Υπενθύμιση: $|x|$ σημαίνει $\|x\|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.7

1. Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ και $K \subset \mathbb{R}^m$ δυο συμπαγή σύνολα. Δείξτε ότι και το σύνολο $E \times K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ είναι επίσης συμπαγές σύνολο. Γενικότερα δείξτε ότι αν τα σύνολα $K_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1,2,...,N$, είναι συμπαγή τότε και το σύνολο $K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_N$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\cdots+n_N}$.

2. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $p \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $a \in F$ έτσι ώστε $|p-a| = dist(p,F) = \inf\{|p-x| : x \in F\}$.

3. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $a \in F$ και $b \in K$ τέτοια ώστε

$$|a-b| = dist(F,K) = \inf\{|x-y| : x \in F,\ y \in K\}.$$

Αν το σύνολο K υποτεθεί μόνο κλειστό, ισχύει το συμπέρασμα;

4. Αν $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστά και $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, έπεται ότι $dist(F_1,F_2) > 0$;

5. Σωστό ή λάθος; Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο για κάθε κλειστό σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ με $K \cap F \neq \varnothing$, υπάρχουν $p,q \in K \cap F$ με

$$|p-q| = diam(K \cap F) = \sup\{|x-y| : x,y \in K \cap F\}.$$

6. Αποδείξτε το *Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής*. (Βλέπετε την παρατήρηση της §1.7.9).

7. Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ ένα συνεκτικό σύνολο και $f : S \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι τοπικά σταθερή (δηλαδή για κάθε σημείο $x \in S$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U_x, του x, ώστε ο περιορισμός $f|_{U_x \cap S}$ να είναι σταθερή), τότε η f είναι σταθερή πάνω σε ολόκληρο το S. Το αντίστροφο, ισχύει; Αν δηλαδή το σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ έχει την ιδιότητα, κάθε τοπικά σταθερή συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ να είναι σταθερή, έπεται ότι το S είναι συνεκτικό;

8. Είναι το σύνολο $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - \dfrac{x_n^2}{a_n^2} = 1 \right\}$ συνεκτικό;

9. Είναι το σύνολο $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - \dfrac{x_n^3}{a_n^3} = 1 \right\}$ συνεκτικό;

10. Είναι το σύνολο

$$\mathbb{R}^4 - \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \ \text{και}\ x_4 = 0\}$$

συνεκτικό;

11. Αν $n \geq 2$, είναι το σύνολο

$$\mathbb{R}^n - \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_n = 0\}$$

συνεκτικό;

12. Θεωρήστε το σύνολο Γ στο xy−επίπεδο που είναι το γράφημα της συνάρτησης $y = \sin(1/x)$, $0 < x \leq 1$, δηλαδή $\Gamma = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$. Δείξτε ότι το σύνολο $\overline{\Gamma}$ (η κλειστότητα του Γ) είναι συνεκτικό και συμπαγές αλλά όχι κατά τόξα συνεκτικό.

1.8 Ακολουθίες συναρτήσεων

1.8.1. Σύγκλιση κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση. Ας θεωρήσουμε ένα *τυχόν* σύνολο T και μια ακολουθία συναρτήσεων $f_k : T \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,3,\ldots$. Η ακολουθία αυτή λέγεται ότι συγκλίνει **σημειακά** προς την συνάρτηση $f : T \to \mathbb{R}$, αν για κάθε σημείο $\tau \in T$, η ακολουθία των αριθμών $f_k(\tau)$ συγκλίνει στο $f(\tau)$, δηλαδή $\lim_{k\to\infty} f_k(\tau) = f(\tau)$ για κάθε $\tau \in T$. Θα γράφουμε δε τότε ότι $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ ή $f_k \to f$. Αναλυτικότερα η σύγκλιση $f_k \to f$ σημαίνει ότι για κάθε $\tau \in T$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k(\tau, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε

$$k \geq k(\tau, \varepsilon) \;\; \Rightarrow \;\; |f_k(\tau) - f(\tau)| < \varepsilon .$$

Η σημειακή σύγκλιση συναρτήσεων είναι συνήθως ασθενής για να εξασφαλίσει το πέρασμα ιδιοτήτων από τις συναρτήσεις f_k στο όριο f — ιδιότητες όπως είναι π.χ., η συνέχεια. Πολύ ισχυρότερη από την σημειακή σύγκλιση συναρτήσεων είναι η λεγόμενη ομοιόμορφη σύγκλιση.

Ομοιόμορφη σύγκλιση. Με τον ανωτέρω συμβολισμό, η σύγκλιση $f_k \to f$ λέγεται **ομοιόμορφη** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε

$$k \geq k(\varepsilon) \;\; \Rightarrow \;\; |f_k(\tau) - f(\tau)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \tau \in T .$$

Ισοδύναμα, η σύγκλιση $f_k \to f$ είναι ομοιόμορφη αν και μόνο αν

(*)
$$\sup_{\tau \in T} |f_k(\tau) - f(\tau)| \to 0 .$$

Πράγματι, αν $f_k \to f$, ομοιόμορφα πάνω στο T, τότε $|f_k(\tau) - f(\tau)| < \varepsilon$ για κάθε $\tau \in T$, όταν $k \geq k(\varepsilon)$, και συνεπώς, τότε, $\sup_{\tau \in T} |f_k(\tau) - f(\tau)| \leq \varepsilon$. Και η (*) έπεται. Αλλά και αντίστροφα, αν $\sup_{\tau \in T} |f_k(\tau) - f(\tau)| \to 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε $k \geq k(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{\tau \in T} |f_k(\tau) - f(\tau)| \leq \varepsilon$, και συνεπώς

$$k \geq k(\varepsilon) \;\; \Rightarrow \;\; |f_k(\tau) - f(\tau)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \tau \in T .$$