

Άσκηση

Έστω $f(x, y)$ συνεχής συνάρτηση από το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ στους πραγματικούς, όπου A και B υποτίθενται συμπαγή υποσύνολα Ευκλειδείων χώρων (ισχύει και γενικότερα). Να δείξετε ότι η $g(x) := \min_{y \in B} f(x, y)$ είναι συνεχής πάνω στο A . Από εδώ να συμπεράνετε ότι η άνω και η κάτω τιμή ενός π.π. σε μεικτές στρατηγικές είναι καλά ορισμένα.

(Υπόδειξη: Πάρτε $\varepsilon > 0$ και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η $f(x, y)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A \times B$ (λόγω της συμπαγείας) για να δείξετε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $|x_1 - x_2| < \delta$ να συνεπάγεται ότι $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$. Από εδώ να συνάγετε ότι η $g(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής πάνω στο A .)