Ασκησεις Μαθημα 1

(1) $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ ειναι ορθοκανονικη βαση του $\mathbb{R}^n$

Τα $\vec{e}_i$, $i=1,\dots,n$ ειναι γρ. ανεξ., $\|\vec{e}_i\|=1$ και για $i\neq j$

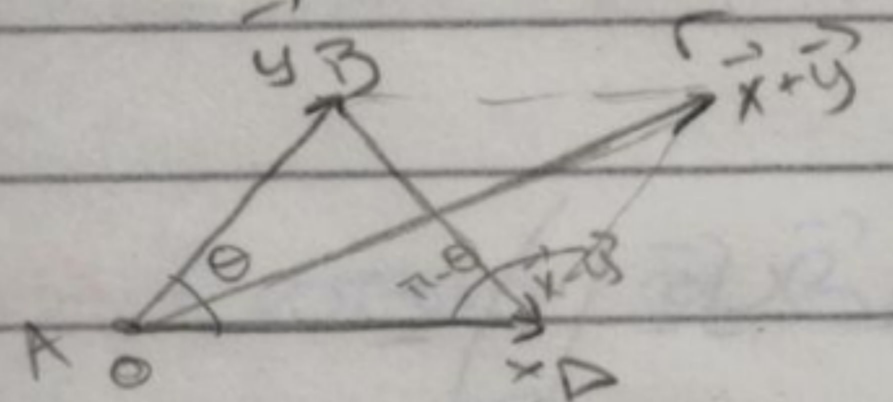
$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=(0,\dots,\overset{i\text{-θεση}}{1},0,\dots 0)\cdot(0,\dots,\overset{j\text{-θεση}}{1},0,\dots 0)=0$. Αρα η $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ ειναι ορθοκανονικη βαση του $\mathbb{R}^n$.

(2) $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ Πυθαγορειο Θ.

Εστω οτι $\vec{u}\perp\vec{v}$ τοτε $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} \overset{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}{=}\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$

Εστω οτι $\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0\iff\vec{u}\perp\vec{v}$.

(3) Νομος παρ/μου $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=2\|\vec{x}\|^2+2\|\vec{y}\|^2$



Νομος συνημιτονων στο $A\hat{B}\Delta$:

$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\,\text{συν}\theta$ (1)

Νομος συνημιτονων στο $A\hat{\Gamma}\Delta$:

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\,\text{συν}(\pi-\theta)$ (2)

Προσθετοντας κατα μελη τις (1) και (2):

$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2+\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=2\|\vec{x}\|^2+2\|\vec{y}\|^2-2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|(\cancelto{0}{\text{συν}\theta+\text{συν}(\pi-\theta)})=$
$2\|\vec{x}\|^2+2\|\vec{y}\|^2$

αλλιως: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2+\|\vec{x}\|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2=$
$2\|\vec{x}\|^2+2\|\vec{y}\|^2$.

Ιδιοτητες εξωτερικου γινομενου.

(1) $(\lambda\vec{y})\times\vec{y}=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$(\lambda\vec{y})\times\vec{y}=\det\begin{vmatrix} i & j & k\\ \lambda y_1 & \lambda y_2 & \lambda y_3\\ y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\lambda\left(\begin{vmatrix}y_2&y_3\\y_2&y_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}y_1&y_3\\y_1&y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\right)=\vec{0}$$

(2) $\vec{y}\times\vec{z}=-\vec{z}\times\vec{y}$

$$\vec{y}\times\vec{z}=\left(\begin{vmatrix}y_2&y_3\\z_2&z_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}y_1&y_3\\z_1&z_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}y_1&y_2\\z_1&z_2\end{vmatrix}\right)=\left(-\begin{vmatrix}z_2&z_3\\y_2&y_3\end{vmatrix},+\begin{vmatrix}z_1&z_3\\y_1&y_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}z_1&z_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\right)$$
$=-\vec{z}\times\vec{y}$.

(3) $(\lambda\vec{x})\times\vec{y}=\lambda(\vec{x}\times\vec{y})$

$$(\lambda\vec{x})\times\vec{y}=\left(\begin{vmatrix}\lambda x_2&\lambda x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\lambda x_1&\lambda x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\lambda x_1&\lambda x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\right)=\lambda\left(\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix},\right.$$

$-\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\Bigg) = \lambda(\vec{x}\times\vec{y}).$

(4) $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}$

$$\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2+z_2 & y_3+z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1+z_1 & y_3+z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$\vec{x}\times\vec{y} + \vec{x}\times\vec{z}.$

(5) $\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}.$

$$\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = \left(x_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, -x_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, x_3\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \left(z_1\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -z_2\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, z_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\right)$$

αναπτύσσω ως προς 3η γρ.

$=(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}.$

Ιδιότητα 6 βλέπε Συμπληρωματικό υλικό

Απαντήσεις:

(1) $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ $\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{x},\vec{y}$.

Αρκεί ν.δ.ο. $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{y}=0$ και $\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y})=0$.

$(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{y} \overset{(5)}{=} \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{y}) \overset{(1)}{=} \vec{x}\cdot\vec{0}=0$. Όμοια $\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y})=0$.

Άρα $\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{x},\vec{y}$.

(2) $\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2-(\vec{x}\cdot\vec{y})^2$ Ταυτότητα Lagrange $n=3$

$\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2=(\vec{x}\times\vec{y})\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) \overset{(5)}{=} ((\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{x})\cdot\vec{y} \overset{(2)}{=} -[\vec{x}\times(\vec{x}\times\vec{y})]\cdot\vec{y} \overset{(6)}{=}$

$-[(\vec{x}\cdot\vec{y})\vec{x}-(\vec{x}\cdot\vec{x})\cdot\vec{y}]\cdot\vec{y} = -[(\vec{x}\cdot\vec{y})\vec{x}-\|\vec{x}\|^2\vec{y}]\cdot\vec{y} =$

$+\|\vec{x}\|^2(\vec{y}\cdot\vec{y})-(\vec{x}\cdot\vec{y})\cdot(\vec{x}\cdot\vec{y}) = \|x\|^2\|\vec{y}\|^2-(\vec{x}\cdot\vec{y})^2$

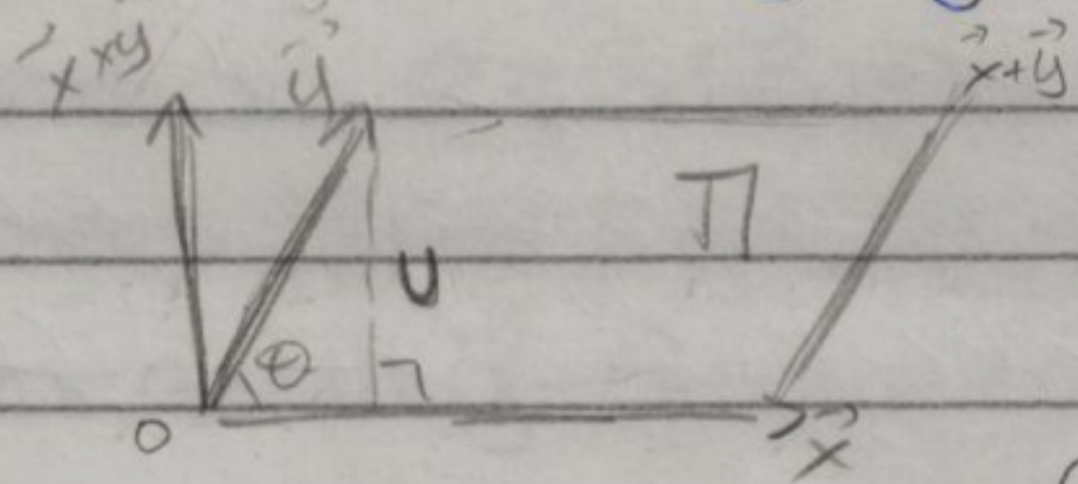
(3) $\vec{x},\vec{y}\neq\vec{0}$ $\|\vec{x}\times\vec{y}\|=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\eta\mu\theta$, $\theta\ \sphericalangle(\vec{x},\vec{y})$.

$\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2 \overset{Lag.}{=} \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2-(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2-\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2\sigma\upsilon\nu^2\theta =$

$\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta) = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2\eta\mu^2\theta \Rightarrow \|\vec{x}\times\vec{y}\|=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\eta\mu\theta$

Το $\{\vec{x},\vec{y}\}$ γρ. ανεξ $\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $\vec{x}\times\vec{y}\neq\vec{0} \Leftrightarrow \theta\neq 0,\pi$.

(4) Έστω $\vec{x},\vec{y}$ γρ. ανεξ. Π ||γραμμο με κορυφές $\vec{0},\vec{x},\vec{y},\vec{x}+\vec{y}$, $\Pi=\{\lambda\vec{x}+\mu\vec{y} : 0\le\lambda,\mu\le 1\}$



Τότε $E(\Pi)=\|\vec{x}\times\vec{y}\|$.

$\left.\begin{array}{l} E(\Pi)=\|\vec{x}\|\cdot\upsilon \\ \text{Όμως } \upsilon=\|\vec{y}\|\cdot ημθ \end{array}\right\}$ $E(\Pi)=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cdot ημθ = \|\vec{x}\times\vec{y}\|$

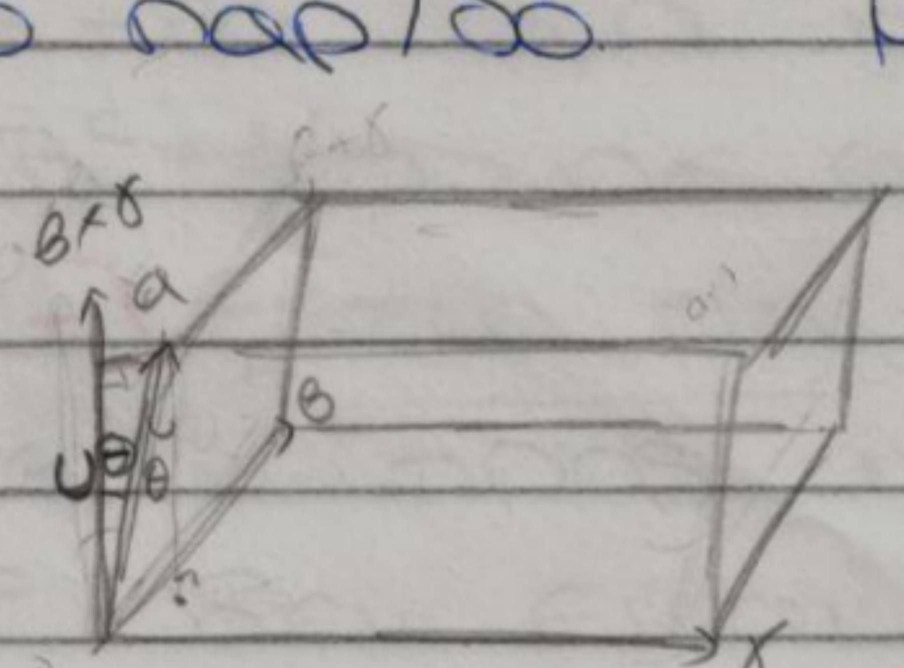
(5) Έστω $\vec{a}=(a_1,a_2,0)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,0)$ Τότε $E(\Pi)=\left|\det\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\right|$

όπου Π παρ/μο με κορυφές $\vec{0},\vec{a},\vec{\beta},\vec{a}+\vec{\beta}$

Από (4) $E(\Pi)=\|\vec{a}\times\vec{\beta}\|=\left\|\left(0,0,\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\right)\right\|=\left|\det\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\right|$

(6) Έστω $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ $\Pi=\{t_1\vec{a}+t_2\vec{\beta}+t_3\vec{\gamma} : 0\le t_i\le 1\}$

το παρ/δο με κορυφές $\vec{0},\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{a}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\gamma}+\vec{a},\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$



$$V(\Pi)=\left|\det\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\right|$$

$$A=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=\vec{a}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$$

Άρα $|A|=\|\vec{a}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{\beta}\times\vec{\gamma}\|\cdot συνθ$ όπου $\theta=\measuredangle(\vec{a},\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$ όμως $\upsilon=\|\vec{a}\|\cdot συνθ$ (ύψος) και $\|\vec{\beta}\times\vec{\gamma}\|=E(\text{βάσης})$ άρα $|A|=(\|\vec{a}\|\cdot συνθ)\,\|\vec{\beta}\times\vec{\gamma}\|=V(\Pi)$.

Ασκήσεις

(1) Το $\{\vec{i},\vec{j}\}$ είναι δεξιόστροφο

$\vec{i},\vec{j}$ γρ. ανεξ και $\det\{\vec{i},\vec{j}\}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1>0$ ✓

(2) Το $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ είναι δεξιόστροφο

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ γρ. ανεξ και $\det\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ ✓

(3) Το $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}\}$ ειναι δεξιοστροφο, ($\vec{u}, \vec{v}$ γρ. ανεξ).

$$\det\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}\} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

αναπτυσσω ως προς $3^{η}$ γρ.

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 \geq 0$$ ομως u, v γρ.

ανεξ αρα $\det\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}\} > 0$