# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
## Χειμερινό εξάμηνο 2016-2017

## Ασκήσεις 1.

**1.1.** Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: Για $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|\langle x,y\rangle|\le|x|\cdot|y|$. Δείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα $x$ και $y$ είναι συγγραμμικά.

**1.2.** Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: Για $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x+y|\le|x|+|y|$. Αποδείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y=\lambda x$ ή $x=\lambda y$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\ge0$. Επίσης αποδείξτε τις ακόλουθες παραλλαγές της τριγωνικής ανισότητας:

(1) Για $x,y,z\in\mathbb{R}^n$, $|x-y|\le|x-z|+|z-y|$ και (2) Για $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\big||x|-|y|\big|\le|x-y|$.

**1.3.** Αποδείξτε την ταυτότητα $\left||x|^2y-\langle x,y\rangle x\right|^2=|x|^2(|x|^2|y|^2-|\langle x,y\rangle|^2)$ (για $x,y\in\mathbb{R}^n$).

**1.4.** Αποδείξτε την ταυτότητα του Lagrange: Για $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ και $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ στον $\mathbb{R}^n$,

$$|x|^2|y|^2-(\langle x,y\rangle)^2=\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^n x_jy_j\right)^2=\sum_{1\le j<k\le n}(x_jy_k-x_ky_j)^2 .$$

**1.5.** Αποδείξτε ότι για δύο διανύσματα $\vec u=\alpha_1\vec i+\alpha_2\vec j+\alpha_3\vec k$ και $\vec v=\beta_1\vec i+\beta_2\vec j+\beta_3\vec k$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα $\vec u$, $\vec v$, είναι $\sqrt{\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\beta_1&\beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2&\alpha_3\\\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_3\\\beta_1&\beta_3\end{vmatrix}^2}$.

Γενικότερα αποδείξτε ότι για δύο διανύσματα $\vec u=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ και $\vec v=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ στον χώρο $\mathbb{R}^n$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα $\vec u$, $\vec v$ δίδεται από τον τύπο

$$\textit{εμβαδόν του παραλληλογράμμου }\ \{\lambda\vec u+\mu\vec v:\ 0\le\lambda,\mu\le1\}=\sqrt{\sum_{1\le j<k\le n}\left[\det\begin{pmatrix}\alpha_j&\alpha_k\\\beta_j&\beta_k\end{pmatrix}\right]^2} .$$

**1.6.** Αποδείξτε ότι για τρία διανύσματα $\vec u=\alpha_1\vec i+\alpha_2\vec j+\alpha_3\vec k$, $\vec v=\beta_1\vec i+\beta_2\vec j+\beta_3\vec k$ και $\vec w=\gamma_1\vec i+\gamma_2\vec j+\gamma_3\vec k$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $\vec u$, $\vec v$, $\vec w$, είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας των διανυσμάτων:

$$\textit{όγκος παραλληλεπιπέδου }\ \{\lambda\vec u+\mu\vec v+\kappa\vec w:\ 0\le\lambda,\mu,\kappa\le1\}=\left|\det\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\beta_1&\beta_2&\beta_3\\\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{pmatrix}\right| .$$

**1.7.** Σκεφθείτε την σχέση της καθετότητας των διανυσμάτων στον χώρο $\mathbb{R}^n$ με τις λύσεις των γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων. Π.χ. παρατηρήστε ότι το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n:\ \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0\}$ αποτελείται από τα διανύσματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec u=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ του $\mathbb{R}^n$.

**1.8.** Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου $(\alpha,\beta,\gamma)$ από το επίπεδο $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$ είναι $\dfrac{|\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\Gamma\gamma+\Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}$.

**1.9.** Υπολογίστε το όριο κάθε μιας από τις επόμενες ακολουθίες – του $k\to\infty$ – στις περιπτώσεις που αυτό υπάρχει: $\left(\dfrac{k-1}{2k+1},\dfrac{2k^2-1}{\sqrt{3k^4+k^3+1}}\right)$, $\left((-1)^k\,\dfrac{k-1}{2k+1},\dfrac{k^2-1}{k^3+1}\right)$, $\left(\dfrac1k,k\right)$, $\left(\dfrac{\cos k}{k},\dfrac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2-\sin k}}\right)$, $\left(\dfrac1k,\sqrt[k]{k!}\right)$, $\left(\dfrac1k,(-1)^kk\right)$,

$\left(\dfrac{k-1}{k+1},\dfrac{2k^2-k-1}{k^2+k+1},\dfrac{3k^3-k^2-k-1}{k^3+k^2+k+1},...,\dfrac{nk^n-k^{n-1}-k^{n-2}-\cdots-1}{k^n+k^{n-1}+\cdots+k+1}\right)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[k]{k}}{k},\sqrt[k]{1+\dfrac{1}{\sqrt2}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[k]{k}}}\right)$,

$$\left(\frac{k\cos k}{2^k}, \frac{k^{10^{100}}\sin k}{2^{k/10^{100}}}\right), \quad \left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^k, \left(1-\frac{1}{k}\right)^{\sqrt{k}}, \frac{\sqrt{k}\sin(1/k)}{\sin(1/\sqrt{k})}\right), \quad \left(\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{\sqrt{k}}, \left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{\sqrt[k]{k}}, \left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^k\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}, \sqrt[k^2]{k!}, \sqrt[k^3]{k!}, ..., \sqrt[k^n]{k!}\right), \quad \left(\sqrt[k]{1^{100}+2^{100}+\cdots+k^{100}}, \frac{k}{k^2+1^2}+\frac{k}{k^2+2^2}+\cdots+\frac{k}{k^2+k^2}, 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}, \sqrt[k]{1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}}, \left(1+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)^k, \sqrt[k]{\log k}\right).$$

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι: 1ον $\sqrt[k]{x_k} \to 1$, αν $\varepsilon \le x_k \le M$ για θετικές σταθερές $\varepsilon$ και $M$. Γενικότερα $\sqrt[k]{x_k} \to 1$, αν $\varepsilon k^{\alpha} \le x_k \le M k^{\beta}$ 2ον Αν $x_k \to x$ τότε $\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k) \to x$. 3ον $\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \to e^x$. Γενικότερα $\left(1+\frac{x_k}{k}\right)^k \to e^x$, αν $x_k \to x$. 4ον $\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} f(m/k) \to \int_0^1 f(x)dx$, για κατάλληλες συναρτήσεις $f$. 5ον $k! \approx \sqrt{2\pi k}\,\frac{k^k}{e^k}$ (του $k \to \infty$) δηλαδή $\frac{k!}{\sqrt{2\pi k}}\frac{e^k}{k^k} \to 1$. 6ον $1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k} \to \log 2$. 7ον $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2} \to \frac{\pi^2}{6}$.

**1.10.** Αν $\lambda_k$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και η ακολουθία $(\lambda_k, k\lambda_k)$ είναι συγκλίνουσα στον $\mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $\lambda_k \to 0$.

**1.11.** Αν η ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο $p$ του $\mathbb{R}^n$ και η ακολουθία $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο $q$ του $\mathbb{R}^n$, και αν $p \neq q$ δείξτε ότι η ακολουθία $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...$ δεν είναι συγκλίνουσα.

**1.12.** Αποδείξτε το θεώρημα: *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον* $\mathbb{R}^n$ *έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες.*

**1.13.** Αποδείξτε το θεώρημα: *Μια ακολουθία στον* $\mathbb{R}^n$ *είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

**1.14.** Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι το $F$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in F$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι $x \in F$.

**1.15.** Έστω ότι $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι τότε η τομή των είναι επίσης μη κενή: $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

**1.16.** *Σημεία συσσώρευσης και σημεία επαφής.* Έστω $A$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, η μπάλα $B(p,\varepsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του $A$ διαφορετικό από το $p$, δηλαδή $B(p,\varepsilon) \cap A - \{p\} \neq \varnothing$. Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in A'$. Ένα σημείο του συνόλου $A$ το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσής του λέγεται ότι είναι μεμονωμένο σημείο του $A$. Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο επαφής του συνόλου $A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, η μπάλα $B(p,\varepsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του $A$, δηλαδή $B(p,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in \overline{A}$.

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες. (1) Το σημείο $p \in A'$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A - \{p\}$ με $a_k \to p$. (2) Το σημείο $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A$ με $a_k \to p$. (3) Για κάθε σύνολο $A$, $\overline{A} = A \cup A'$. (4) Αν $p \in A'$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $B(p,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο. (5) Το σύνολο $\overline{A}$ είναι κλειστό, μάλιστα δε είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το $A$, δηλαδή, $\overline{A} = \bigcap\{F \subset \mathbb{R}^n : F \textit{ κλειστό και } F \supset A\}$. (6) Το σύνολο $A'$ είναι πάντοτε κλειστό.

**1.17.** Δείξτε ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Είναι σωστό ότι $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

**1.18.** Υπάρχει ακολουθία $a_k$ στον χώρο $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο $x$ του $\mathbb{R}^n$ να υπάρχει υποακολουθία της $a_k$ η οποία να συγκλίνει στο $x$;

## Ασκήσεις 2.

**2.1.** Έστω $P(x_1,\dots,x_n)$ και $Q(x_1,\dots,x_n)$ πολυώνυμα των $x_1,\dots,x_n$ και $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ ένα σημείο όπου $Q(a)\neq 0$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

**2.2.** Μελετήστε τα όρια: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x-y}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{x^4+y^4-1}{x^2+y^2-1}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{xy}\sin(x^4+y^4)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{xy}}{x^2+y^2-1}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\cos(e^{xy}\pi)}{\sin[(x^2+y^2-1)\pi/2]}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y}{x}$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}}\dfrac{1-\cos(xy)}{\sin^2(x-y)}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|^y$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{(x^2+y^2)^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|x|^{\exp(1/|x|)}y}{x-y}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{x^4+y^4}-x^4-y^4-1}{\sin^4(x^2+y^2)}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{1/(x^2+y^2)}$, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{1-\cos(x^2+y^2)}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x-y}$, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{|x|^\lambda+|y|^\lambda+|z|^\lambda}{(x^2+y^2+z^2)^{\lambda/2}}$.

**2.3.** Αν $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\dfrac{x_j}{|x|}=0$, τί συμπεραίνετε για τα $\lambda_j$; Αν απλώς το ανωτέρω όριο υπάρχει, τί συμπέρασμα βγάζετε;

**2.4.** Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2}{x^2+y^2}=0$, τί συμπέρασμα βγάζετε; Ομοίως αν $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$.
Διατυπώστε και απαντήστε ανάλογα ερωτήματα για τρεις μεταβλητές $x,y,z$.

**2.5.** Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} & \alpha\nu \quad y\neq 0\\ 0 & \alpha\nu \quad y=0.\end{cases}$$

Δείξτε ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ υπάρχει και είναι $0$. Ακόμη τα μερικά όρια $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ όρια υπάρχουν, για κάθε $y$, και είναι όλα $0$. Αλλά τα μερικά όρια $\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ δεν υπάρχουν για κανένα $x\neq 0$.

**2.6.** Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\quad \text{ορισμένη για } (x,y)\neq(0,0).$$

Δείξτε ότι τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα: $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}f(x,y))=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}f(x,y))=0$, αλλά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ δεν υπάρχει.

**2.7.** Για $x+y\neq 0$, ορίστε την συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ (στα σημεία όπου $x+y=0$ μπορούμε να δώσουμε οποιεσδήποτε τιμές). Δείξτε ότι $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}f(x,y))=-1$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}f(x,y))=1$, και ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ δεν υπάρχει.

**2.8.** Αποδείξτε ότι αν $f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση δυο μεταβλητών $x$ και $y$, ορισμένη για $(x,y)\in\Omega-\{(a,b)\}$, (όπου $\Omega$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $(a,b)\in\Omega$) και αν

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\ell \quad \text{και το μερικό όριο } \lim_{x\to a}f(x,y) \text{ υπάρχει } (\forall y\neq b)$$

τότε υπάρχει και το διαδοχικό όριο $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$ και μάλιστα $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = \ell$.

**2.9.** Είναι η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} & \alpha\nu \quad (x,y)\neq(0,0) \\ a & \alpha\nu \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ συνεχής για κάποιο $a$;

**2.10.** Εξετάστε κατά πόσο η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin(x-y)}$, ορισμένη για $x\neq y+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$, επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση σε σημεία με $x=y+k\pi$.

**2.11.** Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $F\subset\mathbb{R}^m$, κλειστό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο $A$.

**2.12.** Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $U\subset\mathbb{R}^m$, ανοικτό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο $A$.

**2.13.** Αποδείξτε τα ακόλουθα θεωρήματα. **Α.** *Ένα υποσύνολο $E$ του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία σημείων του $E$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, η οποία να συγκλίνει μέσα στο $E$.*

**Β.** *Ένα σύνολο $E\subset\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε άπειρο υποσύνολό του έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης που να ανήκει μέσα στο σύνολο $E$.*

**Γ.** *Έστω ότι $E\subset\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f:E\to\mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε το σύνολο $f(E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Δηλαδή, συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές.*

**Δ.** *Έστω ότι $E\subset\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f:E\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχουν σημεία $q,p\in E$ ούτως ώστε $f(q)\le f(x)\le f(p)$ για κάθε $x\in E$. Δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ έχει μεγίστη και ελαχίστη τιμή. Και ιδιαιτέρως, αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in E$, τότε $\inf\{f(x):\ x\in E\}>0$.*

**Ε.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$. Τότε υπάρχει σημείο $p\in\mathbb{R}^n$ ούτως ώστε $f(p)=\max\{f(x):\ \text{για } x\in\mathbb{R}^n\}$.*

**2.14.** Αποδείξτε ότι κάθε γραμμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**2.15.** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**2.16.** Αποδείξτε τα ακόλουθα θεωρήματα. **Α.** *Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δυο ακολουθίες $x_k$ και $y_k$ από το σύνολο $A$ με $|x_k-y_k|\to 0$ έπεται ότι $|f(x_k)-f(y_k)|\to 0$.*

**Β.** *Έστω ότι $E\subset\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f:E\to\mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

**2.17.** Για κάθε $A\subset\mathbb{R}^n$, θεωρήστε την συνάρτηση $\varphi_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\varphi_A(x)=dist(x,A)=\inf\{|x-a|:\ a\in A\},\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Αποδείξτε ότι $|\varphi_A(x)-\varphi_A(y)|\le|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Ιδιαιτέρως η συνάρτηση $\varphi_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής.

**2.18.** Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $p\in\overline{A}$ αν και μόνο αν $dist(p,A)=0$.

**2.19.** Έστω $F\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό σύνολο και $p\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $a\in F$ έτσι ώστε $|p-a|=dist(p,F)$.

**2.20.** Έστω $F\subset\mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $K\subset\mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $a\in F$ και $b\in K$ τέτοια ώστε $|a-b|=dist(F,K)=\inf\{|x-y|:x\in F,\ y\in K\}$. Αν το σύνολο $K$ υποτεθεί μόνο κλειστό, ισχύει το συμπέρασμα; Αν $F_1,F_2\subset\mathbb{R}^n$ είναι κλειστά και $F_1\cap F_2=\varnothing$, έπεται ότι $dist(F_1,F_2)>0$;

**2.21.** Αν $F_1,F_2\subset\mathbb{R}^n$ είναι κλειστά σύνολα, δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x)=0$ όταν $x\in F_1$ και $f(x)=1$ όταν $x\in F_2$.

# Ασκήσεις 3.

**3.1.** Μια συνάρτηση μπορεί να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) και να μην είναι συνεχής. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \alpha\nu \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

**3.2.** Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$. Είναι η συνάρτηση $f$ συνεχής;

**3.3.** Βρείτε μια συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη για $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ούτως ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

**3.4.** Αποδείξτε το θεώρημα: *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, η οποία έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x_j:\Omega\to\mathbb{R}$, για κάθε $j=1,2,...,n$. Έστω ακόμη ότι οι μερικές αυτές παράγωγοι είναι συνεχείς σε ένα σημείο $a\in\Omega$. Τότε η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$.*

**3.5.** Οι μερικές παράγωγοι μια διαφορίσιμης συνάρτησης ενδέχεται να έχουν ασυνέχειες. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \alpha\nu \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

**3.6.** Αποδείξτε το θεώρημα: *Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κατά τόξα συνεκτικό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, και ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x_j=0$, σε κάθε σημείο του συνόλου $\Omega$ (για $j=1,2,...,n$). Τότε η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή.*

**3.7.** Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ και $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x^y-x-2(y-1)\log 2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}=0$.

**3.8.** Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} & \gamma\iota\alpha \ (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \gamma\iota\alpha \ (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$ αν και μόνο αν $\lambda<1$.

**3.9.** Αν υπάρχουν, υπολογίστε τα όρια $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-e^{\sqrt{x^2+y^2}}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-|x|-|y|-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-\sqrt{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-\sin(\sqrt{x^2+y^2})-1}{e^{|x|+|y|}-1}.$$

**3.10.** Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=x^y=e^{y\log x}$, $x>0$, $-\infty<y<\infty$, στα διάφορα σημεία.

**3.11.** Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=x^{y^x}=e^{y^x\log x}=e^{(\log x)e^{x\log y}}$ στο σημείο $(2,3)$, καθώς και το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^{y^z}$ το σημείο $(2,3,2)$.

**3.12.** Έστω $f(x,y)=(\sin x)^{\cos y}$. Αν $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi/4,\pi/4)}\frac{|f(x,y)-Ax-By-C|}{\sqrt{(x-\pi/4)^2+(y-\pi/4)^2}}=0$, τί συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς $A,B,C$;

**3.13.** Σωστό ή λάθος; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{x\sqrt{1-\cos(xe^y)}}{|x|+|y-a|}=0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

**3.14.** Σωστό ή λάθος; Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε δεν υπάρχουν $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(\alpha,\beta,\gamma)}\frac{x^{y^z}-\mathrm{A}-\mathrm{B}x-\Gamma y-\Delta z+\sin(|x-\alpha|+|y-\beta|+|z-\gamma|)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}.$$

**3.15.** Δίδεται η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}[1-\cos(x^2/y)]\sqrt{x^2+y^2} & \alpha\nu\ \ y\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ \ y=0.\end{cases}$ Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$, δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και υπολογίστε τις κατευθυνόμενες παραγώγους της $f$ στο $(0,0)$.

**3.16.** Μια συνάρτηση μπορεί σε κάποιο σημείο να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) αλλά να μην έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε καμιά άλλη κατεύθυνση (δηλαδή εκτός από τις κατευθύνσεις των αξόνων). Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

**3.17.** Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κατευθυνόμενες παραγώγους σε κάθε κατεύθυνση – σε κάποιο σημείο – και εν τούτοις να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Επίσης δείξτε ότι δεν ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας – όταν διαφορίσουμε την σύνθεση $f(\alpha t,\beta t)$ ως προς το $t$ για $t=0$ (όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\beta\neq 0$).

**3.18.** Επαληθεύσατε τον κανόνα της αλυσίδας στις περιπτώσεις: (i) $f(x,y)=x^3e^{xy^2}$ , $x=t^2$, $y=\sin t$ (ii) $f(x,y)=x^y$, $x=t^2$, $y=t^3$ (iii) $f(x,y)=(\log x)^y$, $x=e^t$, $y=t$.

**3.19.** Θεωρήστε μια $C^1-$συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$|f(x)-f(y)|\le\left(\sup_{z\in\Omega}|\nabla f(z)|\right)|x-y|,\ \text{για κάθε}\ x,y\in\Omega.$$

**3.20.** Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z=2x^2+y^2$, στο σημείο $(-1,2,6)$.

**3.21.** Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z^2=2x^2+y^2$, στο σημείο $(-1,2,\sqrt{6})$.

**3.22.** Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $2x^2+y^2+5z^2=16$, στο σημείο $(1,-3,1)$.

**3.23.** Θεωρήστε την καμπύλη $\mathcal{C}$ στον $xyz-$χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z=y^2-3x^2$ και $z^2+y^2=2$, και γράψτε εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην $\mathcal{C}$ στο σημείο $(0,1,1)$.

**3.24.** *(Θεώρημα του Euler)* Δείξτε ότι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda\in\mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx)=t^\lambda f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ και κάθε $t>0$, αν και μόνο αν η $f$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\lambda f(x)$.

**3.25.** Για $a_m\in\mathbb{R}$, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_1,x_2,...,x_n)=\displaystyle\sum_{m=1}^N\frac{a_m}{(x_1^{2m}+x_2^{2m}+\cdots+x_n^{2m})^{1/2m}}$ και δείξτε ότι ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}=-f$.

## Ασκήσεις 4.

**4.1.** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(t,x,y)=\frac{1}{t}e^{-(x^2+y^2)/4t}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $t>0$, και υπολογίστε την ποσότητα $\frac{\partial f}{\partial t}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$.

**4.2.** Για $\alpha>0$ θεωρήστε την συνάρτηση $f_\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$f_\alpha(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{για } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{για } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Για ποιές τιμές του $\alpha$ είναι η $f_\alpha$ συνεχής στο σημείο $(0,0)$ ; Και για ποιές είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ ;

**4.3.** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{για } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{για } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι συνεχής και ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Επίσης δείξτε ότι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι $\partial_{\vec{u}}f(0,0)$ δεν υπάρχουν σε καμιά κατεύθυνση $\vec{u}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ με $\alpha\beta\neq 0$. Τέλος δείξτε ότι η συνάρτηση $f$ είναι Lipschitz και μάλιστα $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leq\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ για κάθε $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$.

**4.4.** Θεωρήστε τον δίσκο $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1\}$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\overline{\Delta}\to\mathbb{R}$, η οποία να είναι κλάσεως $C^2$ στο $\Delta$, να ικανοποιεί την ανισότητα $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2<0$ στα σημεία του $\Delta$, και η οποία να είναι σταθερή στον κύκλο $\mathrm{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\}$.

**4.5.** Αποδείξτε τον *κανόνα της αλυσίδας*. Έστω $g:\mathrm{I}\to\Omega$ μια συνάρτηση, όπου $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα και $\Omega$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, καθώς και μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Αν $t$ είναι η μεταβλητή στο $\mathrm{I}$ και $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ η μεταβλητή στο $\Omega$, η σύνθεση $f\circ g$ απεικονίζει το $t$ στο

$$h(t)=f(g(t))=f(g_1(t),g_2(t),...,g_n(t)) \text{ και } \frac{dh}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dg_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dg_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dg_n}{dt}.$$

Ακριβέστερα αν η συνάρτηση $g$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\tau\in\mathrm{I}$ και η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $g(\tau)$, τότε είναι διαφορίσιμη και η σύνθεση $f\circ g$ στο σημείο $\tau$ και

$$\frac{dh}{dt}(\tau)=\frac{d(f\circ g)}{dt}(\tau)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(\tau))\frac{dg_1}{dt}(\tau)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(g(\tau))\frac{dg_2}{dt}(\tau)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(g(\tau))\frac{dg_n}{dt}(\tau).$$

**4.6.** Για την συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ υπολογίστε τις παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases} \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Συμπεράνατε ότι $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Εν συνεχεία δείξτε ότι $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)\neq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$.

**4.7.** Θεωρήστε μια συνάρτηση $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\varphi$, $x\varphi_x$ και $y\varphi_y$ να είναι φραγμένες – κοντά στο $(0,0)$ – και επιπλέον να ισχύει $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\varphi(x,y)) \neq \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\varphi(x,y))$. Π.χ.,

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ ή } \varphi(x,y) = \left(\frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}\right)^5 \left(\frac{x^6 - y^6}{x^6 + y^6}\right)^{11} \sin\left(\frac{x^{14} - y^{14}}{x^{14} + y^{14}} \frac{\pi}{2}\right).$$

Εν συνεχεία ορίστε

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\varphi(x,y) & \alpha\nu \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \alpha\nu \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

και δείξτε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Επίσης δείξτε ότι $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

**4.8.** Αποδείξτε το *Θεώρημα.* Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \Omega \to \mathbb{R}, \; \frac{\partial f}{\partial y} : \Omega \to \mathbb{R}, \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) : \Omega \to \mathbb{R} \; \text{ και } \; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Αν επιπλέον οι συναρτήσεις $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ και $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ είναι συνεχείς σε ένα σημείο $(\alpha,\beta)$ του $\Omega$, τότε

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\alpha,\beta) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\alpha,\beta).$$

**4.9.** Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f(x,y)$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ και $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ να είναι συνεχείς ενώ οι συναρτήσεις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ να είναι ασυνεχείς.

**4.10.** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του *Laplace*: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

**4.11.** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x_1,x_2,...,x_n) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}$, $(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του *Laplace*: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$ ($n \geq 3$).

**4.12.** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t,x_1,x_2,...,x_n) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)/4t}$, $(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση της *θερμότητας*: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

**4.13.** Δείξτε ότι αν μια $C^2$ συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx) = t^{\lambda} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και κάθε $t > 0$, τότε $\sum_{1\leq j,k\leq n} x_j x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \lambda(\lambda - 1) f(x)$.

**4.14.** Δείξτε ότι αν $f \in C^2(\mathbb{R})$ και $g \in C^1(\mathbb{R})$ τότε η συνάρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds, \; x \in \mathbb{R}, \; t \geq 0,$$

ικανοποιεί τα εξής: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (*κυματική εξίσωση*), $u(x,0) = f(x)$ και $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

## Ασκήσεις 5.

**5.1.** Δείξτε ότι η απεικόνιση $(u,v)\to(x,y)=(u^2+v^5+uv, u^2v+u+v^2)$ αντιστρέφεται τοπικά στο σημείο $(u,v)=(0,1)$ και ορίζει $C^\infty$ συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, για $(x,y)$ κοντά στο σημείο $(1,1)$. Επίσης υπολογίστε τις τιμές των παραγώγων $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$.

**5.2.** Σωστό ή λάθος; Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, ορισμένες για $(x,y)$ κοντά στο σημείο $(1,1)$, ώστε $u(1,1)=0$, $v(1,1)=1$, και

$$u^2(x,y)+v^6(x,y)+3u(x,y)v(x,y)=x\,,\ u^2(x,y)v(x,y)+u(x,y)+v^2(x,y)=y\,.$$

**5.3.** Θεωρήστε την απεικόνιση $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\to(u,v)=(x^3-3xy^2, 3x^2y-y^3)$, και εξετάστε κοντά σε ποιά σημεία αυτή αντιστρέφεται. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων $x=x(u,v)$ και $y=y(u,v)$, τάξης $1$, για συγκεκριμένη τοπική αντίστροφο.

**5.4.** Εξετάστε αν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f=f(x,y)$ και $g=g(x,y)$, ορισμένες για $(x,y)$ κοντά στο $(0,0)$, ώστε $fg^2+\sin g=x$ και $e^{fg}-\sin f-1=y$.

**5.5.** Σωστό ή λάθος; Αν η απεικόνιση $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ είναι $C^k$ ($k\ge 2$) σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και, τοπικά στο σημείο $a\in\Omega$, η $f$ αντιστρέφεται με μια $C^1$ απεικόνιση τότε αυτή η τοπική αντίστροφη είναι $C^k$.

**5.6.** Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, η ποσότητα $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ γίνεται $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$. Βρείτε επίσης έναν ανάλογο τύπο για την ποσότητα $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$.

**5.7.** Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό $x=r\sin\phi\cos\theta$, $y=r\sin\phi\sin\theta$, $z=r\cos\phi$, η ποσότητα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\ \text{ γίνεται }\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}+\frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

**5.8.** Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{B}^n=\{y\in\mathbb{R}^n : |y|<1\}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$y=f(x)=\frac{1}{(1+|x|^2)^{1/2}}x=\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}},\dots,\frac{x_n}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right)$$

για $x\in\mathbb{R}^n$, είναι $C^\infty-$αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$x=g(y)=\frac{1}{(1-|y|^2)^{1/2}}y=\left(\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}},\dots,\frac{y_n}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}\right).$$

**5.9.** Ας θεωρήσουμε μια $C^k-$απεικόνιση $f:D\to\mathbb{R}^n$, όπου $k\ge1$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $D\subset\mathbb{R}^n$ με $0\in D$ και ας υποθέσουμε ότι $\det[(Jf)(0)]\ne 0$. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ούτως ώστε η απεικόνιση $F$ που ορίζεται από τον τύπο $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F(x)=f\left(\varepsilon(1+|x|^2)^{-1/2}\cdot x\right)$ για $x\in\mathbb{R}^n$, να είναι καλά ορισμένη και $C^k-$αμφιδιαφόριση από το $\mathbb{R}^n$ επί του $F(\mathbb{R}^n)$.

**5.10.** Δείξτε ότι μια $C^1$ και επί απεικόνιση $f:\Omega\to\Theta$, μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, είναι $C^1$ αμφιδιαφόριση αν και μόνο αν η $f$ είναι $1-1$ και $\det Jf(a)\ne0$ για κάθε $a\in\Omega$.

**5.11.** Θεωρήστε την καμπύλη $\gamma$ στον $xyz-$χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z=y^2-3x^2$ και $z^2+y^2=2$, και γράψτε παραμετρικές εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην $\gamma$ στο σημείο $(0,1,1)$.

**5.12.** Δείξτε ότι αν $u=f(x-\lambda t)+g(x-\lambda t)$ (με $f,g\in C^2$ και $\lambda$ είναι μια σταθερά $\ne0$) τότε $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

**5.13.** Δείξτε ότι αν $u = f(x+g(y))$ (με $f, g \in C^2$) τότε $u_x u_{xy} = u_y u_{xx}$.

**5.14.** Θεωρήστε την συνάρτηση $\varphi(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}\right)^5\right]$ ορισμένη για $(x,y) \neq (0,0)$. Υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y)$; Είναι σωστό ότι $\sup_{0<x^2+y^2\le 1} |\varphi(x,y)| < \infty$;

**5.15.** Έστω $f(x,y,z) = z(\sin x)^{\cos y}$. Βρείτε αριθμούς $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ τέτοιους ώστε

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/4,\pi/4,1)} \frac{|f(x,y,z) - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y - \Gamma z - \Delta|}{\sqrt{(x-\pi/4)^2 + (y-\pi/4)^2 + (z-1)^2}} = 0.$$

**5.16.** Για ποιές τιμές των θετικών ακεραίων $\alpha$ και $\beta$, υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{ x^\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x^{2\beta} - y^{2\beta}}{x^{2\beta} + y^{2\beta}}\right)^3\right]\right\}$;

**5.17.** Θεωρήστε μια $C^2$ συνάρτηση $f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, και ορίστε την συνάρτηση $\varphi(t) = f(\alpha + \lambda t, \beta + \mu t)$ για $t \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\left.\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|_{t=0} = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta) + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,\beta) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta).$$

**5.18.** Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \to (x,y)$, που ορίζεται από τις εξισώσεις: $x = uv$, $y = u(1-v)$. Δείξτε ότι ο $\Phi$ απεικονίζει το σύνολο $\mathrm{T} = \{0 < u < 1, 0 < v < 1\}$ στο σύνολο $\Delta = \{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ με $1-1$ και *επί* τρόπο, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό

$$\Psi: \Delta \to \mathrm{T},\ u = x + y,\ v = x/(x+y).$$

**5.19.** Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v,w) \to (x,y,z)$, που ορίζεται από τις εξισώσεις: $x = uvw$, $y = uv(1-w)$, $z = u(1-v)$. Δείξτε ότι ο $\Phi$ απεικονίζει το σύνολο $\Omega = \{0 < u < 1, 0 < v < 1, 0 < w < 1\}$ στο σύνολο $G = \{x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$ με $1-1$ και *επί* τρόπο, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό

$$\Psi: G \to \Omega,\ u = x + y + z,\ v = (x+y)/(x+y+z),\ w = x/(x+y).$$

Δείξτε επίσης ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα του $\Phi$ είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = u^2 v$.

**5.20.** Δείξτε ότι υπάρχει μια $C^\infty$ συνάρτηση $y = f(x)$, ορισμένη για $x$ σε μια ανοικτή περιοχή $U$ του 1 (στο $\mathbb{R}$), έτσι ώστε $f(1) = 1$ και $x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2$ ($x \in U$). Επίσης υπολογίστε την παράγωγο $f'(1)$.

**5.21.** Αποδείξτε ότι υπάρχει $C^\infty$ συνάρτηση $z = \varphi(x,y)$ ορισμένη για $(x,y)$ σε ανοικτή περιοχή $U$ του σημείου $(3,-2)$ στο $\mathbb{R}^2$, με $\varphi(3,-2) = 1$ και έτσι ώστε

$$[\varphi(x,y)]^6 + x[\varphi(x,y)]^2 + 5y\varphi(x,y) + y^2 + 2 = 0,\ (x,y) \in U.$$

Εν συνεχεία βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}$ στην κατεύθυνση των οποίων η κατευθυνόμενη παράγωγος $\partial_{\vec{u}}\varphi(3,-2) = 0$.

**5.22.** Θεωρήστε μια $C^1$ $-$συνάρτηση $g = g(x,y,z): B \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο σύνολο

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

τέτοια ώστε $g(0,0,0) = 0$ και $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\right| \le 1$, $\left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\right| \le 2$ και $\left|\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right| \le 3$ για κάθε $(x,y,z) \in B$.

Αποδείξτε ότι $|g(x,y,z)| \le \sqrt{14(x^2+y^2+z^2)}$ για κάθε $(x,y,z) \in B$.

**5.23.** Δίδεται διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(\vec{r}) = g(\|\vec{r}\|)\vec{r}$ στο $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, όπου $\vec{r} = (x,y)$, $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ και $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Δείξτε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

## Ασκήσεις 6.

**6.1.** Έστω $f(x,y,z)=z(\sin x)^{\cos y}=ze^{\cos y\log(\sin x)}$. Βρείτε αριθμούς $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta$ τέτοιους ώστε

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/4,\pi/4,1)}\frac{|f(x,y,z)-\mathrm{A}x-\mathrm{B}y-\Gamma z-\Delta|}{\sqrt{(x-\pi/4)^2+(y-\pi/4)^2+(z-1)^2}}=0.$$

**6.2.** Για ποιούς αριθμούς $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(5+\sin x)^{e^y}-\mathrm{A}-\mathrm{B}x-\Gamma y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$;

**6.3.** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=x^{y^x}$, ορισμένη για $x>0$ και $y>0$. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{1}{\log 3}\dfrac{1}{f(3,2)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2)$ είναι ακέραιος και υπολογίστε τον. Αν $P(x,y)$ είναι το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x^{y^x}-P(x,y)}{(x-1)^2+(y-2)^2}=0$, ποιός είναι ο συντελεστής του $xy$ στο πολυώνυμο αυτό;

**6.4.** Ποιός είναι ο συντελεστής του $x^2$ στο πολυώνυμο $P(x,y,z)$, δευτέρου βαθμού (ως προς $x,y$ και $z$), όταν το όριο $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,3,1)}\dfrac{(xy-yz-2)^y-P(x,y,z)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=0$;

**6.5.** Ποιός είναι ο συντελεστής του $xy$ στο πολυώνυμο $P(x,y,z)$, δευτέρου βαθμού (ως προς $x,y$ και $z$), όταν το όριο $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,3,1)}\dfrac{(x^2-yz)^{xz}-P(x,y,z)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=0$;

**6.7.** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=e^{x\cos(xe^y)}$ και υπολογίστε την παράγωγο $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)$.

**6.8.** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=e^{y+x\cos(xe^y)}$ και υπολογίστε την παράγωγο $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}(0,0)$.

**6.9.** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{x^5y}{(1+xy^2)^2}$ και υπολογίστε την παράγωγο $\dfrac{\partial^{15} f}{\partial x^8\partial y^7}(0,0)$.

**6.10.** Θεωρήστε μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x,y)=\begin{cases} p(x,y)e^{-1/(x^2+y^4)} & \alpha\nu\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \alpha\nu\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

όπου $p(x,y)$ είναι ένα πολυώνυμο των $x,y$. Δείξτε ότι $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ και υπολογίστε τις παραγώγους $\dfrac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)$.

**6.11.** Βρείτε μια συνάρτηση $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ η οποία να μην είναι πολυώνυμο και τέτοια ώστε

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)=0 \text{ για κάθε } k,l \text{ με } k+l\le 100.$$

**6.12.** Βρείτε μια συνάρτηση $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ η οποία να μην είναι πολυώνυμο και τέτοια ώστε

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)=(k+1)^l \text{ για } k,l \text{ με } k+l\le 100.$$

**6.13.** Αν $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ και $P(x,y,z)$ είναι ένα πολυώνυμο $5^{ου}$ βαθμού ως προς τα $x,y,z$, με $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,3,-1)}\dfrac{f(x,y,z)-P(x,y,z)}{|x-2|^6+|y-3|^7+|z+1|^8}=0$, υπολογίστε την τιμή της παραγώγου $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x\partial y^2\partial z^3}$ στο $(2,3,-1)$.

## Ασκήσεις 7.

**7.1.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<y<1,\ y^2<x<3-2y,\ 0<z<x^2+2y^2\}$.

**7.2.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a,\, x,y\ge 0}(2x+3y)\,dxdy$.

**7.3.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_{x=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}\,dy\right)dx$, $\displaystyle\int_{x=0}^{8}\left(\int_{y=\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy}{y^4+1}\right)dx$.

**7.4.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_{x=1}^{2}\left((x-1)\int_{y=0}^{\log x}\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\right)dx$, $\displaystyle\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le 1,\, y\ge 0}\frac{x^3}{x^4+y^4+1}\,dxdy$.

**7.5.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1,\, 1\le 2y\le 2}\frac{y^3dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

**7.6.** Δείξτε ότι ο όγκος του στερεού $\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ x^2+z^2\le 1\}$ είναι $16/3$.

**7.7.** Σωστό ή λάθος; Το όριο $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{kl}{(N^2+k^2+l^2)^2}=\frac{1}{4}\log\frac{4}{3}$.

**7.8.** Υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{N^{10}kl^3}{(N^4+N^2k^2+l^4)^4}$.

**7.9.** Δείξτε ότι $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right)dx=\frac{1}{2}$ και $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right)dy=-\frac{1}{2}$. Γιατί αυτό δεν αντιφάσκει το *Θεώρημα του Fubini*;

**7.10.** Δείξτε ότι $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx=\frac{\pi}{4}$ και $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy=-\frac{\pi}{4}$.

**7.11.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D\sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy$, όπου $D$ είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $(2,-1)$, $(5/2,-1/2)$, $(3,-1)$ και $(5/2,-3/2)$.

**7.12.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}e^{(y-x)/(y+x)}dy\right)dx$.

**7.13.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D\frac{(x+y)^4}{(x-y)^5}dxdy$, όπου $D$ είναι το τετράγωνο $-1\le x+y\le 1$, $1\le x-y\le 3$.

**7.14.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D(x+y)^2e^{x-y}dxdy$ όπου $D$ είναι το σύνολο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, και $x-y=1$.

**7.15.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D\frac{(x+2y)^3dxdy}{(2x^2+5y^2+2xy)^{3/2}}$, όπου

$D=\{(x,y):\ 2x^2+5y^2+2xy\le 1,\ 1\le 2x+4y\le 2\}$. *Υπόδειξη*. Θέστε $u=x+2y$, $v=x-y$.

**7.16.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $\Omega=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le a^2,\ x^2+y^2-a^2\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$.

**7.17.** Υπολογίστε τον όγκο της σφαίρας ακτίνας $a$.

**7.18.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 2ax,\ 0\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$.

**7.19.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που η βάση του είναι το καρδιοειδές $r\le a(1+\cos\theta)$, και το οποίο φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$.

**7.20.** Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο που περικλείεται από τον λημνίσκο $r^2=a^2\cos(2\theta)$.

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ – Θέματα εξετάσεων της 6/2/2015**

## Απαντήστε στα θέματα 1,2,3,4, και σε ένα από τα 5,6.

**Θέμα 1ον. Α.** Εξετάστε αν η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής.

**Β.** Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης στο $xy-$επίπεδο με εξίσωση $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$ ($\alpha>0$).

**Θέμα 2ον. Α.** Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x,y)=(x-5)\log(xy)$, $x>0$, $y>0$.

**Β.** Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_{\mathrm{K}} x^2\sqrt{z}dxdydz$ όπου

$$\mathrm{K}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq a^2,\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq\sqrt{3(x^2+y^2)}\ \}\quad (a>0).$$

**Θέμα 3ον. Α.** Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda$, είναι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\lambda}} & \alpha\nu\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \alpha\nu\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

διαφορίσιμη;

**Β.** Υπολογίστε το διαδοχικό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\left(\int_{y^{1/2}}^{y^{1/5}}\sqrt{1-x^3}dx\right)dy$.

**Β.** Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου στο $xy-$επίπεδο που περικλείεται από την καμπύλη $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$, (όπου $a>0$) και τον άξονα των $x$.

**Θέμα 5ον.** Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\vec{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}+z\vec{k}$ ορισμένο για $(x,y,z)\in\Omega$ όπου $\Omega=\mathbb{R}^3-\{(0,0,z):\ z\in\mathbb{R}\}$. **Α.** Υπολογίστε το $curl\vec{F}$. **Β.** Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου $\gamma$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$, $0\leq t\leq 2\pi$. **Γ.** Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση $f\in C^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $\vec{\nabla}f=\vec{F}$.

**Θέμα 6ον.**

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ – Θέματα εξετάσεων της 10/2/2011**

**Θέμα 1ον. Α.** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$.

**Β.** Αποδείξτε ότι: $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{1\le k,l\le N}\dfrac{kl}{(N^2+k^2+l^2)^2}=\dfrac{1}{4}\log\dfrac{4}{3}$.

**Θέμα 2ον. Α.** Μελετήστε τα όρια: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

**Β.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 2ax,\ 0\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$.

**Θέμα 3ον. Α.** Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου $(\alpha,\beta,\gamma)$ του $xyz-$χώρου από το επίπεδο $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$ είναι $\left|\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\Gamma\gamma+\Delta\right|/\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}$.

**Β.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\dfrac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\iiint\limits_{\varepsilon^2<x^2+y^2+z^2<(1-\varepsilon)^2}$.

**Θέμα 4ον. Α.** Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για το μήκος της καμπύλης $x^2+y^2=x+\sqrt{x^2+y^2}$.

**Β.** Θεωρήστε ένα συμπαγές σύνολο $K\subset\mathbb{R}^n$ και μια συνεχή συνάρτηση $f:K\to\mathbb{R}$ και δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $p,q\in K$ τέτοια ώστε $f(p)\le f(x)\le f(q)$ για κάθε $x\in K$. (Στηριχθείτε στον χαρακτηρισμό της συνέχειας και της συμπάγειας με ακολουθίες.)

**Θέμα 5ον. Α.** Έστω $f(x,y,z)=z(\sin x)^{\cos y}=ze^{\cos y\log(\sin x)}$. Βρείτε αριθμούς $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta$ τέτοιους ώστε

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/4,\pi/4,1)}\frac{\left|f(x,y,z)-\mathrm{A}x-\mathrm{B}y-\Gamma z-\Delta\right|}{\sqrt{(x-\pi/4)^2+(y-\pi/4)^2+(z-1)^2}}=0.$$

**Β.** Δείξτε ότι: $\iint\limits_D\dfrac{(x+y)^4}{(x-y)^5}dxdy=\dfrac{243}{10}$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n:-1\le x+y\le 1,1\le x-y\le 3\}$.

**Θέμα 6ον. Α.** Επαληθεύστε τον τύπο του Green για το σύνολο $D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$ και την διαφορική μορφή $xy^2dy-x^2ydx$.

**Β.** Δείξτε ότι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda\in\mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx)=t^\lambda f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ και κάθε $t>0$, αν και μόνο αν η $f$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\lambda f(x)$.

**Θέμα 7ον. Α.** Θεωρήστε μια $C^2$ συνάρτηση $f(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, και ορίστε την συνάρτηση $\varphi(t)=f(a+\lambda t,b+\mu t)$ για $t\in\mathbb{R}$, όπου $a,b,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\left.\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|_{t=0}=\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+\mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

**Β.** Δείξτε ότι $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2$.

**Απαντήστε σε πέντε θέματα.**

**1.** Σωστό ή λάθος; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xe^{y^2}+y\cos x - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

**2.** Αποδείξτε ότι το τμήμα της εφαπτομένης στην καμπύλη $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ($a>0$) που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο έχει σταθερό μήκος, δηλαδή το μήκος αυτό είναι ανεξάρτητο από το σημείο στο οποίο φέρουμε την εφαπτομένη.

**3.** Δίδεται διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(\vec{r}) = g(\|\vec{r}\|)\vec{r}$ στο $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, όπου $\vec{r}=(x,y)$, $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ και $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Δείξτε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

**4.** Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, όπου $K$ είναι το στερεό που φράσσεται από το κύλινδρο $x^2+y^2=2y$, το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$ και το επίπεδο $z=0$.

**5.** Βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=6x+2y^3$ πάνω στον κύκλο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=2\}$.

**Επαναληπτικές ασκήσεις**

**1.** Θεωρήστε την καμπύλη $\Gamma$ στον $xyz-$χώρο, η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z = x^2 + y^2$ και $z = 10 - x^2 - 2y^2$, και ένα σημείο $(x_0, y_0, z_0)$ αυτής. Γράψτε παραμετρικές εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην $\Gamma$ στο σημείο $(x_0, y_0, z_0)$. Γράψτε επίσης ένα ολοκλήρωμα που να δίνει το μήκος της καμπύλης $\Gamma$.

**2. (5.12)** Θεωρήστε την καμπύλη $\gamma$ στον $xyz-$χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z = y^2 - 3x^2$ και $z^2 + y^2 = 2$, και γράψτε παραμετρικές εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην $\gamma$ στο σημείο $(0,1,1)$.

**3.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού στον $xyz-$χώρο το οποίο φράσσεται από πάνω από την επιφάνεια $z = 10 - x^2 - 2y^2$ και από κάτω από την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$.

**4. (6.10)** Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$y = f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{1/2}}\, x = \left( \frac{x_1}{\sqrt{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \right)$$

για $x \in \mathbb{R}^n$, είναι $C^\infty-$αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$x = g(y) = \frac{1}{(1-|y|^2)^{1/2}}\, y = \left( \frac{y_1}{\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2}}, \ldots, \frac{y_n}{\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2}} \right).$$

**5.** Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \to (x,y)$, που ορίζεται από τις εξισώσεις: $x = uv$, $y = u(1-v)$. Δείξτε ότι ο $\Phi$ απεικονίζει το σύνολο $\mathrm{T} = \{0 < u < 1, 0 < v < 1\}$ στο σύνολο $\Delta = \{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ με $1-1$ και *επί* τρόπο, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό

$$\Psi : \Delta \to \mathrm{T},\ u = x + y,\ v = x/(x+y).$$

**6. (5.14)** Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v,w) \to (x,y,z)$, που ορίζεται από τις εξισώσεις: $x = uvw$, $y = uv(1-w)$, $z = u(1-v)$. Δείξτε ότι ο $\Phi$ απεικονίζει το σύνολο $\Omega = \{0 < u < 1, 0 < v < 1, 0 < w < 1\}$ στο σύνολο $G = \{x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$ με $1-1$ και *επί* τρόπο, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό

$$\Psi : G \to \Omega,\ u = x + y + z,\ v = (x+y)/(x+y+z),\ w = x/(x+y).$$

Δείξτε επίσης ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα του $\Phi$ είναι $\det\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = u^2 v$.

**7. (5.19)** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = e^{x\cos(xe^y)}$ και υπολογίστε την παράγωγο $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)$.

**8. (5.20)** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = e^{y + x\cos(xe^y)}$ και υπολογίστε την παράγωγο $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0)$.

**9.** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x^5 y}{(1+xy^2)^2}$ και υπολογίστε την παράγωγο $\dfrac{\partial^{15} f}{\partial x^8 \partial y^7}(0,0)$.

**10. (5.1)** Μελετήστε τα όρια: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^4}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$.

**11. (5.2)** Θεωρήστε την συνάρτηση $\varphi(x,y) = x\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(\dfrac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}\right)^5\right]$ ορισμένη για $(x,y) \neq (0,0)$. Υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y)$; Είναι σωστό ότι $\displaystyle\sup_{0 < x^2 + y^2 \le 1} |\varphi(x,y)| < \infty$;

**12. (5.11)** Εξετάστε αν σύνολο $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \mathit{με}\ P(x_1, x_2, ..., x_n) = 0\}$ είναι κλειστό, όπου $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι ένα πολυώνυμο των $x_1, x_2, ..., x_n$.

**Επαναληπτικές ασκήσεις …**

**13. (9.3)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{x=0}^{8}\left(\int\limits_{y=\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy}{y^4+1}\right)dx$.

**14. (11.4)** Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint\limits_{K} x^2\sqrt{z}dxdydz$ όπου

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ z\ge 0\}\ \ (a>0).$$

**15. (11.5)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\iiint\limits_{\varepsilon^2<x^2+y^2+z^2<(1-\varepsilon)^2}$

**16.(11.7)**Υπολογίστε τον όγκο του $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ -1\le x+y\le 1,\ 1\le x-y\le 3\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 0\le z(x-y)^6\le |x+y|^5\}$.

**17. (11.10)** Για ένα συμπαγές σύνολο $K\subset\mathbb{R}^2$, θεωρήστε το σύνολο

$$\Omega=\{(tx,ty,a(1-t)):\ (x,y)\in K,\ 0\le t\le 1\}\subset\mathbb{R}^3\ \ (\text{όπου } a>0).$$

Δείξτε ότι $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=a\iint\limits_{(u,v)\in K}\left(\int\limits_{t=0}^{1} f(tu,tv,(1-t)a)t^2dt\right)dudv$. (Υποθέστε ότι το σύνολο $K$ έχει κατα τμήματα ομαλό σύνορο και ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\Omega$.) Εν συνεχεία δείξτε ότι ο όγκος του $\Omega$ είναι ίσος με $\frac{1}{3}a\cdot\mathcal{E}\mu\beta(K)$. Δείξτε επίσης ότι η ροπή αδρανείας του στερεού $\Omega$ με άξονα περιστροφής τον άξονα των $x$ είναι $\frac{1}{5}a\iint\limits_{(x,y)\in K} y^2dxdy$. (Υποθέστε σταθερή πυκνότητα μάζας ίση με 1.)

**18. (12.12)** Δείξτε ότι αν η διαφορική μορφή $Pdx+Qdy+Rdz$ είναι ακριβής (και $C^1$) στο ανοικτό σύνολο $D$ του $xyz-$χώρου, τότε είναι κλειστή, δηλαδή $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$. Ισχύει το αντίστροφο;

**19. (10.15)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{K} e^{3x}\sin y e^{e^{2x}\cos y\sin y}dxdy$, όπου $K$ είναι το σύνολο στο μέρος του $xy-$επιπέδου όπου $|y|\le\pi$ και το οποίο φράσσεται από τις καμπύλες: $e^x\cos y=1,\ e^x\cos y=2$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$.

**20. (8.7)** Θεωρήστε την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ όπου $a,b>0$, και αναζητήστε το σημείο $(u,v)$ πάνω στην έλλειψη με $u>0$ και $v>0$ και με την ιδιότητα αν φέρουμε την εφαπτομένη $\mathrm{E}_{(u,v)}$ στην έλλειψη στο σημείο $(u,v)$, αυτή να κόβει από το πρώτο τεταρτημόριο το ελάχιστο δυνατόν εμβαδόν.

**21. (8.17)** Υπολογίστε την μεγίστη και ελαχίστη τιμή των εξής συναρτήσεων: $f(x,y)=x^2+xy-y^2$ υπό τον περιορισμό $x^2+y^2\le 1$.

**22. (8.20)** Αποδείξτε την ανισότητα $\frac{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}{a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}}\le\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ για κάθε $x_j>0$ και $a_j>0$, με την ισότητα να ισχύει ακριβώς όταν $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_n}{a_n}$.

**23. (7.3)** Για $a>b>0$, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Δείξτε ότι $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=a/e$.

**24. (7.8)** Σωστό ή λάθος; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1,x_2,...,x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1$ και $C^1$ για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$, και αν $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|>0$ όταν $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$, τότε υπάρχουν $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ και $f(x_1,x_2,...,x_n)<f(a_1,a_2,...,a_n)$ όταν $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$.

**Επαναληπτικές ασκήσεις …**

**25.** (*Cycloid*) Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, καθώς και το εμβαδόν που περικλείει. [ $\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma = 8a$ , $\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu = 3\pi a^2$ ]

**26.** (*Astroid*) Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ καθώς και το εμβαδόν που περικλείει. [ $\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma = 6a$ , $\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu = 3\pi a^2 / 8$ ]

**27.** Έστω $a > 1$ και $A > 0$. Υπολογίστε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της ποσότητας $x^{2a} + y^{2a}$ όταν $x^2 + y^2 = A$.

**28.** Έστω $a > 1$ και $A > 0$. Υπολογίστε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της ποσότητας $x_1^{2a} + x_2^{2a} + \cdots + x_n^{2a}$ όταν $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = A$.

**29.** Έστω $A > 0$ και $a_j > 0$, $j = 1,2,...,n$. Υπολογίστε την μέγιστη τιμή της ποσότητας $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ όταν $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = A$ και $x_j > 0$.

**30.** Δείξτε ότι η τιμή του διαδοχικού ολοκληρώματος $\int\limits_{y=0}^{1} \left( \int\limits_{x=\sqrt{y}}^{1} \frac{128 y^2 dx}{(1+x^7)^7} \right) dy$ είναι θετικός ακέραιος αριθμός και υπολογίστε τον.

**31.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y \le x^2, \ x \le 1, \ y \ge 0, \ z \ge 0 \ \kappa\alpha\iota \ z(1+x^7)^7 \le y^2\}$.

**32.** Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου $\gamma$ είναι η τομή της επιφάνειας $z = 1 - x^2 - y^2$ με το $xy-$επίπεδο και $\vec{F}(x,y,z) = [e^{xz} + e^{x+2y}]\vec{i} + [\log(2+y+z) + 2e^{x+2y}]\vec{j} + 3xyz\vec{k}$.

**33.** Εξετάστε αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (2xy + z - 1)\vec{i} + (x^2 + 2yz^2)\vec{j} + (2y^2 z + x - 2z)\vec{k}$ είναι συντηρητικό στον χώρο $\mathbb{R}^3$ και υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου $\gamma$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις: $x(t) = \frac{t}{4}$, $y(t) = \frac{t}{4}\cos t$, $z(t) = \sqrt[3]{t^8}\sin t$, $0 \le t \le 4\pi$.

**10.** Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy$ όπου $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y + 1 \ge 0, \ x + 2y - 2 \le 0 \ \kappa\alpha\iota \ y \ge 0\}$.

**34.** Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\Omega} x\,dxdy$ όπου $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - \sqrt{3}y \ge 0, \ x^2 + y^2 \le 4 \ \kappa\alpha\iota \ y \ge 0\}$.

**35.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 \ \kappa\alpha\iota \ z \ge \sqrt{3x^2 + 3y^2}\}$.

**36.** Για ποιά τιμή του θετικού αριθμού $\lambda$, το κέντρο βάρους του στερεού

$$K_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \ \kappa\alpha\iota \ \lambda z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

είναι το σημείο $(0,0,1)$.

## Ασκήσεις 12.

**12.1.** Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_C (-ydx+xdy)$, $\int_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, όπου $C$ είναι ο κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $a$.

**12.2.** Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \left\{[ye^{xy}\cos z+2x\sin(yz)+x]dx+[xe^{xy}\cos z+zx^2\cos(yz)-e^y]dy-[e^{xy}\sin z-yx^2\cos(yz)-2z]dz\right\}$$

όπου $\gamma$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x=t^3\cos t$, $y=t^2\sin t$, $z=te^t$, $0\le t\le\pi$.

**12.4.** Επαληθεύστε τον τύπο του Green για το σύνολο $D=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 4\}$ και την διαφορική μορφή $xy^2dy-x^2ydx$.

**12.5.** Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$ όπου $\gamma$ είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-a)^2}{A^2}+\frac{(y-b)^2}{B^2}=1$. Υποθέστε ότι $\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}\neq 1$.

**12.6.** Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_T (-ydx+xdy),\ \int_T \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},$$

όπου $T$ είναι η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(-1,-1)$, $(1,-2)$, $(0,3)$.

**12.7.** Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για το μήκος της καμπύλης που είναι η τομή της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=4a^2$ με τον κύλινδρο $x^2+y^2=2ax$.

**12.8.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D}(2x^4+y^2+e^x)dx+(3x-y^3-e^{y^2})dy$, όπου $D$ είναι ο δίσκος $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x+1)^2+y^2<2\}$.

**12.9.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D}(2x^4+e^x+e^y)dx+(xe^y-x^4+y^5)dy$, όπου $D$ είναι το σύνολο $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 3x^2+5(y-1)^4<2\}$.

**12.10.** Βρείτε ένα δυναμικό του πεδίου βαρύτητας $\vec{F}=-\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Εν συνεχεία υπολογίστε το έργο $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου $\gamma$ είναι μια καμπύλη στον $xyz-$χώρο, η οποία ξεκινά από το σημείο $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, καταλήγει στο $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, και δεν περνά από το σημείο $(0,0,0)$.

**12.11.** Σωστό ή λάθος; Αν $V(x,y,z)$ είναι το έργο που απαιτείται για να μεταφερθεί ένα υλικό σημείο από το σημείο $(x,y,z)$ του $xyz-$χώρου στο άπειρο, όταν στο σημείο $(0,0,0)$ ευρίσκεται η μάζα που παράγει το πεδίο, τότε

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{cy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \text{και}\ \frac{\partial V}{\partial z}=\frac{cz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

($c=\textit{θετική σταθερά}$).

**12.12.** Δείξτε ότι αν η διαφορική μορφή $Pdx+Qdy+Rdz$ είναι ακριβής (και $C^1$) στο ανοικτό σύνολο $D$ του $xyz-$χώρου, τότε είναι κλειστή, δηλαδή $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$. Ισχύει το αντίστροφο;

## Ασκήσεις 9.

**9.1.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_K (x^2+y^2)dxdydz$ όπου

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le a^2\ \ \kappa\alpha\iota\ \ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}\quad (a>0),$$

χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες. Εν συνεχεία υπολογίστε το και με σφαιρικές συντεταγμένες. Ομοίως υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_S dxdydz$ όπου $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le a^2\}$, το οποίο δίνει τον όγκο της σφάρας ακτίνας $a$.

**9.2.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}dz\right)dy\right]dx$.

**9.3.** Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, όπου $\Omega$ είναι το στερεό που φράσσεται από το κύλινδρο $x^2+y^2=2y$, το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$ και το επίπεδο $z=0$.

**9.4.** Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_K x^2\sqrt{z}\,dxdydz$ όπου

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ z\ge 0\}\quad (a>0).$$

**9.5.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iiint_{\varepsilon^2<x^2+y^2+z^2<(1-\varepsilon)^2}$

**9.6.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 2ax,\ 0\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$.

**9.7.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ -1\le x+y\le 1,\ 1\le x-y\le 3\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 0\le z(x-y)^6\le|x+y|^5\}.$$

**9.8.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ x>0,y>0,z>0}}xyzdxdydz$. Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint_{\substack{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2<1\\ x>0,y>0,z>0}}xyzdxdydz$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$.

**9.9.** Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le\alpha^2,\ z\ge\lambda\sqrt{x^2+y^2}\}\quad (\alpha>0 \text{ και } \lambda>0).$$

**9.10.** Για ένα συμπαγές σύνολο $K\subset\mathbb{R}^2$, θεωρήστε το σύνολο

$$\Omega=\{(tx,ty,a(1-t)):\ (x,y)\in K,\ 0\le t\le 1\}\subset\mathbb{R}^3\quad (\text{όπου } a>0).$$

Δείξτε ότι $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=a\iint_{(u,v)\in K}\left(\int_{t=0}^1 f(tu,tv,(1-t)a)t^2dt\right)dudv$. (Υποθέστε ότι το σύνολο $K$ έχει κατα τμήματα ομαλό σύνορο και ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\Omega$.) Εν συνεχεία δείξτε ότι ο όγκος του $\Omega$ είναι ίσος με $\frac{1}{3}a\cdot\mathcal{E}\mu\beta(K)$. Δείξτε επίσης ότι η ροπή αδρανείας του στερεού $\Omega$ με άξονα περιστροφής τον άξονα των $x$ είναι $\displaystyle\frac{1}{5}a\iint_{(x,y)\in K}y^2dxdy$. (Υποθέστε σταθερή πυκνότητα μάζας ίση με 1.)

**9.11.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_{\mathbb{R}^3}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$.

**9.12.** Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_C (-ydx + xdy)$, $\int_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, όπου $C$ είναι ο κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $a$.

**9.13.** Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \left\{ [ye^{xy}\cos z + 2x\sin(yz) + x]dx + [xe^{xy}\cos z + zx^2\cos(yz) - e^y]dy - [e^{xy}\sin z - yx^2\cos(yz) - 2z]dz \right\}$$

όπου $\gamma$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = t^3\cos t$, $y = t^2\sin t$, $z = te^t$, $0 \le t \le \pi$.

**9.14.** Επαληθεύστε τον τύπο του Green για το σύνολο $D = \{(x,y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ και την διαφορική μορφή $xy^2dy - x^2ydx$.

**9.15.** Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \left( \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \right)$ όπου $\gamma$ είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$. Υποθέστε ότι $\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} \ne 1$.

**9.16.** Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_T (-ydx + xdy),\ \int_T \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},$$

όπου $T$ είναι η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(-1,-1)$, $(1,-2)$, $(0,3)$.

**9.17.** Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για το μήκος της καμπύλης που είναι η τομή της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ με τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2ax$.

**9.18.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D} (2x^4 + y^2 + e^x)dx + (3x - y^3 - e^{y^2})dy$, όπου $D$ είναι ο δίσκος $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x+1)^2 + y^2 < 2\}$.

**9.19.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D} (2x^4 + e^x + e^y)dx + (xe^y - x^4 + y^5)dy$, όπου $D$ είναι το σύνολο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x^2 + 5(y-1)^4 < 2\}$.

**9.20.** Βρείτε ένα δυναμικό του πεδίου βαρύτητας $\vec{F} = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Εν συνεχεία υπολογίστε το έργο $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου $\gamma$ είναι μια καμπύλη στον $xyz-$χώρο, η οποία ξεκινά από το σημείο $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, καταλήγει στο $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, και δεν περνά από το σημείο $(0,0,0)$.

**9.21.** Σωστό ή λάθος; Αν $V(x,y,z)$ είναι το έργο που απαιτείται για να μεταφερθεί ένα υλικό σημείο από το σημείο $(x,y,z)$ του $xyz-$χώρου στο άπειρο, όταν στο σημείο $(0,0,0)$ ευρίσκεται η μάζα που παράγει το πεδίο, τότε

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{cy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \text{ και } \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{cz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

($c = \textit{θετική σταθερά}$).

**9.22.** Δείξτε ότι αν η διαφορική μορφή $Pdx + Qdy + Rdz$ είναι ακριβής (και $C^1$) στο ανοικτό σύνολο $D$ του $xyz-$χώρου, τότε είναι κλειστή, δηλαδή $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$. Ισχύει το αντίστροφο;

**9.23.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_K (x^2-y^2)^5 x^6 y^6 (x^2+y^2)dxdy$, όπου $K$ είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του $xy-$επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές: $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=2$, $xy=3/2$ και $xy=2$.

## Ασκήσεις 10.

**10.1.** Έστω $\lambda \geq 0$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_K \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^\lambda dxdy$ όπου $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$ ($a,b>0$). Τί μπορείτε να πείτε στην περίπτωση που το $\lambda<0$;

**10.2.** Εντοπίστε το κέντρο βάρους του χωρίου $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ y\geq 0\}$.

**10.3.** Ένας ομογενής δίσκος μάζας $m$ και ακτίνας $a$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο κέντρο του, με γωνιακή ταχύτητα $\omega$. Πόση είναι η κινητική του ενέργεια που οφείλεται σε αυτήν την περιστροφή;

**10.4.** Υπολογίστε την ροπή αδρανείας επίπεδης πλάκας σε σχήμα έλλειψης ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο αυτής. (Υποθέστε πυκνότητα μάζας $\rho=1$.)

**10.5.** Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που ευρίσκεται ανάμεσα στους κυλίνδρους $x^2+y^2=a^2$ και $x^2+y^2=b^2$ ($a<b$), και φράσσεται από πάνω από τον κώνο $z=\lambda\sqrt{x^2+y^2}$ ($\lambda>0$) και από κάτω από το παραβολοειδές $z=-\mu(x^2+y^2+1)$ ($\mu>0$).

**10.6.** Πού ευρίσκεται το κέντρο βάρους των επιπέδων σχημάτων

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\leq a^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\} \text{ και } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ a^2\leq x^2+y^2\leq b^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}.$$

**10.7.** Εντοπίστε το κέντρο βάρους του χωρίου στο τεταρτημόριο $\{x\geq 0, y\geq 0\}$ του $xy-$επιπέδου το οποίο ευρίσκεται μέσα στο καρδιοειδές $r=a(1+\cos\theta)$ και έξω από τον κύκλο $r=a$.

**10.8.** Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη

$$r=\begin{cases}\theta & \textit{για}\ \ 0\leq\theta\leq 3\pi/2\\ -(3\pi/2)\sin\theta & \textit{για}\ \ 3\pi/2\leq\theta\leq 2\pi.\end{cases}$$

**10.9.** Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από κάθε μια από τις καμπύλες: $r=\cos(3\theta)$, $r=\sin(4\theta)$, $r^2=\cos(5\theta)$.

**10.10.** Θεωρήστε το σύνολο $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\leq a(\sqrt{x^2+y^2}+x),\ y\geq 0\}$. Πού ευρίσκεται το κέντρο βάρους του $K$; Ομοίως για το σύνολο $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\leq a(\sqrt{x^2+y^2}+x),\ y\geq 0,\ x\geq 0\}$.

**10.11.** Πόσο είναι το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη με εξίσωση $r^2=a^2\cos(4\theta)$;

**10.12.** Γράψτε ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα για τον όγκο του στερεού

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ (x^2+y^2)^2\geq 2a^2(x^2-y^2),\ 0\leq z\leq\sqrt{2a^2-x^2-y^2}\}.$$

**10.13.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_K (x^2-y^2)^5 x^6 y^6 (x^2+y^2)dxdy$, όπου $K$ είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του $xy-$επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές: $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=2$, $xy=3/2$ και $xy=2$.

**10.14.** Δείξτε ότι για κατάλληλους αριθμούς $\alpha,\beta$ και συνάρτηση $f$,

$$\iint_{\substack{x>0,y>0\\ x+y<1}} x^\alpha y^\beta f(x+y)dxdy=\left(\int_{u=0}^{1} u^{\alpha+\beta+1}f(u)du\right)\left(\int_{v=0}^{1} v^\alpha(1-v)^\beta dv\right).$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $x=uv$, $y=u(1-v)$, με αντίστροφο τον $u=x+y$, $v=x/(x+y)$.

**10.15.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_K e^{3x}\sin y e^{e^{2x}\cos y \sin y}dxdy$, όπου $K$ είναι το σύνολο στο μέρος του $xy-$επιπέδου όπου $|y|\le \pi$ και το οποίο φράσσεται από τις καμπύλες: $e^x\cos y=1$, $e^x\cos y=2$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$.

## Ασκήσεις 9.

**9.1.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<y<1,\ y^2<x<3-2y,\ 0<z<x^2+2y^2\}$.

**9.2.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le a,\, x,y\ge 0}(2x+3y)dxdy$.

**9.3.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{x=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}\,dy\right)dx$, $\int_{x=0}^{8}\left(\int_{y=\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy}{y^4+1}\right)dx$.

**9.4.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{x=1}^{2}\left((x-1)\int_{y=0}^{\log x}\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\right)dx$, $\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le 1,\, y\ge 0}\frac{x^3}{x^4+y^4+1}dxdy$.

**9.5.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1,\, 1\le 2y\le 2}\frac{y^3dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

**9.6.** Δείξτε ότι ο όγκος του στερεού $\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ x^2+z^2\le 1\}$ είναι $16/3$.

**9.7.** Σωστό ή λάθος; Το όριο $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{1\le k,l\le N}\frac{kl}{(N^2+k^2+l^2)^2}=\frac{1}{4}\log\frac{4}{3}$.

**9.8.** Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{1\le k,l\le N}\frac{N^{10}kl^3}{(N^4+N^2k^2+l^4)^4}$.

**9.9.** Δείξτε ότι $\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right)dx=\frac{1}{2}$ και $\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right)dy=-\frac{1}{2}$. Γιατί αυτό δεν αντιφάσκει το *Θεώρημα του Fubini*;

**9.10.** Δείξτε ότι $\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx=\frac{\pi}{4}$ και $\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy=-\frac{\pi}{4}$.

**9.11.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D\sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy$, όπου $D$ είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $(2,-1)$, $(5/2,-1/2)$, $(3,-1)$ και $(5/2,-3/2)$.

**9.12.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}e^{(y-x)/(y+x)}dy\right)dx$.

**9.13.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D\frac{(x+y)^4}{(x-y)^5}dxdy$, όπου $D$ είναι το τετράγωνο $-1\le x+y\le 1$, $1\le x-y\le 3$.

**9.14.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D(x+y)^2e^{x-y}dxdy$ όπου $D$ είναι το σύνολο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, και $x-y=1$.

**9.15.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D\frac{(x+2y)^3dxdy}{(2x^2+5y^2+2xy)^{3/2}}$, όπου

$D=\{(x,y):\ 2x^2+5y^2+2xy\le 1,\ 1\le 2x+4y\le 2\}$. *Υπόδειξη*. Θέστε $u=x+2y$, $v=x-y$.

**9.16.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $\Omega=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le a^2,\ x^2+y^2-a^2\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$.

**9.17.** Υπολογίστε τον όγκο της σφαίρας ακτίνας $a$.

**9.18.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 2ax, \ 0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\}$.

**9.19.** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που η βάση του είναι το καρδιοειδές $r \leq a(1+\cos\theta)$, και το οποίο φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

**9.20.** Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο που περικλείεται από τον λημνίσκο $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$.

## Ασκήσεις 8.

**8.1.** Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+(y-1)^2+4}$ για $x\geq 0$ και $y\geq 0$.

**8.2.** Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=3x^2-2y^2+2y$ για $x^2+y^2\leq 1$.

**8.3.** Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$. Δείξτε ότι η $f$, περιορισμένη σε κάθε ευθεία από το $(0,0)$, έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$. Δείξτε επίσης ότι το σημείο $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f$ και ότι δεν είναι τοπικό ελάχιστο αυτής.

**8.4.** Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $(0,0,0)$ από την επιφάνεια $xyz=1$.

**8.5.** Βρείτε την μεγίστη και ελαχίστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=x^3+y^2$ πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=1$.

**8.6.** Δοθέντων δυο θετικών αριθμών $\alpha$ και $\beta$, υπολογίστε την μεγίστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=x^\alpha y^\beta$ για $x+y=1$ με $x\geq 0$ και $y\geq 0$.

**8.7.** Πάρτε την έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ όπου $a,b>0$, και αναζητήστε το σημείο $(u,v)$ πάνω την έλλειψη με $u>0$ και $v>0$ και με την ιδιότητα αν φέρουμε την εφαπτομένη $\mathrm{E}_{(u,v)}$ στην έλλειψη στο σημείο $(u,v)$, αυτή να κόβει από το πρώτο τεταρτημόριο το ελάχιστο δυνατόν εμβαδόν.

**8.8.** Βρείτε το σημείο πάνω στην επιφάνεια $z^2-xy=1$ το οποίο είναι πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

**8.9.** Δοθέντων αριθμών $a,b,c>0$, υπολογίστε το $\min\{x^3+y^3+z^3:\ ax+by+cz=1\ \ \textit{και}\ x,y,z>0\}$.

**8.10.** Βρείτε τα σημεία στην τομή των επιφανειών $x^2-xy+y^2-z^2-1=0$ και $x^2+y^2-1=0$ τα οποία είναι πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

**8.11.** Υπολογίστε την ελαχίστη από τις αποστάσεις των σημείων της έλλειψης $x^2+4y^2=4$ από τα σημεία της ευθείας $x+y=4$.

**8.12.** Στα σημεία $(x,y,z)$ του ελλειψοειδούς $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, με $x,y,z>0$, φέρουμε τα εφαπτόμενα επίπεδα προς το ελλειψοειδές. Ποιός είναι ο ελάχιστος όγκος που κόβεται με αυτά τα επίπεδα από το πρώτο ογδοημόριο;

**8.13.** Έστω $a,b,c>0$. Αν $x,y,z>0$ και $ayz+bzx+cxy=3abc$, δείξτε ότι $xyz\leq abc$.

**8.14.** Αν $a,b,c>0,$ δείξτε ότι $\left(x^5+y^5+z^5\right)\left(a^{5/4}+b^{5/4}+c^{5/4}\right)^4\geq 1$ όταν $ax+by+cz=1$ και $x,y,z>0$.

**8.15.** Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση $xyz$ υπό την συνθήκη $x+y+z=a$ και $x,y,z>0$, δείξτε ότι $\sqrt[3]{xyz}\leq (x+y+z)/3$. Πότε ισχύει η ισότητα;

**8.16.** Υπολογίστε την μεγίστη τιμή της συνάρτησης $\log x+\log y+3\log z$ στο μέρος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=5r^2$ όπου $x>0$, $y>0$, $z>0$, και εν συνεχεία αποδείξτε την ανισότητα

$$abc^3\leq 27(a+b+c)^5/3125,$$ για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς $a,b,c$.

**8.17.** Υπολογίστε την μεγίστη και ελαχίστη τιμή των εξής συναρτήσεων: $f(x,y)=x^2+xy-y^2$ υπό τον περιορισμό $x^2+y^2\leq 1$, και $f(x,y)=x^4+y^6$, υπό τον περιορισμό $x^2+y^2\leq 1$.

**8.18.** Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή των εξής συναρτήσεων:

$f(x,y)=x^2-y^6$, υπό τον περιορισμό $x^4+y^4\leq 1$, και $f(x,y)=x^2+y$, υπό τον περιορισμό $x^2+y^4\leq 1$.

**8.19.** Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y,z)=x^2-y^2+z,$$ υπό τον περιορισμό $x^2+y^2\leq 1$ και $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

**8.20.** Αποδείξτε την ανισότητα $\dfrac{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}{a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}}\leq\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ για κάθε $x_j>0$ και $a_j>0$, με την ισότητα να ισχύει ακριβώς όταν $\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{a_n}$.