ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 5

Άσκηση 1 / Φυλλάδιο 5

(a) $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)^T$ βέλτιστη απάντηση στην $\underline{y}^0$ $\Leftrightarrow$

$\forall i : x_i^0 > 0$ η $\underline{e}_i = (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$ είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{y}^0$

↑ i καθαρή στρατηγική, ↑ i θέση

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω $\underline{x}^0$ βέλτιστη απάντηση στην $\underline{y}^0$ $\Rightarrow$

$$\underline{x}^{0T} A \underline{y}^0 \geq \underline{x}^T A \underline{y}^0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{P}^m \Rightarrow$$

$$\underline{x}^{0T} A \underline{y}^0 = \max_{\underline{x} \in \mathbb{P}^m} \underline{x}^T A \underline{y}^0 = M$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\underline{e}_i^T A \underline{y}^0 = M \quad \forall i : x_i^0 > 0$

$\Leftrightarrow \quad A_{i \cdot} \underline{y}^0 = M \quad \forall x_i^0 > 0$

Έστω ότι $\exists i_1 \in \{1, \dots, m\}$ με $x_{i_1}^0 > 0$: $A_{i_1 \cdot} \underline{y}^0 < M$

Τότε επειδή

$$\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix} = x_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$x_1^0 \underline{e}_1 + x_2^0 \underline{e}_2 + \dots + x_m^0 \underline{e}_m$$

Έχουμε $M = \underline{x}^{0T} A \underline{y}^0 = \sum_{i=1}^m x_i^0 \underline{e}_i^T A \underline{y}^0 = \sum_{i=1}^m x_i^0 A_{i \cdot} \underline{y}^0 <$

$$M \sum_{i=1}^m x_i^0 = M \Leftrightarrow M < M \quad \text{άτοπο}$$

άρα $\forall i : x_i^0 > 0$ η i καθαρή στρατηγική είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{y}^0$

($\Leftarrow$) Έστω $\forall x_i^0 > 0$ η i καθαρή στρατηγική $\underline{e}_i$ είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{y}^0$ $\Rightarrow$

$$\underline{e}_i^T A \underline{y}^0 = \max_{\underline{x} \in \mathbb{P}^m} \underline{x}^T A \underline{y}^0 = M$$

Τότε $\underline{x}^{0T} A \underline{y}^0 = \sum_{i=1}^m x_i^0 \underline{e}_i^T A \underline{y}^0 = M \sum_{i=1}^m x_i^0 = M$ άρα $\underline{x}^0$ βέλτιστη απάντηση στην $\underline{y}^0$

(B) $\tilde{s}_0^i$ βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{s}_0 \Leftrightarrow$

$\forall\, s_j^i \in S^i$ με $\tilde{s}_0^i(s_j^i) > 0$ είναι βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{s}_0$

Λύση

$(\Rightarrow)$ $\tilde{s}_0^i$ βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{s}_0 \Rightarrow$

$$\tilde{h}^i(\tilde{s}_0^i, \tilde{s}_0^{-i}) \geq \tilde{h}^i(\tilde{s}^i, \tilde{s}_0^{-i}) \quad \forall\, \tilde{s}^i \in \tilde{S}^i \Rightarrow$$

$$\tilde{h}^i(\tilde{s}_0^i, \tilde{s}_0^{-i}) = \max_{\tilde{s}^i \in \tilde{S}^i} \tilde{h}^i(\tilde{s}^i, \tilde{s}_0^{-i}) = M$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\tilde{h}^i(s_j^i, \tilde{s}_0^{-i}) = M \quad \forall\, j : \tilde{s}_0^i(s_j^i) > 0$

Έστω ότι $\exists\, j_1 : s_{j_1}^i \in S^i$ με $\tilde{s}_0^i(s_{j_1}^i) > 0 : \tilde{h}^i(s_{j_1}^i, \tilde{s}_0^{-i}) < M$

Τότε $$M = \tilde{h}^i(\tilde{s}_0^i, \tilde{s}_0^{-i}) = \sum_{j : s_j^i \in S^i} \tilde{s}_0^i(s_j^i)\, \tilde{h}^i(s_j^i, \tilde{s}_0^{-i}) < M \sum_{j : s_j^i \in S^i} \tilde{s}_0^i(s_j^i) = M$$

άρα $M < M$ άτοπο

Άρα $\forall\, j : \tilde{s}_0^i(s_j^i) > 0$ η s_j^i καθαρή στρατηγική του i παίκτη αποτελεί βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{s}_0$.

$\Leftarrow$ Έστω $\forall\, j : \tilde{s}_0^i(s_j^i) > 0$ η s_j^i καθαρή στρατηγική του i παίκτη είναι βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{s}_0 \Rightarrow$

$$\tilde{h}^i(s_j^i, \tilde{s}_0^{-i}) = M$$

Τότε $$\tilde{h}^i(\tilde{s}_0^i, \tilde{s}_0^{-i}) = \sum_{j : s_j^i \in S^i} \tilde{s}_0^i(s_j^i)\, \tilde{h}^i(s_j^i, \tilde{s}_0^{-i}) = M \sum_{j \in s_j^i \in S^i} \tilde{s}_0^i(s_j^i) = M$$

άρα $\tilde{s}_0^i$ βέλτιστη απάντηση του i στην $\tilde{s}_0$.

Άσκηση 2 / Φυλλάδιο 5

(α) Άσκηση 3.6.10

Παιχνίδι 2-παικτών 0-αθροίσματος

ο II επιλέγει έναν αριθμό $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

ο I προσπαθεί να μαντέψει

Εαν ο I τον βρει, τότε κερδίζει 1

Εαν ο I μαντέψει αριθμό μεγαλύτερο του j η πληρωμή είναι -1

Εαν ο I μαντέψει αριθμό μικρότερο του j η πληρωμή είναι 0

• Να δωθεί η κανονική μορφή

Λύση:

$S^{I} = \{(1), (2), \dots, (n)\}$

$S^{II} = \{(1), (2), \dots, (n)\}$

$$A = \begin{array}{c|c} S^{I} \backslash S^{II} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & \cdots & (n-1) & (n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ \vdots \\ (n-1) \\ (n) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(β) Άσκηση 4.10.5

Να λυθεί το π.π της 3.6.10

Λύση:

Ελέγχουμε αν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

$$
A = \begin{array}{c}
\\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ \max\limits_i a_{ij}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\min\limits_j a_{ij} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \\ \\
\end{array}
$$

$$0 = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = 1$$

Επειδή $\underline{v} < \bar{v}$ το παιχνίδι δεν έχει ΣΣΙ σε καθαρές.

Θα χρησιμοποιήσουμε εξισώσεις γιατί ο A είναι τριγωνικός

$$x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-1} - x_n = v \Rightarrow x_1 = 2^{n-1} v$$

$$x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-1} - x_n = v \Rightarrow x_2 = 2^{n-2} v$$

$$x_3 - \cdots - x_{n-1} - x_n = v \Rightarrow x_3 = 2^{n-3} v$$

$$\vdots$$

$$x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = v \Rightarrow x_{n-2} = 4v = 2^2 v$$

$$x_{n-1} - x_n = v \Rightarrow x_{n-1} = 2v$$

$$x_n = v$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 1$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} v + 2^{n-2} v + \cdots + 2v + v = 1$$

$$\Rightarrow v \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 1$$

$$\Rightarrow v \, \frac{1-2^n}{1-2} = 1$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{2^n - 1}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}, \frac{2^{n-2}}{2^n-1}, \ldots, \frac{2}{2^n-1}, \frac{1}{2^n-1} \right)^T$$

$$
\begin{aligned}
y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= v \\
-y_1 + y_2 \qquad\qquad\qquad &= v \\
-y_1 - y_2 + y_3 \qquad\qquad &= v \\
&\vdots \\
-y_1 - y_2 - y_3 \cdots - y_{n-2} + y_{n-1} &= v \\
-y_1 - y_2 - y_3 \cdots - y_{n-2} - y_{n-1} + y_n &= v \\
y_1 + y_2 + \dots + y_n &= 1
\end{aligned}
$$

Το ίδιο σύστημα με πριν αν

$y_1 \leftrightarrow x_n$, $y_2 \leftrightarrow x_{n-1}$, ... $y_n \leftrightarrow x_1$

Άρα $\underline{y}^0 = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T = \left(\frac{1}{2^n-1}, \frac{2}{2^n-1}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^T$

$\underline{x}^0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$v = \frac{1}{2^n-1}$

Άσκηση 3/ Φυλλάδιο 5

Άσκηση 4.10.3

Ο πίνακας πληρωμής είναι:

$S^I \setminus S^{II}$	y^* (a)	$1-y^*$ (n)	$\min_j a_{ij}$	
x^* (a,a)	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	
$A = 1-x^*$ (a,δ)	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} = \underline{v}$
(δ,a)	0 ~~-2~~	1 ~~1~~		
(δ,δ)	~~$-\frac{1}{2}$~~	~~$-\frac{1}{2}$~~		

$\bar{v} = 0$

• Ελέγχουμε για απλοποιήσεις: $\Gamma_3 \propto \Gamma_1$

$\Gamma_4 \propto \Gamma_2$

• Ελέγχουμε αν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

Επειδή $\underline{v} < \bar{v}$ δε υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

• Λύνω το 2×2 πινακοπαιχνίδι
υπάρχει $x^* \in [0,1]$:

$$-\frac{3}{2}x^* + 0(1-x^*) = 1x^* - \frac{1}{2}(1-x^*) \Rightarrow$$

$$-\frac{5}{2}x^* = -\frac{1}{2}(1-x^*)$$

$$6x^* = 1 \Rightarrow$$

$$x^* = \frac{1}{6}$$

άρα $\underline{x}^\circ = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0, 0\right)^T$

Ο II διαθέτει $y^* \in [0,1]$:

$$-\frac{3}{2}y^* + 1(1-y^*) = 0y^* - \frac{1}{2}(1-y^*) \Rightarrow$$

$$-\frac{3}{2}y^* = -\frac{3}{2}(1-y^*) \Rightarrow$$

$y^* = 1-y^* \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}$ άρα $\underline{y}^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ και

$v = -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

Άσκηση 4/ Φυλλάδιο 5

Άσκηση 4.10.7.

Στην άσκηση 2.10.5 να λυθούν τα Γ_{12} και Γ_{23}. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις λύσεις των Γ_{12} και Γ_{23} να βρείτε ένα ΣΣΙ στο παιχνίδι 3-παικτών Γ.

Άσκηση 2.10.5

Έστω

Γ_{12}:

$S^{I} \backslash S^{II}$	α	μ	δ
π	1	1	3
κ	7	-1	5

Γ_{23}:

$S^{II} \backslash S^{III}$	α	μ	δ
π	3	1	2
κ	4	3	0

Πινακοπαιχνίδια μεταξύ των I και II (το Γ_{12}) και II και III (Γ_{23})
Έστω Γ παιχνίδι 3 παικτών κατά το οποίο μια αρχική κίνηση τύχης επιλέγει ποιό από τα παρακάτω πινακοπαιχνίδια θα παιχθεί και συγκεκριμένα στο Γ επιλέγεται το Γ_{12} με πιθανότητα $1/3$ (και τότε η πληρωμή του III είναι 0) και το Γ_{23} με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ (και τότε η πληρωμή του I είναι 0)
Να δωθεί η εκτεταμένη μορφή του Γ.

Λύση:

A_{12}:

$S^{I} \backslash S^{II}$	α	μ	δ
π	1	1	3
κ	7	-1	5

· Ελέγχουμε για απλοποιήσεις $\Sigma_1 < \Sigma_2$
$\Sigma_3 < \Sigma_2$
$\Gamma_2 < \Gamma_1$

άρα ΣΣΙ ((π),(μ)) με πληρωμή (1,-1)

A_{23} :

	$S^{II} \backslash S^{III}$	α	η (y^*)	δ ($1-y^*$)	
x^*	η	3	1	2	1
$1-x^*$	κ	4	3	0	0
			3	2	

$1 = \underline{v}$

$\bar{v} = 2$

• Ελέγχουμε για απλοποιήσεις: $\Sigma_1 < \Sigma_2$

• Ελέγχουμε αν το 2×2 πινακοπαιχνίδι έχει ΣΣΙ σε καθαρές

Εφόσον $\underline{v} < \bar{v}$ το παιχνίδι δεν έχει ΣΣΙ σε καθαρές

• Θα λύσουμε το 2×2 πινακοπαιχνίδι

ο II διαθέτει $x^* \in [0,1]$:

$$1x^* + 3(1-x^*) = 2x^* + 0(1-x^*)$$
$$3(1-x^*) = x^*$$
$$3 = 4x^* \Rightarrow x^* = \frac{3}{4}$$

ο III διαθέτει $y^* \in [0,1]$:

$$1y^* + 2(1-y^*) = 3y^*$$
$$2(1-y^*) = 2y^*$$
$$y^* = \frac{1}{2}$$

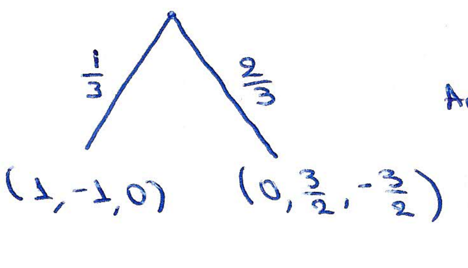
Άρα $\underline{x}^\circ = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$ ← η βέλτιστη του II

$\underline{y}^\circ = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ ← βέλτιστη του III

$v = \frac{3}{2}$

οπότε πληρωμή $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

Γ:



Άρα πληρωμή: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1\right)$

Στο παιχνίδι 3 παικτών τα σύνολα καθαρών στρατηγικών είναι:

$S^{I} = \{(\pi), (k)\}$

$S^{II} = \{(a, \pi), (a, k), (\mu, \pi), (\mu, k), (\delta, \pi), (\delta, k)\}$

$S^{III} = \{(a), (\mu), (\delta)\}$

Τελικά έχουμε

ΣΣΙ: $\left((1,0)^T, (0,0,\frac{3}{4},\frac{1}{4},0,0)^T, (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T\right)$

και πληρωμές $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1)$