τότε $\max\{f(x) : x \in \overline{D}\} = \max\{f(a) : a \in A\}$

$$\textit{και } \min\{f(x) : x \in \overline{D}\} = \min\{f(a) : a \in A\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $a \in \partial D$, τότε $\rho(a) = 0$, και ότι η διανυσματική εξίσωση $\nabla f(a) = \lambda \nabla \rho(a)$ μαζί με την $\rho(a) = 0$, αποτελούν ένα σύστημα $(n+1)-$εξισώσεων με $(n+1)-$αγνώστους, τους εξής: $a_1, \ldots, a_n$ και λ.

Παράδειγμα. Ας υπολογίσουμε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - y^4$, υπό τον περιορισμό $x^2 + y^2 \le 1$. Λύνοντας το σύστημα

$$f_x = 2x = 0 \ \text{ και } \ f_y = -4y^3 = 0 \ \text{ για } \ x^2 + y^2 < 1,$$

βρίσκουμε το κρίσιμο σημείο $(x,y) = (0,0)$. Εν συνεχεία λύνουμε το σύστημα

$$2x = \lambda(2x), \ -4y^3 = \lambda(2y), \ x^2 + y^2 = 1,$$

και βρίσκουμε τις λύσεις $(x, y | \lambda)$: $(0, \pm 1 | -2)$ και $(\pm 1, 0 | 0)$. Άρα το σύνολο A των κρισίμων σημείων είναι $A = \{(0,\pm 1), (\pm 1, 0), (0,0)\}$, και συνεπώς

$$\max_{x^2+y^2 \le 1} f(x,y) = 1 \quad \text{και} \quad \min_{x^2+y^2 \le 1} f(x,y) = -1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.4

1. Έστω $a,b,c > 0$. Αν $x + y + z = 1$ και $x,y,z > 0$, πότε γίνεται μέγιστη η ποσότητα $x^a y^b z^c$;

2. Στα σημεία (x,y,z) του ελλειψοειδούς $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$, με $x,y,z > 0$, φέρουμε τα εφαπτόμενα επίπεδα προς το ελλειψοειδές. Ποιός είναι ο ελάχιστος όγκος που κόβεται με αυτά τα επίπεδα από το πρώτο ογδοημόριο;

3. Έστω $a,b,c > 0$. Αν $x,y,z > 0$ και $ayz + bzx + cxy = 3abc$, δείξτε ότι $xyz \le abc$.

4. Αν $a,b,c > 0$, δείξτε ότι

$$\left(x^5 + y^5 + z^5\right)\left(a^{5/4} + b^{5/4} + c^{5/4}\right)^4 \ge 1 \ \text{ όταν } \ ax + by + cz = 1 \ \text{ και } \ x,y,z > 0.$$

5. Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση xyz υπό την συνθήκη $x + y + z = a$ και $x,y,z > 0$, δείξτε ότι $\sqrt[3]{xyz} \le (x+y+z)/3$. Πότε ισχύει η ισότητα;

6. Υπολογίστε την μεγίστη τιμή της συνάρτησης $\log x + \log y + 3\log z$ στο μέρος της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ όπου $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, και εν συνεχεία αποδείξτε την ανισότητα $abc^3 \le 27(a+b+c)^5/3125$, για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς a,b,c.

7. Υπολογίστε την μεγίστη και ελαχίστη τιμή των εξής συναρτήσεων:

$$f(x,y)=x^2+xy-y^2 \quad \text{υπό τον περιορισμό } x^2+y^2\le 1, \text{ και}$$

$$f(x,y)=x^4+y^6, \quad \text{υπό τον περιορισμό } x^2+y^2\le 1.$$

8. Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή των εξής συναρτήσεων:

$$f(x,y)=x^2-y^6, \quad \text{υπό τον περιορισμό } x^4+y^4\le 1, \text{ και}$$

$$f(x,y)=x^2+y, \quad \text{υπό τον περιορισμό } x^2+y^4\le 1.$$

9. Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2-y^2+z$, υπό τον περιορισμό $x^2+y^2\le 1$ και $x^2+y^2+z^2\le 1$.

10. Δείξτε ότι $x^2-y^2+1\ge 0$, όταν $x^2+|y|\le 1$.

11. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου 0 από την επιφάνεια με εξίσωση $x_1^5+x_2^5+\cdots+x_n^5=1$ στον $\mathbb{R}^n$.

12. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου 0 από την επιφάνεια με εξίσωση $(x_n-n)^5=x_1^2+x_2^4+\cdots+x_{n-1}^{2n-2}$ στον $\mathbb{R}^n$.

13. Υπολογίστε το ελάχιστο της συνάρτησης $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ υπό την συνθήκη $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=1$. Υποτίθεται ότι κάποιο από τα a_j είναι $\neq 0$. Γενικότερα υπολογίστε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2+\cdots+(x_n-p_n)^2,$$

υπό την ίδια συνθήκη, όπου p είναι ένα δοσμένο σημείο.

14. Υπολογίστε το μέγιστο της συνάρτησης

$$\left(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right)^2 \quad \text{υπό την συνθήκη } x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1.$$

15. Ενθυμούμενοι τους υπολογισμούς της §2.5.4, θεωρήστε μια επιφάνεια $\mathcal{S}: f(x,y,z)=0$ και μια συνάρτηση $g(x,y,z)$, περιορισμένη πάνω στην επιφάνεια αυτή, και βρείτε ένα κριτήριο για να αποφασίζεται αν ένα κρίσιμο σημείο που βρίσκουμε με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών *Lagrange*, είναι τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο ή σαγματικό σημείο της συνάρτησης $g|_{\mathcal{S}}$.

16. Βρείτε συνθήκες ώστε το σύστημα των εξισώσεων

$$\rho(x,y,z)=\lambda(u,v,w)=0,$$

$$x-u=\mu\frac{\partial\rho}{\partial x}(x,y,z)=\kappa\frac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v,w),$$

$$y-v=\mu\frac{\partial\rho}{\partial y}(x,y,z)=\kappa\frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,v,w),$$

$$z-w=\mu\frac{\partial\rho}{\partial z}(x,y,z)=\kappa\frac{\partial\lambda}{\partial w}(u,v,w),$$

να έχει μία τουλάχιστον λύση ως προς x, y, z, u, v, w, μ, κ
Τι σημαίνει αυτό γεωμετρικά;

να έχει μια τουλάχιστον λύ
γεωμετρικά; (Υποθέστε ότι

3.5 Αποδεικνύοντας

Με την μέθοδο των π
αποδειχτούν διάφορες
παραδείγματα και στην παρ

3.5.1. Παραδείγματα. 1
$x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι σταθερό,
$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ γίνεται μέγιστ

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=$$

Και η μέγιστη αυτή τιμή τη

$$\left(\frac{}{a_1+a_2}\right.$$

Επομένως ισχύει η ανισότη

$$\frac{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}{a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}}\le\left(\frac{x_1+x_2}{a_1+a_2}\right.$$

Και μάλιστα ξέρουμε πότε

Αν εφαρμόσουμε την ανισ
ανισότητα του *Cauchy*:

$$x_1x_2\cdots x_n\le\left(\frac{x_1+x_2+\cdots}{n}\right.$$

Δηλαδή: Ο γεωμετρικός μέ

2. Παραλλαγή του πρ
θεωρήσουμε αριθμούς
μεγιστοποιήσουμε την ποσ

$$a_1x_1+a_2x_2$$