Εργασία Απειροστικού Λογισμού ΙΙΙ

Ευαγγελία Δραγάζη
Α.Μ : 1500285

Ημερομηνία Παράδοσης: 6 Ιανουαρίου 2021
Ημερομηνία Εξέτασης: 8 Ιανουαρίου 2021

1 Όρια Συναρτήσεων

1.1 Θεωρία

Ορισμός 1. Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ συνάρτηση, $a \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του A και $b \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η συνάρτηση έχει ως όριο το διάνυσμα b καθώς το x τείνει προς το a και συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ ή } f(x) \xrightarrow{x \to a} b$$

αν και μόνο αν,
για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0 : x \in A$ και $0 < ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$.
Ισοδύναμα: Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0 : x \in A \setminus \{a\}$ και $x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(b, \epsilon)$.

1.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

Λύση:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
   Ελέγχουμε αν υπάρχει το όριο πάνω στην οικογένεια ευθειών $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

   $$\lim_{(x,\lambda x)\to(0,0)} \frac{x\lambda x}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

   Το όριο εξαρτάται από το λ, άρα δεν είναι μοναδικό άρα δεν υπάρχει.

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.
   Μένει ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
   Έχουμε $|\frac{x^2y}{x^2+y^2}| = |y||\frac{x^2}{x^2+y^2}| \leq |y| \to 0$.
   Τελικά $1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0$

3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x\sin(\frac{1}{y})$
   Θεωρώ τις ακολουθίες $(1, 2\pi n) \to (1,0)$ και $(1, \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}) \to (1,0)$.
   Τότε $f\big(1, \frac{1}{2\pi n}\big) = \sin(2\pi n) \to 0$ και $f\Big(1, \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\Big) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) \to \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
   Άρα το όριο δεν υπάρχει.

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ με $g(x,y) = \big(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, x\sin(\frac{1}{y})\big)$.
   Αφού $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$, αλλά $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin(\frac{1}{y})$ δεν υπάρχει, τότε το όριο της διανυσματικής συνάρτησης $g(x,y)$ δεν υπάρχει.

2 Συνέχεια Συναρτήσεων

2.1 Θεωρία

Ορισμός 2. Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ συνάρτηση και $a \in A$. Η f λέγεται συνεχής στο a αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0 : x \in A$ και

$$||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| < \epsilon$$

Η f λέγεται συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του.

2.2 Ασκήσεις

Άσκηση 2. Να εξεταστεί αν είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Λύση:
Για κάθε $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Για να'ναι συνεχής στο $(x,y,z) = (0,0,0)$ θα πρέπει $f(x,y,z) \xrightarrow{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(0,0,0) = 0$.
Όμως $\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = |z| \cdot \left|\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq |z| \frac{1}{2} \frac{|x^2+y^2|}{|x^2+y^2+z^2|} \leq \frac{|z|}{2} \to 0$.

Άσκηση 3. Για ποια $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $h(x,y) = \frac{|xy|^a}{x^2+y^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$;

Λύση:
Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ η h είναι συνεχής για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
Έστω $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, τότε

$$h(x,\lambda x) = \frac{|x\lambda x|^a}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{x^{2a}|\lambda|^a}{x^2(1+\lambda^2)} = \left|\frac{\lambda^a}{1+\lambda^2}\right| |x|^{2a-2}$$

Για να υπάρχει το όριο αρκεί $2a - 2 > 0 \Leftrightarrow a > 1$, διαφορετικά το όριο δεν υπάρχει.

3 Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών

3.1 Θεωρία

Ορισμός 3. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό $a = (a_1, , ..., a_n) \in U$ και $f : U \mapsto \mathbb{R}$ συνάρτηση.

1. Για $j \in \{1, ..., n\}$, η μερική παράγωγος της f στο a ως προς τη x_j μεταβλητή είναι το παρακάτω όριο, αν αυτό υπάρχει:

   $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_j + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$

   όπου $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)$ το j διάνυσμα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$.
   Αν η μερική παράγωγος της f ως προς x_j υπάρχει για κάθε $a \in U$ τότε ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση επί του U, δηλαδή

   $$\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

2. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a αν υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

   $$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - T(x - a)|}{||x - a||} = 0$$

   Η γραμμική συνάρτηση T είναι μοναδική και λέγεται διαφορικό της f στο a και συμβολίζεται $Df(a)$.

3. Έστω $h \in R^n$, $h \neq 0$. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο a και στην κατεύθυνση h είναι το όριο, αν υπάρχει

   $$D_h f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

Ορισμός 4. Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ C^1 συναρτήσεις. Λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ υπό τον περιορισμό $g(x) = 0$ αν

- $g(x_0) = 0$
- υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in A$ τέτοιο ώστε $g(x) = 0$ και $||x - x_0|| < \delta$.

Πρόταση 1. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο a τότε η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο a σε όλες τις κατευθύνσεις $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και ισχύει

$$D_h f(a) = Df(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h$$

όπου $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

Απόδειξη. Έστω $h \in \mathbb{R}^n$ με $h \neq 0$. Τότε

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(a+th)-f(a)-Df(a)(th)}{||th||}\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{1}{||h||}\left|\frac{f(a+th)-f(a)-tDf(a)(h)}{t}\right| = 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)-tDf(a)(h)}{t} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = Df(a)(h)$$

Συνεπώς

$$D_h f(a) = Df(a)(h) = \nabla f(a)\cdot h$$

□

Πρόταση 2. Έστω $f,g : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ C^1 συναρτήσεις. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ υπό τον περιορισμό $g(x) = 0$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

3.2 Ασκήσεις

Άσκηση 4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}\sqrt{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Εξετάστε αν η f

1. είναι συνεχής στο $(0,0)$
2. έχει παράγωγο κατά κατεύθυνση $a \in \mathbb{R}^2$ με $||a|| = 1$, στο $(0,0)$
3. είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$

Λύση:

1. Έχουμε

   $$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\sqrt{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right|\sqrt{x^2+y^2}$$

   Όμως $x^4 + y^2 \geq 2|x^2 y|$ (από τη γνωστή ανισότητα $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$).
   Άρα

   $$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \left|\frac{x^2 y}{2x^2 y}\right|\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

   Άρα f συνεχής στο $(0,0)$.

2. Έστω $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά κατεύθυνση a είναι

$$\begin{aligned} D_a f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+t(a_1,a_2)\big)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{t^2 a_1^2 t a_2}{t^4 a_1^4 + t^2 a_2^2}\sqrt{t^2 a_1^2 + t^2 a_2^2} \\ &= \frac{a_1^2 a_2 |t|}{t^2 a_1^4 + a_2^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{aligned}$$

Αν $a_2 = 0$ τότε $D_a f(0,0) = 0$ για κάθε $t \neq 0$ άρα $\lim\limits_{t\to 0} D_a f(t) = 0$.
Αν $a_2 \neq 0$ τότε $\lim\limits_{t\to 0} D_a f(t) = \frac{0}{0+a_2} = 0$
Συνεπώς σε κάθε περίπτωση $\lim\limits_{t\to 0} D_a f(t) = 0$.

3. Για να'ναι η f διαφορίσιμη στο $(0,0)$ θα πρέπει

   - να υπάρχει το $\nabla f(0,0)$.
     Όμως $\nabla f(0,0) = (0,0)$ αφού δείξαμε ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος είναι ίση με το μηδέν για κάθε κατεύθυνση, άρα και για τις κατευθύνσεις των e_1, e_2 που δίνουν τις μερικές παραγώγους f_x, f_y αντίστοιχα.
   - και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\big((x,y)-(0,0)\big)}{||(x,y)-(0,0)||} = 0$
     Έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\big((x,y)-(0,0)\big)}{||(x,y)-(0,0)||} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{||(x,y)||} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

   Όμως για $x = y^2$ έχουμε $\frac{x^4}{x_4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$.
   Άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 5. Να μελετηθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = xy$ υπό τη συνθήκη $x^2 + 4y^2 = 4$.

Λύση:
Έστω $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$ με μερικές παραγώγους $g_x = 2x$, $g_y = 8y$
και θεωρώ τη συνάρτηση $h(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, με μερικές παραγώγους
$h_x = y + 2\lambda x$, $h_y = x + 8\lambda y$, $h_\lambda = x^2 + 4y^2 - 4$, $h_{xx} = 1$, $h_{xy} = 1$, $h_{yy} = 8\lambda$

Λύνω το σύστημα $\begin{cases} h_x = 0 \\ h_y = 0 \\ h_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ή } \lambda = \pm\frac{1}{4} \\ x = -8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

Διακρίνω περιπτώσεις:

- Για $y=0$ έχουμε $x=0$ άτοπο, αφού $x^2+4y^2-4=0$.
- Για $\lambda=\frac{1}{4}$ έχουμε $x=-2y$ και $(-2y)^2+4y^2-4=0$. Άρα $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
  Προκύπτουν οι λύσεις $A_1=(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4})$, $A_2=(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4})$.
- Για $\lambda=-\frac{1}{4}$ έχουμε $x=2y$ και $(2y)^2+4y^2-4=0$. Άρα $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
  Προκύπτουν οι λύσεις $A_3=(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4})$, $A_4=(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4})$.

Μένει να ελέγξουμε αν τα A_1,A_2,A_3,A_4 είναι θέσεις πιθανών ακροτάτων και το είδους του ακρότατου που ενδεχομένως παρουσιάζουν.

Θεωρούμε την ορίζουσα $\Delta=\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{xy} & g_x \\ h_{yx} & h_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 8\lambda & 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$

- Για την $A_1=(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4})$ έχουμε $(g_x,g_y)=(-2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})\neq 0$ άρα το A_1 είναι πιθανή θέση ακροτάτου.
  Επιπλέον έχουμε $\Delta_{A_1}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 2 & 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=\ldots=-64<0$
  και $f(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=-1$.
- Για την $A_2=(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4})$ έχουμε $(g_x,g_y)=(2\sqrt{2},\ -4\sqrt{2})\neq 0$ άρα το A_2 είναι πιθανή θέση ακροτάτου.
  Επιπλέον έχουμε $\Delta_{A_2}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 2 & -4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=\ldots=-64<0$
  και $f(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=-1$.
- Για την $A_3=(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4})$ έχουμε $(g_x,g_y)=(2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})\neq 0$ άρα το A_3 είναι πιθανή θέση ακροτάτου.
  Επιπλέον έχουμε $\Delta_{A_3}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -2 & 4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=\ldots=64>0$
  και $f(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=1$.
- Για την $A_4=(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4})$ έχουμε $(g_x,g_y)=(-2\sqrt{2},\ -4\sqrt{2})\neq 0$ άρα το A_3 είναι πιθανή θέση ακροτάτου.
  Επιπλέον έχουμε $\Delta_{A_4}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2\sqrt{2} \\ 1 & -2 & -4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=\ldots=64>0$
  και $f(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=1$.

Τελικά η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στις θέσεις A_1,A_2 το $f(A_1)=f(A_2)=-1$ και τοπικό μέγιστο τις θέσεις A_3,A_4 το $f(A_3)=f(A_4)=1$

4 Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών

4.1 Θεωρία

Θεώρημα 1 (Green). Έστω $P, Q : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, A ανοικτό και P, Q είναι C^1 συναρτήσεις. Έστω γ απλή, κλειστή C^1 καμπύλη στο A και D το χωρίο που περικλείει. Τότε

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

Ορισμός 5. Έστω $n = 2$ ή $n = 3$. Μια διανυσματική συνάρτηση $\overrightarrow{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto R^n$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο. Γράφουμε $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ ή $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$.

Ορισμός 6. 1. Η απόκλιση $div \overrightarrow{F}$ ενός C^1 διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$div \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{αν } n = 2$$
$$div \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{αν } n = 3$$

2. Ο στροβιλισμός $curl \overrightarrow{F}$ ενός C^1 διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto R^n$ ορίζεται ως

$$curl \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Ορισμός 7. Ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ή $n = 3$) λέγεται συντηρητικό αν υπάρχει C^1 συνάρτηση $\phi : A \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $\overrightarrow{F} = \nabla\phi$.

Θεώρημα 2 (Stokes). Έστω $\overrightarrow{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο, S μια ομαλή προσανατολισμένη επιφάνεια, $\overrightarrow{\eta}$ μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S και ∂S μια C^1 καμπύλη θετικής φοράς προς το διάνυσμα $\overrightarrow{\eta}$. Τότε

$$\iint_S (curl \overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{\eta} \, ds = \int_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

4.2 Ασκήσεις

Άσκηση 6. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{C^+} (x^3 - 2xy)dx + (y^3 - 2xy)dy$$

όπου C το σύνορο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0), (1,0), (0,2)$.

Λύση:
Έστω $P: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}: (x,y) \mapsto x^3 - 2xy$ και $Q: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}: (x,y) \mapsto y^3 - 2xy$ οι οποίες είναι C^1 στο $\mathbb{R}^2$, με $P_y = -2x$, $Q_x = -2y$.
Η καμπύλη που ορίζει το σύνορο του τριγώνου με κορυφές τα δοθέντα σημεία είναι απλή, κλειστή και C^1 στο $\mathbb{R}^2$. Το χωρίο που περικλείει είναι το τρίγωνο $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 - 2x\}$.
Για τον υπολογισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Green. Έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_{C^+} (x^3 - 2xy)dx + (y^3 - 2xy)dy \\ &= \iint_D (-2y + 2x)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (-2y + 2x)dydx \\ &= \int_0^1 [2xy - y^2]_0^{2-2x} dx \\ &= \int_0^1 (-8x^2 + 12x - 4)dx \\ &= [-\frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Αν $\phi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ είναι C^2 συναρτήσεις για $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ και το διανυσματικό πεδίο $\phi\nabla\psi$ είναι συντηρητικό, να δειχθεί ότι

$$\nabla\phi \times \nabla\psi = \overrightarrow{0}$$

Λύση:
Έχουμε

$$\nabla\phi \times \nabla\psi = \det \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} = (\phi_y\psi_z - \phi_z - \psi_y)\,\overrightarrow{i} + (\phi_z\psi_x - \phi_x - \psi_z)\,\overrightarrow{j} + (\phi_x\psi_y - \phi_y - \psi_x)\,\overrightarrow{k}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $(\phi_y\psi_z - \phi_z - \psi_y) = (\phi_z\psi_x - \phi_x - \psi_z) = (\phi_x\psi_y - \phi_y - \psi_x) = 0$
Τότε, αφού το πεδίο $\phi\nabla\psi$ είναι συντηρητικό, τότε υπάρχει C^1 συνάρτηση f τέτοια

ώστε $\phi\nabla\psi = \nabla f$, δηλαδή

$$\phi\psi_x = f_x \quad \phi\psi_y = f_y \quad \phi\psi_z = f_z$$

Αφού οι συναρτήσεις ϕ, ψ είναι C^2 έπεται ότι οι συναρτήσεις f_x, f_y, f_z είναι C^1 και άρα η f είναι C^2.
Ακόμα ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi\psi_z) = f_{zy} \Rightarrow \phi_y\psi_z - \phi\psi_{zy} = f_{zy}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi\psi_y) = f_{yz} \Rightarrow \phi_z\psi_y - \phi\psi_{yz} = f_{yz}$$

Άρα πράγματι $\phi_y\psi_z - \phi_z - \psi_y = 0$.
Ομοίως και οι άλλες δύο εξισώσεις.

Άσκηση 8. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\eta}\, ds$ όπου S είναι το μέρος της επιφάνειας $z = 1 - 5x^2 - 11y^2$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το $xy-$επίπεδο και

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left[ye^{xz} + e^{x+3y}\right]\overrightarrow{i} + \left[(1+y+xz)^y + 3e^{x+3y}\right]\overrightarrow{j} + \left[xye^z\right]\overrightarrow{k}$$

Λύση:
Το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ με

$$P(x,y,z) = ye^{xz} + e^{x+3y}, \quad Q(x,y,z) = (1+y+xz)^y + 3e^{x+3y}, \quad R(x,y,z) = xye^z$$

είναι ομαλό, η επιφάνεια S είναι ομαλή και το σύνορο της είναι η καμπύλη $\gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 5x^2 + 11y^2 = 1, z = 0\right\}$ (έλλειψη στο $xy-$επίπεδο). Σύμφωνα με το θεώρημα Stokes έχουμε

$$\iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\eta}\, ds = \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\gamma P dx + Q dy + R dz = \int_\gamma P(x,y,0)dx + Q(x,y,0)dy$$

διότι $dz = 0$ αφού το z είναι σταθερό και ίσο με μηδέν καθώς κινούμαστε πάνω στην καμπύλη γ.
Μένει να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma P(x,y,0)dx + Q(x,y,0)dy = \int_\gamma \left(y + e^{x+3y}\right)dx + \left((1+y)^y + 3e^{x+3y}\right)dy$$

Όμως αυτό, από θεώρημα Green είναι ίσο με

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D \left(3e^{x+3y} - 3e^{x+3y} - 1\right)dxdy = -\iint_D dxdy = -\mathscr{E}(D)$$

όπου D είναι το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\gamma : 5x^2 + 11y^2 = 1$.
Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες είτε απέυθείας τον τύπο εμβαδού έλλειψης
$\mathscr{E}(D) = \pi\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\pi}{\sqrt{55}}$

Άσκηση 9. Να δείξετε ότι ο τύπος του *Stokes* συεπάγεται τον τύπο του *Green*.

Λύση:
Αρκεί να δείξω ότι
αν $\int_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\eta}\, ds$ τότε $\int_{\partial D}(Pdx + Qdy) = \iint_D (Q_x - P_y) dxdy$.
Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} : R^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ με $\overrightarrow{F} = (P, Q, 0)$ και επιφάνεια $S = D \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Η S είναι στο $xy-$επίπεδο, απλή, ομαλή, προσανατολισμένη και ένα κάθετο διάνυσμα στην S είναι το $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$. Ο θετικός προσανατολισμός του ∂S ως προς το $\overrightarrow{k}$ είναι αυτός της φοράς του ρολογιού.
Άρα αν $\big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [0, 1]$ παραμέτρηση του ∂D τότε $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), 0\big)$, $t \in [0, 1]$ είναι παραμέτρηση του ∂S.
Παρατηρούμε ότι

$$curl\overrightarrow{F} = \big(0, 0, Q_x - P_y\big) = \big(Q_x - P_y\big) \cdot \overrightarrow{k}$$

Επομένως από θεώρημα Stokes έχουμε ότι

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy + 0dz = \int_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{k}\, ds$$

Όμως $curl\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{k} = (Q_x - P_y)\, \overrightarrow{k}^2 = (Q_x - P_y)$.
Συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

ΤΕΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ