Εργασία - Απειροστικός Λογισμός 3

Χρήστος-Άγγελος Κονίδας - 1112201900089

Διαφορικος Λογισμος

Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα στον διαφορικό λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών είναι ο κανόνας της αλυσίδας. Θα παρουσιάσουμε τον κανόνα της αλυσίδας και θα επιλύσουμε κάποιες ασκήσεις, οι οποίες θα αφορούν στον κανόνα της αλυσίδας αλλά και στον διαφορικό λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών γενικότερα.

Θεώρημα (κανόνας της αλυσίδας) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτά σύνολα. Έστω $g : A \to \mathbb{R}^m$ και $f : B \to \mathbb{R}^p$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $g(A) \subseteq B$. Έστω $x_0 \in A$. Αν η g είναι διαφορίσιμη στο x_0 και η f είναι διαφορίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η $f \circ g$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και*

$$d(f \circ g)(x_0) = d(f)(g(x_0)) \circ d(g)(x_0),$$

όπου $d(g)(x_0)$ είναι το διαφορίκο της g στο σημείο x_0.

Παρατηρούμε ότι επειδή το διαφορικό μιας συνάρτησης είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ ευκλείδιων χώρων, η σχέση

$$d(f \circ g)(x_0) = d(f)(g(x_0)) \circ d(g)(x_0)$$

του θεωρήματος είναι ισοδύναμη με την

$$J(f \circ g)(x_0) = J(f)(g(x_0)) \cdot J(g)(x_0),$$

όπου $J(g)(x_0)$ είναι ο ιακωβιανός πίνακας της g στο σημείο x_0 που είναι ο πίνακας του διαφορικού ως προς την συνήθη βάση. Ακολουθεί μια πολύ χρήσιμη ειδική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος.

Πόρισμα *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά σύνολα. Έστω $g : A \to \mathbb{R}^n$ και $f : B \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $g(A) \subseteq B$. Έστω $x_0 \in A$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $g(x_0)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$(f \circ g)'(x_0) = \nabla f(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Ειδική περίπτωση του παραπάνω για $n = 1$ είναι ο κανόνας της αλυσίδας του διαφορικού συναρτήσεων πραγματικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Άσκηση 1

Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και μη μηδενικό $a \in \mathbb{R}$ ώστε $f(tx) = t^a f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και $t \geq 0$. Να δειχθεί ότι $x \cdot \nabla f(x) = af(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Λύση της άσκησης 1

Σταθεροποιούμε $x \in \mathbb{R}^d$. Θεωρούμε την $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ με $g(t) = tx$ για $t \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(t)' = x$ για κάθε $t \geq 0$. Η δεδομένη σχέση γράφεται ως $f(g(t)) = t^a f(x)$. Αφού η f είναι διαφορίσιμη, χρησιμοποιώντας το πόρισμα και παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε

$$\nabla f(tx) \cdot x = at^{a-1} f(x).$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $t \geq 0$. Ειδικότερα, για $t = 1$ παίρνουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι

$$\nabla f(x) \cdot x = af(x).$$

Άσκηση 2

Έστω $w = f(u, v)$ και $u = x + y, v = x - y$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$$

Λύση της άσκησης 2

Έστω $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $g(x, y) = (x + y, x - y)$, δηλαδή $g(x, y) = (u, v)$. Έχουμε ότι $w = f(g(x, y))$. Υποθέτοντας ότι η f είναι διαφορίσιμη από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Όμως, είναι

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

και

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Πολλαπλασιάζοντας παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$$

Άσκηση 3

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, με $r > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi]$. Αν $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ να υπολογίσετε τις $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

Λύση της άσκησης 3

Έστω $g:(0,\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ με $g(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Έχουμε ότι $z=f(g(r,\theta))$. Από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r},\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}.$$

Όμως είναι

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta.$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta\right)^2\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right)^2\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)^2+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\cos\theta-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\cos\theta\\
&\quad+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right)^2\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ολοκληρωτικα Θεωρηματα Διανυσματικης Αναλυσης

Θα παρουσιάσουμε τα θεωρήματα Green, Stokes και Gauss τα οποία συνδέουν διαφορικό και ολοκληρωτικό διανυσματικό λογισμό και θα επιλύσουμε κάποιες ασκήσεις, οι οποίες θα αφορούν στα τρία αυτά θεωρήματα και στον ολοκληρωτικό διανυσματικό λογισμό γενικότερα.

Θεώρημα (Green) *Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ με σύνορο μία η περισσότερες απλές, κλειστές, λέιες και C^1 ή κατά τμήματα C^1 καμπύλες. Έστω C^1 διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$ με $\vec{F} = (P, Q)$. Τότε*

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Θεώρημα (Stokes) *Έστω S μια λεία, C^2, θετικά προσανατολισμένη η οποία έχει σύνορο μια απλή, κλειστή, λεία καμπύλη ή ένωση τέτοιων καμπυλών $\gamma(S)$, συμβατά προσανατολισμένο με την S. Έστω C^1 διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$. Τότε*

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot dS = \oint_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Θεώρημα (Gauss) *Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^3$ με σύνορο μία η περισσότερες κλειστές, λείες, C^1 επιφάνειες θετικά προσανατολισμένες ως προς το G. Έστω C^1 διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$. Τότε*

$$\iint_{\partial G^+} \vec{F} \cdot dS = \iiint_G \nabla \cdot \vec{F} \, dV.$$

Άσκηση 4

Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_K (\nabla \times \vec{F}) \cdot dS$, όπου K είναι το μέρος της επιφάνειας $z = 1 - 5x^2 - 11y^2$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το xy-επίπεδο και

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(ye^{xz} + e^{x+3y}, (1 + y + xz)^y + 3e^{x+3y}, xye^z \right).$$

Λύση της άσκησης 4

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$. Πράγματι, γράφοντας $\vec{F} = (P, Q, R)$ έχουμε

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

και άρα

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}.$$

Όμως η $\vec{F}$ είναι τάξεως C^2, οπότε από το θεώρημα μεικτών παραγώγων μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά στις διπλές παραγωγίσεις. Παρατηρώντας ότι κάθε συνιστώσα της $\vec{F}$ παραγωγίζεται ως προς τις ίδιες δύο μεταβλητές και τα πρόσημα εναλλάσσονται παίρνουμε ότι $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι η K είναι μία λεία, κλειστή και C^1 επιφάνεια. Έστω G το χωρίο του $\mathbb{R}^3$ που περικλείεται από την K. Από το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$\iint_K (\nabla \times \vec{F}) \cdot dS = \iiint_G \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \, dV = \iiint_G 0 \, dV = 0.$$

Άσκηση 5

Υπολογίστε την τιμή του $\int_{C^+} (y^2 + x^3)\, dx + x^4\, dy$, όπου C^+ είναι η περίμετρος του τετραγώνου $[0,1] \times [0,1]$ με την αντιωρολόγια φορά.

Λύση της άσκησης 5

Το υποσύνολο $D = [0,1] \times [0,1]$ του $\mathbb{R}^2$ έχει ως σύνορο την απλή, κλειστή, λεία, C^1 και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη C^+. Επιπλέον το διανυσματικό πεδίο $(y^2 + x^3)\vec{i} + x^4\vec{j}$ είναι C^1. Από το θεώρημα του Green έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} (y^2 + x^3)\, dx + x^4\, dy &= \iint_D \frac{\partial(x^4)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 + x^3)}{\partial y}\, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (4x^3 - 2y)\, dxdy \\
&= \int_0^1 \left| x^4 - 2xy \right|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^1 (1 - 2y)\, dy \\
&= \left| y - y^2 \right|_{y=0}^{y=1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Άσκηση 6

Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκήρωμα $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot dS$, όπου S το ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0$ και $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^3, -y^3, 0\right)$.

Λύση της άσκησης 6

Παρατηρούμε ότι η S είναι λεία, C^2 και το σύνορο της είναι μια απλή, κλειστή, λεία καμπύλη. Επιπλέον η $\vec{F}$ είναι τάξεως C^1. Θεωρούμε την παρακάτω παραμετρικοποίηση του ∂S

$$\gamma(\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta)\,, \theta \in [0, 2\pi],$$

η οποία είναι συμβατή με τον προσανατολισμό της S. Από το θεώρημα Stokes έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot dS &= \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (0, -\cos^3\theta, 0) \cdot (0, -\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^3\theta \sin\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^3 (-\cos\theta)'\, d\theta \\
&= \int_1^1 -u^3\, du \\
&= 0.
\end{aligned}$$