ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.1

1. Αποδείξτε πλήρως του ισχυρισμούς που κάναμε στα παραδείγματα της §3.1.3.

2. Θεωρήστε έναν μετασχηματισμό $(u,v)\to(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$, από το $uv-$επίπεδο στο $xy-$επίπεδο. Αν $f=f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση των x,y, τότε αυτή μέσω του εν λόγω μετασχηματισμού μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση των u,v, δηλαδή εννοούμε την συνάρτηση $f=f(x(u,v),y(u,v))$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ομοίως, αν $(x,y)\to(u,v)=(u(x,y),v(x,y))$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Γράψτε αναλυτικά την εξίσωση των πινάκων:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^{-1}.$$

Επίσης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2.$$

Γράψτε ανάλογους τύπους και για τις άλλες παραγώγους τάξης 2.

3. Γράψτε τύπους ανάλογους – της προηγουμένης άσκησης – για μετασχηματισμούς της μορφής $(u,v,w)\to(x,y,z)$, κ.ο.κ.

4. Δείξτε ότι η απεικόνιση $(u,v)\to(x,y)=(u^2+v^5+uv,u^2v+u+v^2)$ αντιστρέφεται τοπικά στο σημείο $(u,v)=(0,1)$ και ορίζει C^∞ συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, για (x,y) κοντά στο σημείο $(1,1)$. Επίσης υπολογίστε τις τιμές των παραγώγων

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1),\ \frac{\partial u}{\partial y}(1,1),\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,1),\ \frac{\partial v}{\partial y}(1,1).$$

5. Σωστό ή λάθος; Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, ορισμένες για (x,y) κοντά στο σημείο $(1,1)$, ώστε $u(1,1)=0$, $v(1,1)=1$, και

$$u^2(x,y)+v^6(x,y)+3u(x,y)v(x,y)=x,\ u^2(x,y)v(x,y)+u(x,y)+v^2(x,y)=y.$$

6. Θεωρήστε την απεικόνιση $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$(x,y)\to(u,v)=(x^3-3xy^2,3x^2y-y^3),$$

και εξετάστε κοντά σε ποιά σημεία αυτή αντιστρέφεται. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$, τάξης 1, για συγκεκριμένη τοπική αντίστροφο.

7. Μελετήστε τον μετασχηματισμό $(r,\theta) \to (x,y)$ με $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ και ξανακοιτάξτε την άσκηση 15(**2.3**).

8. Μελετήστε τον μετασχηματισμό $(r,\theta,z) \to (x,y,z)$ με $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$.

9. Μελετήστε τον μετασχηματισμό $(\rho,\varphi,\theta) \to (x,y,z)$ με

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\varphi,$$

και ξανακοιτάξτε την άσκηση 16(**2.3**).

10. Εξετάστε αν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f = f(x,y)$ και $g = g(x,y)$, ορισμένες για (x,y) κοντά στο $(0,0)$, ώστε

$$fg^2 + \sin g = x \text{ και } e^{fg} - \sin f - 1 = y.$$

11. Κάντε τους υπολογισμούς της §3.1.4 στις περιπτώσεις που

$$f(x) = e^x \text{ ή } f(x) = \cos x \text{ ή } f(x) = \tan x, \text{ με } a = 0.$$

12. Κάντε τους υπολογισμούς της §3.1.4 στις περιπτώσεις που

$$f(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y) \text{ και } a = (0,0) \text{ ή}$$

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy) \text{ και } a = (1,0).$$

Βρείτε επίσης τα μεγαλύτερα ανοικτά σύνολα $D \subset \mathbb{R}^2$, που περιέχουν το σημείο a, και πάνω στα οποία οι ανωτέρω συναρτήσεις f είναι αμφιδιαφορίσεις.

13. Σωστό ή λάθος; Αν η απεικόνιση $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι C^k $(k \ge 2)$ σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και, τοπικά στο σημείο $a \in \Omega$, η f αντιστρέφεται με μια C^1 απεικόνιση τότε αυτή η τοπική αντίστροφη είναι C^k.

14. Δείξτε ότι μια C^1 και επί απεικόνιση $f:\Omega \to \Theta$, μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, είναι C^1 αμφιδιαφόριση αν και μόνο αν η f είναι $1-1$ και $\det Jf(a) \neq 0$ για κάθε $a \in \Omega$.

15. Δείξτε ότι αν η απεικόνιση $(u,v) \to (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ είναι C^1 αμφιδιαφόριση μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ και οι συναρτήσεις $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$ ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \text{ και } \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

τότε και οι συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$, που ορίζουν την αντίστροφη απεικόνιση, ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$\neq 0$.

ις, η F είναι τοπικά στο
W του $a=(a',a'')$ στον
' και V του 0 στον χώρο
$\to W$ ούτως ώστε η
η την G. Όπως και στις
η G είναι της μορφής
$\dots,\gamma_s(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_s))$,
όπου $(u_1,\dots,u_m)$ είναι η
ο V. Και

$\gamma_s(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_s))$
$.,u_m,v_1,\dots,v_s))$,
$v_s),\dots,\gamma_s(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_s)))$.

$_1,\dots,v_s)=v_i,\quad i=1,\dots,s$.

$),\dots,0))=0,\quad i=1,\dots,s$.
$,x_m$, και θέτοντας
$,\quad i=1,\dots,s$,
ς απαιτήσεις του θεωρήματος.

τήσεων. Με τον συμβολισμό
.2),
$,x_m)),\quad i=1,\dots,s$.

$),\quad j=1,\dots,m,\ i=1,\dots,s$.

$,\dots,g_s(x_1,\dots,x_m))$,
$x'=(x_1,\dots,x_m)$.] Λύνοντας τα
$)=\frac{\partial g_r}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_m)$ βρίσκουμε

(2)
$$\frac{\partial g_r}{\partial x_j}(x')=\frac{\Psi^{(1)}_{r,j}}{\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+l}}(x',g(x')\right]},$$

όπου $\Psi^{(1)}_{r,j}$ είναι πολυωνυμικές εκφράσεις ως προς τις παραγώγους των f_i, τάξεως 1. Παραγωγίζοντας τις (2) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^2 g_r}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}(x')=\frac{\Psi^{(2)}_{r,j_1,j_2}}{\left(\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+l}}(x',g(x')\right]\right)^3},$$

όπου $\Psi^{(2)}_{r,j_1,j_2}$ είναι πολυωνυμικές εκφράσεις ως προς τις παραγώγους των f_i, τάξεως ≤ 2. Συνεχίζοντας να παραγωγίζουμε βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^t g_r}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_t}}(x')=\frac{\Psi^{(t)}_{r,j_1,\dots,j_t}}{\left(\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+l}}(x',g(x')\right]\right)^{2t-1}},$$

όπου $\Psi^{(t)}_{r,j_1,\dots,j_t}$ είναι πολυωνυμικές εκφράσεις ως προς τις παραγώγους των f_i, τάξεως $\leq t$. Και, όπως και στην §2.5.3, το συμπέρασμα είναι το εξής:

Αν γνωρίζουμε προσεγγιστικές σχέσεις της μορφής

$$f_i(x)=\sum_{t=0}^{T}\sum_{|k|=t}A_{i,k}(x-a)^k+o(|x-a|^T),\ \textit{του}\ x\to a,\ \textit{για}\ i=1,\dots,s,$$

τότε μπορούμε και βρίσκουμε προσεγγίσεις της μορφής

$$g_r(x')=\sum_{t=0}^{T}\sum_{|\ell|=s}B_{r,\ell}(x'-a')^\ell+o(|x'-a'|^T),\ \textit{του}\ x'\to a',\ \textit{για}\ r=1,\dots,s.$$

[Επισημαίνουμε ότι το $k=(k_1,\dots,k_n)$ είναι πολλαπλός δείκτης με $n-$στοιχεία, ενώ το $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_m)$ είναι πολλαπλός δείκτης με $m-$στοιχεία.] Εξυπακούεται βέβαια ότι η συνάρτηση f υποτίθεται ότι είναι κλάσεως τουλάχιστον C^T.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.2

1. Δείξτε ότι υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $y=f(x)$, ορισμένη για x κοντά στο 1, ώστε $f(1)=1$ και $x^{f(x)}+[f(x)]^x=2$. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους $f'(1)$ και $f''(1)$.

2. Δείξτε ότι υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $z=f(x,y)$ ορισμένη για (x,y) κοντά στο $(0,0)$, με $f(0,0)=0$ και $e^x+ye^{f(x,y)}+f(x,y)\cos[xyf(x,y)]=1$. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$.

3. Εφαρμόστε την ανωτέρω μέθοδο της §3.2.3 για να προσεγγίσετε την συνάρτηση $y=y(x)$ που ορίζεται από την εξίσωση $y+e^{xy}=1$ κοντά στο σημείο $(x,y)=(0,0)$.

4. Προσεγγίστε την συνάρτηση $z=z(x,y)$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$e^x+ye^z+z\cos(xyz)-1=0,$$

κοντά στο σημείο $(x,y,z)=(0,0,0)$.

5. Μελετήστε την δυνατότητα επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων $xy+2yz-3xz=0$ και $xyz+x-y=1$, για δυο από τις μεταβλητές σαν συνάρτηση της τρίτης, κοντά στο σημείο $(x,y,z)=(1,1,1)$.

6. Μελετήστε την δυνατότητα επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων $xy^2+xzu+yv^2=3$ και $u^3yz+2xv-u^2v^2=2$ ως προς u, v και z κοντά στο σημείο $x=y=z=u=v=1$.

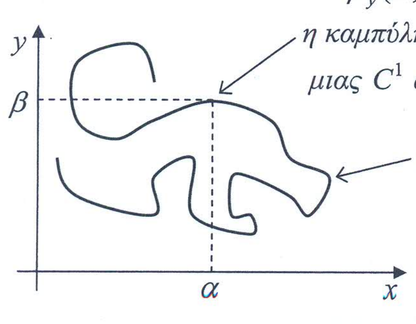
3.3 Επιφάνειες διάστασης m στον $\mathbb{R}^n$

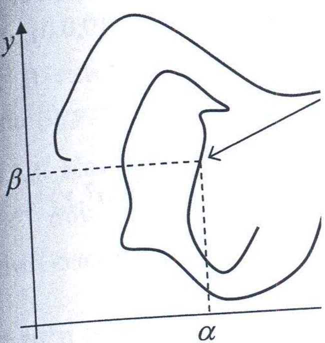
3.3.1. Καμπύλες στο $xy-$επίπεδο. Ας θεωρήσουμε μια C^1 συνάρτηση $\rho(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ και ας θέσουμε

$$\mathcal{C}=\{(x,y)\in\Omega:\ \rho(x,y)=0\}.$$

Αν $\vec\nabla\rho=\frac{\partial\rho}{\partial x}\vec i+\frac{\partial\rho}{\partial y}\vec j\neq\vec 0$ στα σημεία της $\mathcal{C}$ τότε η καμπύλη $\mathcal{C}$ είναι **ομαλή** υπό την εξής έννοια: Για κάθε σημείο $(\alpha,\beta)\in\mathcal{C}$ το σύνολο $\mathcal{C}$, <u>κοντά</u> στο σημείο (α,β), είναι γράφημα $y=\psi(x)$ μιας C^1 συνάρτησης $\psi(x)$ ή γράφημα $x=\varphi(y)$ μιας C^1 συνάρτησης $\varphi(y)$. Πράγματι αυτό έπεται από το *Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων*.

Αν $\rho_y(\alpha,\beta)\neq 0$ τότε <u>κοντά</u> στο σημείο (α,β) η καμπύλη $\mathcal{C}$ είναι το γράφημα $y=\psi(x)$ μιας C^1 συνάρτησης $\psi(x)$.





Επίσης το διάνυσμα $\vec\nabla\rho($
καμπύλη $\mathcal{C}$ στο σημείο (α,β)

Στην περίπτωση τώρα π
$\nabla\rho(\alpha,\beta)=0$ δηλαδή και
ενδέχεται να μην είναι ομαλ
καμπύλη με εξίσωση y^2-x
$y^2-x^2=0$ (κοντά στο σημ
$\{\rho(x,y)=0\}$ με $\rho(x,y)=(x$
σημείο της. Βέβαια αυτό συμ
την $\lambda(x,y)=x-y^2]$ τέτοια
σημεία της.

3.3.2. Επιφάνειες στον
$\rho(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, ορ
θέσουμε

$\mathcal{S}=$

Αν $\vec\nabla\rho=\frac{\partial\rho}{\partial x}\vec i+\frac{\partial\rho}{\partial y}\vec j+\frac{\partial\rho}{\partial z}$
ομαλή υπό την εξής έννοια
στο σημείο (α,β,γ), είναι
γράφημα $y=\psi(x,z)$ μιας
C^1 συνάρτησης $\varphi(y,z)$. Κ
ή $\rho_y(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$ ή $\rho_x(\alpha,$

$\vec\nabla\rho(\alpha,\beta,\gamma)=$

είναι **κάθετο** στην επιφάν