}{3}}$$

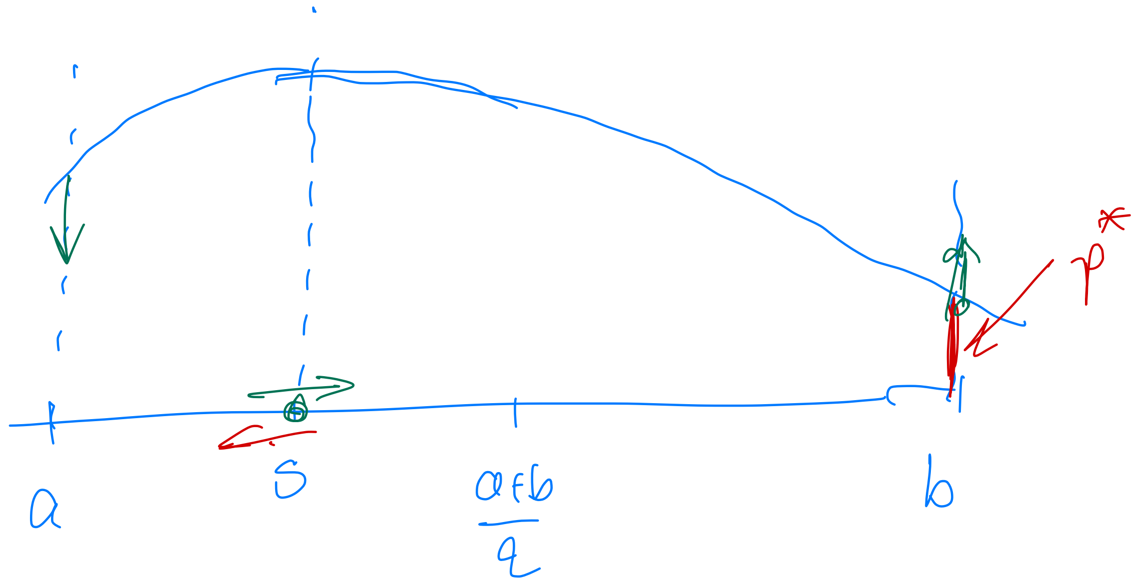
② Αν $b-a < 2\sqrt{3R}$

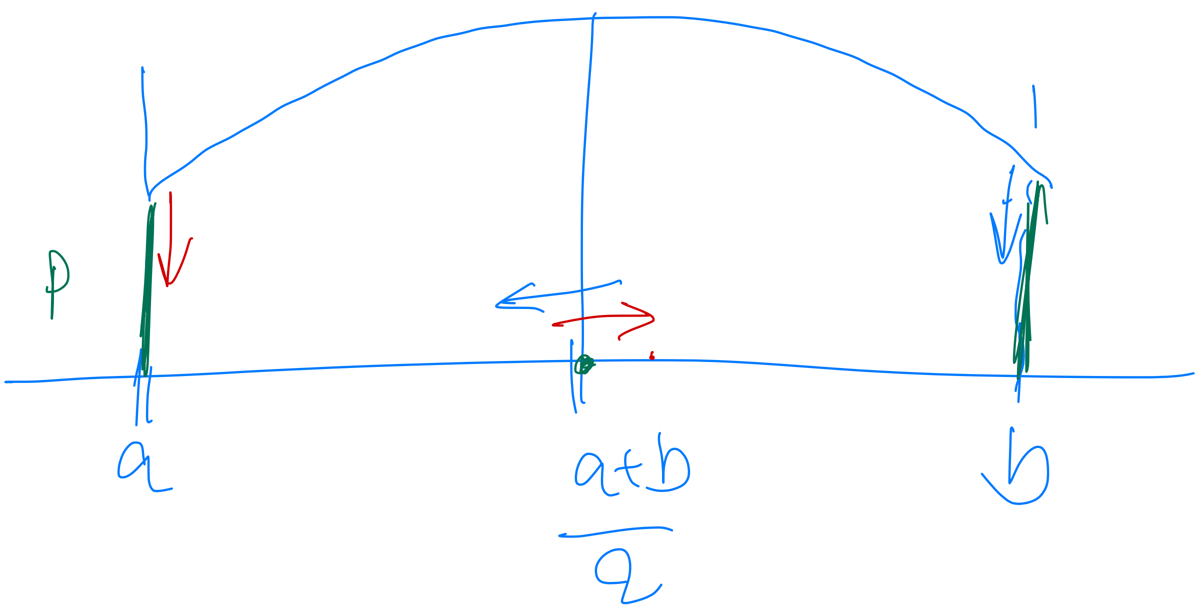
$$2x^* = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$



Αν p τιμή πώλησης

$R(p) = p\,\underline{(b-a)}$ $\Longrightarrow$ πρέπει να βρούμε τη μέγιστη δυνατή τιμή.





Επομένως $\boxed{S^* = \frac{a+b}{2}}$

p : $R - p - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{p^* = R - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$

B Δυοπώλιο

2 παραγωγοί

① Τοποθετούν τα καταστήματά τους στις θέσεις s_1, s_2 $(s_1 < s_2)$

② κ' θέτουν τιμές p_1, p_2 [ταυτόχρονα κ' ανεξάρτητα]

Σημείο ή σημεία ισορροπίας Nash.

(s_1, p_1) (s_2, p_2) στρατηγικές

Οι τιμές καθορίζονται σε δεύτερο στάδιο αφού πρώτα καθοριστούν οι τοποθεσίες (s_1, s_2) οι οποίες δεν μπορούν να αλλάξουν.

Παίγνιο δύο σταδίων

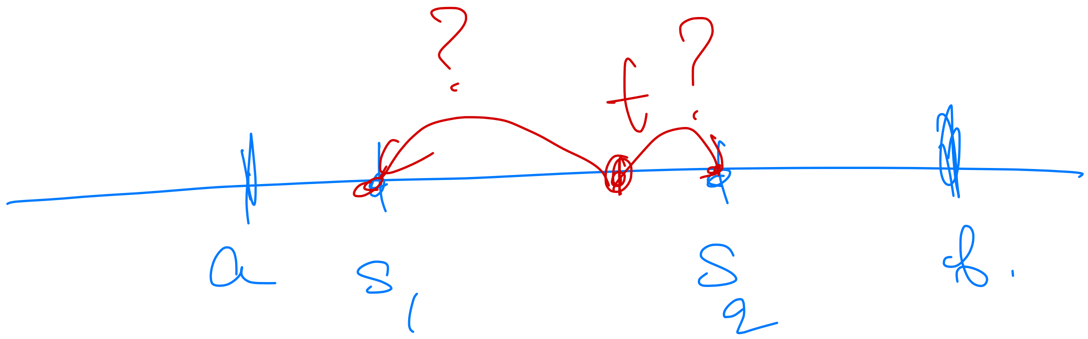
Στάδιο 1: s_1, s_2

Στάδιο 2: Δοθέντων $\underline{s_1, s_2} \Longrightarrow \underline{p_1, p_2}$

Στάδιο 2   Έστω $s_1 < s_2$ δεδομένα

(επιτρέπουμε $s_1 < a$, $s_2 > b$)

Αν θέσουν τιμές p_1, p_2



Ποιοι προτιμούν το s_1?

Εκείνα τα t : $R - p_1 - (t-s_1)^2 \ge R - p_2 - (t-s_2)^2$

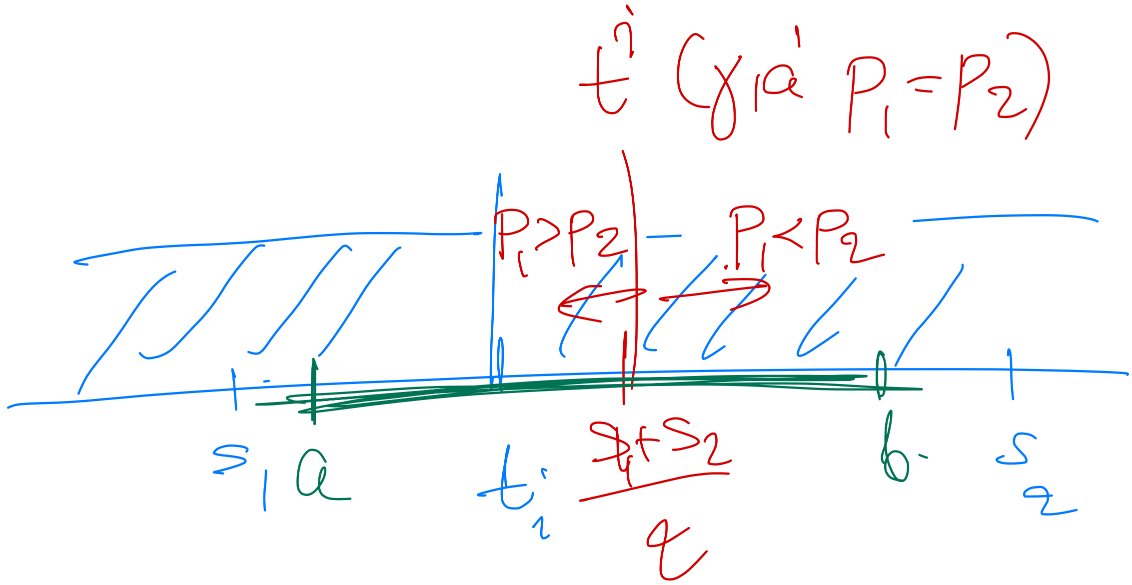
$$\iff (t-s_1)^2 - (t-s_2)^2 \le p_2 - p_1$$

$$\iff 2(s_2-s_1)t + s_1^2 - s_2^2 \le p_2 - p_1$$

$$\iff \boxed{t \le \frac{p_2-p_1}{2(s_2-s_1)} + \frac{s_1+s_2}{2} = t^*}$$

$$t^i = \frac{s_1+s_2}{2} + \frac{p_2-p_1}{2(s_2-s_1)}$$

(αν $p_1=p_2 \Rightarrow t^i = \frac{s_1+s_2}{2}$)



Αν $t_i<a \Rightarrow$ όλη η αγορά στον 2

Αν $t_i>b \Rightarrow$ " " " " 1

Κέρδη

c = κόστος παραγωγής

$$\Pi_1 = \frac{\left(t^{i}(p_1,p_2) - a\right)}{b-a}(p_1 - c) =$$

$$\Pi_2 = \frac{b - t^{i}(p_1,p_2)}{b-a}(p_2 - c)$$

$$\frac{\Pi_1(p_1,p_2)}{\Pi_2(p_1,p_2)}$$ ισορροπία ? (κοινές τιμές p_1, p_2 αντίστ.)

(p_1^e, p_2^e) σημείο ισορροπίας

$$\max_{p_1} \Pi_1(p_1, p_2^e) = \Pi_1(p_1^e, p_2^e)$$

$$\max_{p_2} \Pi_2(p_1^e, p_2) = \Pi_2(p_1^e, p_2^e)$$

Στάδιο 1

Αν τοποθετηθούν σε s_1, s_2 γνωρίζουν ότι στο δεύτερο στάδιο οι τιμές θα είναι p_1^*, p_2^* κ' τα μερίδια αγοράς m_1^*, m_2^*

Επομένως τα κέρδη:

$$\Pi_1(s_1, s_2) = m_1^* \cdot (p_1^* - c)$$

$$= \frac{2}{9} \frac{s_2 - s_1}{b-a} \left(b - 2a + \frac{s_1 + s_2}{2}\right)^2 \leftarrow$$

$$\Pi_2(s_1, s_2) = m_2^* \cdot (p_2^* - c) =$$

λάθος

$$\rightarrow \quad = \frac{2}{9} \frac{s_2 - s_1}{b-a} \left(2b - a - \frac{s_1 + s_2}{2}\right)^2$$

Ανάλυση ισορροπίας ως προς s_1, s_2

Συνθήκες ισορροπίας Nash

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial s_1}(s_1, s_2) &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial s_2}(s_1, s_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{σύστημα } (s_1, s_2)$$

$$\left\{\begin{aligned} s_1^* &= \frac{5a-b}{4} \\ s_2^* &= \frac{5b-a}{4} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} p_1^* - c &= \frac{3(b-a)^2}{2} \\ p_2^* - c &= \frac{3(b-a)^2}{2} \end{aligned}$$

<u>στάδιο 1</u> στάδιο 2

<u>Παρατήρηση</u>

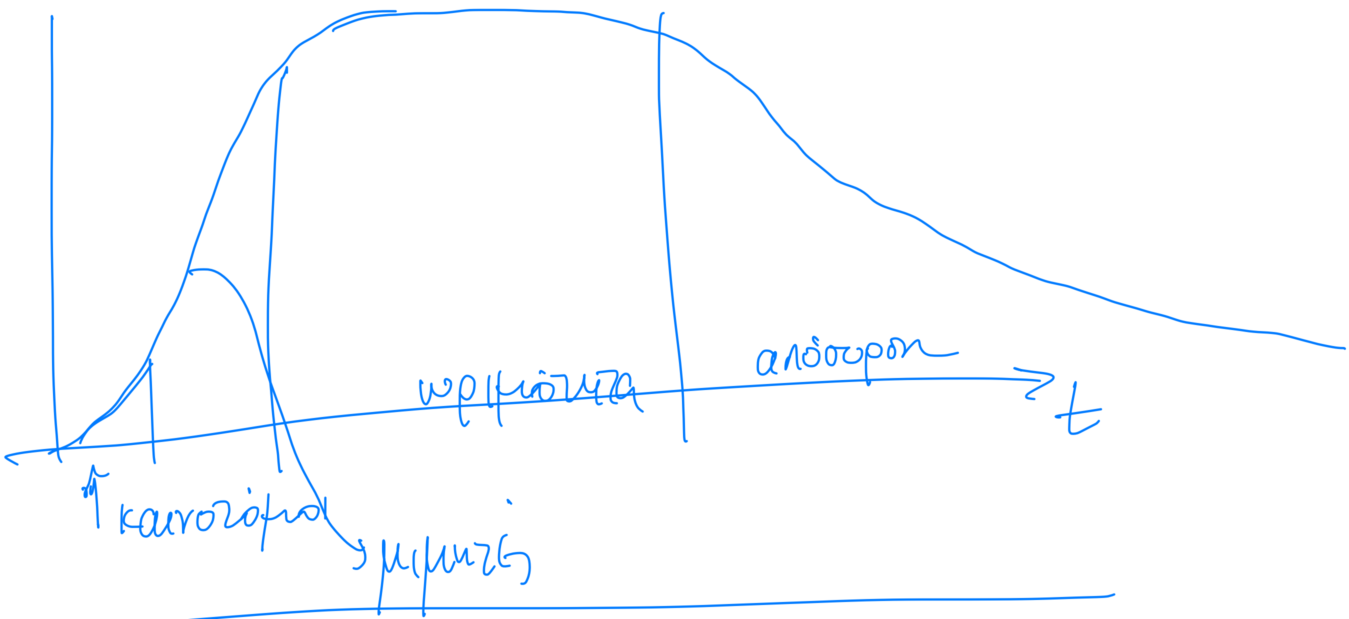
$$s_1^* = \frac{5a-b}{4} < a$$

$$s_2^* = \frac{5b-a}{4} > b$$

Μοντέλα πωλήσεων για νέα προϊόντα (κεφ. 10)

Νέο προϊόν

- νέα κατηγορία προϊόντων
- νέα μάρκα
- νέο μοντέλο



Καινοτομία Σε κάθε περίοδο αγοράζει το προϊόν ένα ποσοστό ατόμων που δεν το έχουν ήδη αγοράσει.
(οι πιο καινοτόμοι από αυτούς που δεν το έχουν αγοράσει).

Μίμηση Το ποσοστό αυτών που αγοράζουν είναι ανάλογο όσων έχουν ήδη αγοράσει.

Ορολογία - Μαθηματικό Πλαίσιο

Μοντέλα → διακριτού χρόνου
περίοδοι $n = 1, 2, 3, \dots$

→ συνεχούς χρόνου t : χρόνος

M = μέγεθος αγοράς (όσοι τελικά θα αγοράσουν το προϊόν)

Διακριτός χρόνος

Q_n = πωλήσεις κατά την περίοδο n

S_n = συνολικές πωλήσεις στις περιόδους $1, 2, \dots, n$

$$(S_0 = 0) \quad S_n = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_{j=1}^{n} Q_j = S_{n-1} + Q_n$$

$$Q_n = S_n - S_{n-1}$$

$M - S_n$ = αγορά που δεν έχει ακόμα υλοποιηθεί σε πωλήσεις (υπόλοιποι πελάτες).

Συνεχής χρόνος

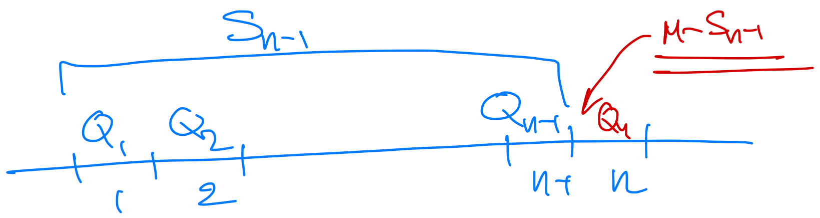
$S(t)$ = συνολικές πωλήσεις στο διάστημα $[0, t]$

$Q(t)$ = στιγμιαίος ρυθμός πωλήσεων τη στιγμή t

$$Q(t) = \frac{dS(t)}{dt}, \quad S(t) = \int_0^t Q(u)\,du \quad (S(0)=0)$$

① Μοντέλο Καινοτομίας (Fourt and Woodlock).

Διακριτός χρόνος $\quad Q_n = r(M - S_{n-1})$, $0<r<1$ (συντ. καινοτομίας)



∃ κλειστοί τύποι για Q_n, S_n?

$S_n - S_{n-1} = r(M - S_n)$ ← εξ. διαφορών

n=1 : $S_0 = 0$, $Q_1 = r(M - S_0) = rM$, $S_1 = Q_1 = rM$

n=2 : $S_1 = rM$, $Q_2 = r(M - S_1) = r(M - rM) = r(1-r)M$

$\Rightarrow S_2 = S_1 + Q_2 = rM + r(1-r)M = r(1+1-r)M = S_2$

$M - S_2 = M - rM - r(1-r)M = (1-r)M - r(1-r)M = \boxed{(1-r)^2 M}$

n=3 : $Q_3 = r(M - S_2) = \boxed{r(1-r)^2 \cdot M}$

(δείξτε το) ⇒ ... $M - S_3 = \boxed{(1-r)^3 M}$

Φαίνεται pattern:

$$\boxed{\begin{aligned} M - S_n &= (1-r)^n \cdot M \\ Q_n &= r(1-r)^{n-1} \cdot M \end{aligned}}$$

⇐ δείξτε το με επαγωγή

άσκηση

Συνεχής χρόνος

$$Q(t) = r\,(M - S(t)) \qquad (r>0)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = r\,(M - S(t))$$

διαφ. εξίσωση με αρχική τιμή $S(0)=0$.

$$\frac{dS}{M-S} = r\,dt \Rightarrow -\frac{d(M-S)}{M-S} = r\,dt$$

$$d\ln(M-S) = -r\,dt \Rightarrow \ln(M-S) = -rt + C \Rightarrow$$

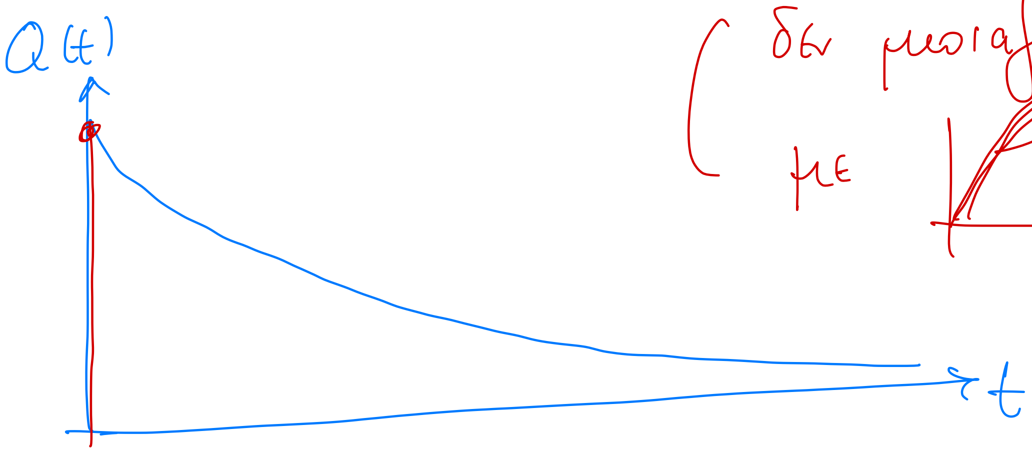
$$\Rightarrow M - S = e^{-rt+C} = K e^{-rt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(t) = M - K e^{-rt}$$

$$S(0) = M - K = 0 \Rightarrow K = M$$

$$S(t) = M\left(1 - e^{-rt}\right) \Rightarrow M - S(t) = M e^{-rt} = M\left(e^{-r}\right)^t$$

$$Q(t) = \frac{dS}{dt} = rM e^{-rt}$$



(δεν μοιάζει με

)

② Μοντέλο Μίμησης (Fisher and Pry)

Διακριτός χρόνος : $Q_n = (\%)(M - S_{n-1})$

$$= b \cdot \frac{S_{n-1}}{M} \cdot (M - S_{n-1})$$

Συνεχής χρόνος $\quad Q(t) = \boxed{b \cdot \frac{S(t)}{M}\left(M - S(t)\right) = \frac{dS}{dt}}$ ①

Έστω $f(t) = \frac{S(t)}{M}$ = % αγοράς που έχει υιοθετηθεί μέχρι τη στιγμή t.

$$S(t) = M f(t)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = M \frac{df}{dt}$$

① $M \cdot \frac{df}{dt} = b \cdot f\,(M - Mf) = b f M (1-f)$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = b f (1-f)}$$

$$\frac{df}{f(1-f)} = b\,dt$$

$$\frac{1}{f(1-f)}$$ σε απλά κλάσματα - - - -