ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ και $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι $x_m \to x$ και $y_m \to y$ καθώς $m \to \infty$, για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $x_m + y_m \to x + y$ καθώς $m \to \infty$.

2. Έστω $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ και $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι $x_m \to x$ και $y_m \to y$ καθώς $m \to \infty$, για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\langle x_m, y_m\rangle \to \langle x, y\rangle$, καθώς $m \to \infty$.

3. Έστω $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι $x_m \to x$ καθώς $m \to \infty$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε με δύο τρόπους ότι $\|x_m\| \to \|x\|$.

4. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι $x_m \to x$ καθώς $m \to \infty$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\lambda x_m \to \lambda x$.

5. Έστω $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{R}$, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι $\lambda_m \to \lambda$ και $x_m \to x$ καθώς $m \to \infty$, για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\lambda_m x_m \to \lambda x$.

1.1.4. Τριγωνική Ανισότητα. *Για* $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y = \lambda x$ *ή* $x = \lambda y$ *για κάποιο* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$.

Απόδειξη. Οι αποδεικτέοι ισχυρισμοί έπονται από τις ταυτότητες

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2(x \cdot y) \text{ και } (|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|,$$

και την ανισότητα των *Cauchy-Schwarz*.

Παραλλαγές της Τριγωνικής Ανισότητας.

1. $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ $(x, y, z \in \mathbb{R}^n)$.

2. $|x-y| \leq |x| + |y|$ και $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

3. $|v_1 + v_2 + \cdots + v_m| \leq |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_m|$, για $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$.

1.1.5. Ταυτότητα του Lagrange.

Για $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *και* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *στον* $\mathbb{R}^n$,

$$|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^2 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_j y_k - x_k y_j)^2.$$

Απόδειξη. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε:

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^2 = \sum_{1 \leq j,k \leq n} x_j^2 y_k^2 - \sum_{1 \leq j,k \leq n} x_j y_j x_k y_k$$

$$= \left(\sum_{1 \leq j \leq n} x_j^2 y_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_k^2 y_j^2\right)$$

$$- \left(\sum_{1 \leq j \leq n} x_j y_j x_j y_j + \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j y_j x_k y_k + \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_k y_k x_j y_j\right)$$

$$= \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_k^2 y_j^2 - 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j y_k x_k y_j = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_j y_k - x_k y_j)^2.$$

$\boxed{\text{Στα παρακάτω } x \cdot y \text{ σημαίνει } \langle x, y \rangle}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

$\boxed{\text{Επίσης } |x| \text{ σημαίνει } \|x\| \text{ για } x \in \mathbb{R}^n.}$

1. Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\left||x|^2 y - (x \cdot y)x\right|^2 = |x|^2(|x|^2|y|^2 - |x \cdot y|^2) \text{ (για } x, y \in \mathbb{R}^n\text{)}$$

και δώστε μια εναλλακτική απόδειξη των ισχυρισμών της §1.1.3.

2. Δείξτε ότι αν $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και $v_j \cdot v_k = 0$ για κάθε $j < k$, τότε

$$|v_1 + v_2 + \cdots + v_m|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_m|^2.$$

3. Ποιά είναι η σχέση της ανισότητας των *Cauchy-Schwarz* (συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης της ισότητας) με την ταυτότητα του *Lagrange*;

4. Αν $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και
$$|v_1 + v_2 + \cdots + v_m| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_m|,$$
τί συμπέρασμα βγάζετε;

5. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχουν $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $v_j \neq 0$ για κάθε j και $v_j \cdot v_k = 0$ για κάθε $j < k$, δείξτε ότι $m \leq n$.

6. Δείξτε ότι για $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^2$.

7. Δείξτε ότι αν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_j > 0$, και $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ τότε
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq n^2.$$

8. Υπολογίστε το
$$\min\{x_1^{16} + x_2^{16} + \cdots + x_n^{16} : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \ \mu\varepsilon \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}.$$

9. Δοθέντων $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, υπολογίστε το
$$\max\{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \ \mu\varepsilon \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$
Γενικότερα υπολογίστε το
$$\max\{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n : \ \mu\varepsilon \ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 1\}$$
όταν οι αριθμοί $\lambda_j > 0$, είναι επίσης δοσμένοι. Ακόμη γενικότερα υπολογίστε το
$$\max\{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n : \ \mu\varepsilon \ \lambda_1 x_1^{2m_1} + \lambda_2 x_2^{2m_2} + \cdots + \lambda_n x_n^{2m_n} = 1\},$$
με δοσμένους $m_j \in \mathbb{N}$.

10. Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$.

11. Είναι σωστό ότι $\left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \right| \leq \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2}$;
Είναι σωστό ότι
$$\left| \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} \right| \leq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \ ;$$

1.2 Το xy − επίπεδο και ο xyz − χώρος

Όπως τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ αντιστοιχούν στα σημεία της ευθείας, έτσι τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχούν στα σημεία του επιπέδου, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αντιστοιχούν στα σημεία του χώρου, κ.ο.κ. Η πράξη της πρόσθεσης στον $\mathbb{R}^n$ σχετίζεται με την γεωμετρική έννοια της **παραλληλίας** και ο αριθμητικός

Αλλά

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=(\gamma_1\vec{i}+\gamma_2\vec{j}+\gamma_3\vec{k})\cdot[(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\vec{i}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\vec{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{k}]$$

$$=\gamma_1(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)+\gamma_2(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+\gamma_3(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix},$$

και ο αποδεικτέος τύπος έπεται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2

1. (*Θεώρημα του Πτολεμαίου*) Δείξτε ότι σε ένα τετράπλευρο που είναι εγγράψιμο σε κύκλο, το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων. (Στη περίπτωση του ορθογωνίου, αυτό είναι το *Πυθαγόρειο Θεώρημα*.)

2. Δείξτε ότι σε ένα τρίγωνο με πλευρές α,β,γ και ημιπερίμετρο $\tau=(\alpha+\beta+\gamma)/2$,

το εμβαδόν του είναι ίσο με $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$,

το ύψος υ_α που αντιστοιχεί στην πλευρά α είναι

$$\upsilon_\alpha=2\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\,/\,\alpha,$$

η διάμεσος μ_α που αντιστοιχεί στην πλευρά α είναι $\mu_\alpha=\sqrt{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}$,

η διχοτόμος δ_α που αντιστοιχεί στην πλευρά α είναι

$$\delta_\alpha=2\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}\,/(\beta+\gamma),$$

η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $\alpha\beta\gamma\,/\,4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, και

η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\,/\,\tau$.

3. Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου (α,β,γ) από το επίπεδο $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$ είναι

$$\frac{|\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\Gamma\gamma+\Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}.$$

4. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των ευθειών

$$\ell_1:\ x=2t+3,\ y=-t+\sqrt{2},\ z=5t-\sqrt{7},\ -\infty<t<\infty, \text{ και}$$

$$\ell_2:\ x=9t+2,\ y=\sqrt{5}t+2,\ z=-5t-3,\ -\infty<t<\infty.$$

5. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των ευθειών

$$\ell_1:\begin{cases}x-y+3z=1\\ 2x+3y-z=-2\end{cases}\quad\text{και}\quad \ell_2:\begin{cases}5x-7y+z=3\\ 8x+y-2z=-9.\end{cases}$$

κατά συνέπεια $x \in \bigcap F_k$

. Έστω A ένα υποσύνολο
:υσης του συνόλου A αν
ιλάχιστον σημείο του A
. Θα γράφουμε δε τότε ότι
$\mathbb{R}^n$ τότε $\Omega \subset \Omega'$, δηλαδή
Τονίζουμε ότι ένα σημείο
ͻ του συνόλου. Αν π.χ.
είο συσσώρευσης του Ω
ο οποίο δεν είναι σημείο
ο του A.

ͻ σύνολο των σημείων
ν και μόνο αν υπάρχει
ιάγματι αν $p \in A'$ τότε

$\in A-\{p\}$ με $a_k \to p$ και
$_N - p| < \varepsilon$, δηλαδή

ίων συσσώρευσης ότι ένα
ιηθείτε τον χαρακτηρισμό

^{n} λέγεται σημείο **επαφής**
περιέχει ένα τουλάχιστον
ε δε τότε ότι $p \in \overline{A}$. Έτσι
υ: $A \subset \overline{A}$. Αλλά και κάθε
αυτού: $A' \subset \overline{A}$. Είναι δε

συνόλου. Έστω A ένα
ήκει στο **εσωτερικό** του
J του $\mathbb{R}^n$, ούτως ώστε
ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup \{U \subset A : \ U \ \textit{ανοικτό στο } \mathbb{R}^n\}.$$

Είναι δηλαδή το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που περιέχεται στο A.

Ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **συνοριακό** σημείο του συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$, αν αυτό είναι σημείο επαφής και του A και του $\mathbb{R}^n - A$. Δηλαδή το **σύνορο** $bd(A)$ του A ορίζεται ως εξής:

$$bd(A) = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n - A)}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι τα σύνολα $\operatorname{int}(A)$ και $bd(A)$ είναι ξένα μεταξύ των και ότι $\overline{A} = \operatorname{int}(A) \cup bd(A)$.

1.5.14. Σχετικότητα στη τοπολογία. Έστω T ένα <u>τυχόν</u> υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$. Ένα υποσύνολο $A \subset T$ λέγεται **ανοικτό στο** T (ή **ως προς το** T ή ακόμη **σχετικά με το** T), αν υπάρχει σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$, ούτως ώστε $A = \Omega \cap T$. Ομοίως, ένα υποσύνολο $B \subset T$ λέγεται **κλειστό στο** T (ή **ως προς το** T ή **σχετικά με το** T), αν υπάρχει σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$, κλειστό στον $\mathbb{R}^n$, ούτως ώστε $B = F \cap T$.

Παρατηρήστε ότι τα σύνολα T και $\varnothing$ είναι συγχρόνως και ανοικτά και κλειστά ως προς το T. Επίσης το σύνολο $A \subset T$ είναι ανοικτό στο T αν και μόνο αν το $T - A$ είναι κλειστό στο T. Πράγματι αυτό έπεται από το ότι αν $A = \Omega \cap T$,

$$T - A = T - (\Omega \cap T) = T \cap (\mathbb{R}^n - \Omega),$$

οπότε αν το Ω είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$, τότε το $\mathbb{R}^n - \Omega$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^n$. Και ομοίως αν $B = F \cap T$ με F κλειστό στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$T - B = T - (F \cap T) = T \cap (\mathbb{R}^n - F),$$

με το σύνολο $\mathbb{R}^n - F$, ανοικτό.

Χαρακτηρισμός σχετικά κλειστών συνόλων με ακολουθίες. Το σύνολο $B \subset T$ είναι κλειστό στο T αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in B$ η οποία συγκλίνει σε σημείο του T έπεται ότι $\lim x_k \in B$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.5

1. Υπολογίστε το όριο κάθε μιας από τις επόμενες ακολουθίες – του $k \to \infty$ – στις περιπτώσεις που αυτό υπάρχει:

$$\left(\frac{\cos k}{k}, \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2-\sin k}}\right), \quad \left(\frac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[k]{k}}{k}, \sqrt[k]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}\right), \left(\frac{1}{k}, \sqrt[k]{k!}\right),$$

$$\left(\frac{k\cos k}{2^k}, \frac{k^{10^{100}}\sin k}{2^{k/10^{100}}}\right), \quad \left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right), \left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^k, \left(1-\frac{1}{k}\right)^{\sqrt{k}}, \frac{\sqrt{k}\sin(1/k)}{\sin(1/\sqrt{k})}\right),$$

$$\left(\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{\sqrt{k}}, \left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{\sqrt[k]{k}}, \left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{k}\right), \left(\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}, \sqrt[k^2]{k!}, \sqrt[k^3]{k!}, \ldots, \sqrt[k^n]{k!}\right),$$

$$\left(\sqrt[k]{1^{100}+2^{100}+\cdots+k^{100}}, \frac{k}{k^2+1^2}+\frac{k}{k^2+2^2}+\cdots+\frac{k}{k^2+k^2}, 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}, \sqrt[k]{1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}}, \left(1+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)^k, \sqrt[k]{\log k}\right).$$

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι:

$1^{\text{ον}}$ $\sqrt[k]{x_k} \to 1$, αν $\varepsilon \le x_k \le M$ για θετικές σταθερές ε και M. Γενικότερα $\sqrt[k]{x_k} \to 1$, αν $\varepsilon k^{\alpha} \le x_k \le M k^{\beta}$ (με $\alpha, \beta \ge 0$).

$2^{\text{ον}}$ Αν $x_k \to x$ τότε $\frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \to x$.

$3^{\text{ον}}$ $\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \to e^x$. Γενικότερα $\left(1+\frac{x_k}{k}\right)^k \to e^x$, αν $x_k \to x$.

$4^{\text{ον}}$ $\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} f(m/k) \to \int_0^1 f(x)dx$, για κατάλληλες συναρτήσεις f.

$5^{\text{ον}}$ $k! \approx \sqrt{2\pi k}\,\frac{k^k}{e^k}$ (του $k \to \infty$) δηλαδή $\frac{k!}{\sqrt{2\pi k}}\frac{e^k}{k^k} \to 1$.

$6^{\text{ον}}$ $1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k} \to \log 2$.

$7^{\text{ον}}$ $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2} \to \frac{\pi^2}{6}$.

2. Θεωρήστε τρεις συγκλίνουσες ακολουθίες σημείων του $\mathbb{R}^n$, x_k, y_k και z_k, πάρτε τα τρίγωνα T_k με κορυφές τα σημεία x_k, y_k, z_k, και T το τρίγωνο με κορυφές τα όρια των τριών αυτών ακολουθιών. Είναι σωστό ότι εμβαδόν(T_k) $\to$ εμβαδόν(T); Είναι σωστό ότι κέντρο βάρους (T_k) $\to$ κέντρο βάρους (T); Είναι σωστό ότι οι γωνίες του (T_k) $\to$ στις αντίστοιχες γωνίες του (T);

3. Πάρτε μια ακολουθία ακολουθιών, δηλαδή

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots$$
$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots$$
$$x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \ldots \text{ , κ.ο.κ.}$$

Είναι σωστό ότι, αν, του $k \to \infty$, $x_k^{(1)} \to y^{(1)}$, $x_k^{(2)} \to y^{(2)}$, $x_k^{(3)} \to y^{(3)}$, κ.ο.κ., και επιπλέον, του $s \to \infty$, $y^{(s)} \to y$, τότε η διαγώνιος ακολουθία $x_k^{(k)} \to y$;

4. Έστω x_k μια ακολουθία. Θεωρήστε επίσης μια διαμέριση του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών αποτελούμενη από άπειρα το πλήθος σύνολα, ας πούμε τα $A_1, A_2, A_3, \ldots$, καθένα από τα οποία είναι μια αύξουσα ακολουθία αριθμών, δηλαδή

$$A_s = \{k_1^{(s)} < k_2^{(s)} < k_3^{(s)} < \cdots\}$$

και υποθέστε ότι κάθε μια από τις αντίστοιχες υποακολουθίες της x_k συγκλίνει σε ένα συγκεκριμένο σημείο p, δηλαδή ότι $x_{k_j^{(s)}} \to p$, καθώς $j \to \infty$, και αυτό για κάθε $s = 1,2,3,\ldots$. Είναι σωστό ότι $x_k \to p$;

5. Δείξτε ότι πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό. Δείξτε επίσης με παράδειγμα ότι ένωση απείρων κλειστών συνόλων εν γένει δεν είναι κλειστό σύνολο.

6. Σωστό ή λάθος; Αν $P(x_1,\ldots,x_n)$ είναι ένα πολυώνυμο των $x_1,\ldots,x_n$ τότε το σύνολο $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \mu\varepsilon\ P(x_1,\ldots,x_n) = 0\}$ είναι κλειστό.

7. Σωστό ή λάθος; Αν $P(x_1,\ldots,x_n)$ είναι ένα πολυώνυμο των $x_1,\ldots,x_n$ τότε το σύνολο $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \mu\varepsilon\ P(x_1,\ldots,x_n) > 0\}$ είναι ανοικτό.

8. Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι αριθμήσιμη ένωση μπαλών, δηλαδή αν Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο τότε υπάρχει μια ακολουθία από μπάλες $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ούτως ώστε $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdots$.

9. Δείξτε ότι $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία a_k, σημείων του A, με $a_k \to p$.

10. Αν $A \subset A'$, έπεται ότι το σύνολο A είναι ανοικτό;

11. Αν $p \in A'$ δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $B(p,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

12. Σωστό ή λάθος; Το σύνολο $A - A'$ είναι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων.

13. Σωστό ή λάθος; Το σύνολο A' είναι πάντοτε κλειστό.

14. Δείξτε ότι το σύνολο Ω είναι ανοικτό αν και μόνο αν $bd(\Omega) = \overline{\Omega} - \Omega$. Είναι σωστό ότι αν το Ω είναι ανοικτό, ότι $\Omega = \mathrm{int}(\overline{\Omega})$;

15. Σωστό ή λάθος; Ένα υποσύνολο T του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό (στον $\mathbb{R}^n$) αν και μόνο αν ισχύει το εξής: Για κάθε ακολουθία $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ μη κενών και φραγμένων υποσυνόλων του T, κλειστών ως προς το T, έπεται ότι

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \varnothing.$$

16. Δείξτε ότι το σύνολο $\overline{A}$ είναι κλειστό, μάλιστα δε είναι το *ελάχιστο* κλειστό σύνολο που περιέχει το A. Δηλαδή,
$$\overline{A} = \bigcap\{F \subset \mathbb{R}^n : F \text{ κλειστό και } F \supset A\}.$$

17. Δείξτε ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Είναι σωστό ότι $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; Είναι σωστό ότι για μια οικογένεια συνόλων A_j, $j \in J$, υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$,
$$\overline{\bigcup_{j\in J} A_j} = \bigcup_{j\in J} \overline{A_j};$$

18. Δείξτε ότι $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $dist(p, A) = 0$. (Η απόσταση ενός σημείου p από ένα σύνολο A είναι $dist(p, A) = \inf\{|p - a| : a \in A\}$.)

15. Έστω T ένα τυχόν υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η τομή δυο συνόλων που είναι ανοικτά στο T, είναι επίσης ανοικτό στο T. Δείξτε ακόμη ότι η ένωση συνόλων που είναι ανοικτά στο T, οσοδήποτε πολλά και αν είναι αυτά, είναι επίσης ανοικτό στο T.

16. Έστω $\{A_j : j \in J\}$ μια τοπικά πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n$ έχει περιοχή που τέμνει μόνο πεπερασμένο το πλήθος από τα A_j. Δείξτε ότι
$$\overline{\bigcup_{j\in J} A_j} = \bigcup_{j\in J} \overline{A_j}.$$

1.6 Όρια και συνεχείς συναρτήσεις

1.6.1. Συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις θα είναι το βασικό αντικείμενο της μελέτης μας. Θα μελετήσουμε δε τόσο **αριθμητικές** συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subset \mathbb{R}^n$, και οι οποίες απεικονίζουν τα σημεία $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ σε αριθμούς $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$, όσο και **διανυσματικές** συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$. Αυτές οι τελευταίες απεικονίζουν τα σημεία $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ σε διανύσματα
$$f(x) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big) \in \mathbb{R}^m,$$
θα ονομάζονται δε και **απεικονίσεις** — κυρίως όταν θέλουμε να τονίσουμε την *γεωμετρική* των φύση — ή και **μετασχηματισμοί**. Ενίοτε μάλιστα, στην περίπτωση αυτή, θα γράφουμε και $\vec{f}(x)$ αντί του $f(x)$, όταν θέλουμε να τονίσουμε την *διανυσματική* φύση των τιμών της συνάρτησης, και θα ομιλούμε για **διανυσματικές συναρτήσεις** ή και για **διανυσματικά πεδία**. Και ένα σχόλιο. Οι συναρτήσεις που θα θεωρούμε θα είναι συνήθως ειδικής μορφής και σχεδόν πάντα θα σχετίζονται με κάποια μορφή <u>ορίου</u>, που είναι η κυρίαρχη