Ασκήσεις Όρια - Συνέχεια

(1) Εξετάστε ως προς την ύπαρξη του ορίου στο (0,0) τις συναρτήσεις:

(i) $f_1(x,y) = \dfrac{x^4-2y^4}{x^2+y^2}$

Αν $\vec{x}=(x,y)$ τότε

$|f_1(x,y)-0| = \left|\dfrac{x^4-2y^4}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{|x^4-2y^4|}{\|\vec{x}\|^2}$

$\leq \dfrac{|x|^4+2|y|^4}{\|\vec{x}\|^2} \leq \dfrac{3\|\vec{x}\|^4}{\|\vec{x}\|^2} = 3\|\vec{x}\|^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

(ii) $f_2(x,y) = x\log\sqrt{x^2+y^2}$

Αν $\vec{x}=(x,y)$ τότε

$|f_2(x,y)-0| = |x\log\sqrt{x^2+y^2}| =$

$|x|\log\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|\cdot\log\|\vec{x}\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

αφού $\lim\limits_{t\to 0^+} t\log t = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\log t}{1/t}$

$\overset{DLH}{=} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1/t}{-1/t^2} = \lim\limits_{t\to 0^+}(-t) = 0$

(iii) $f_3(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{\sin^2(x^2+y^2)}$

$\lim\limits_{x\to 0} f_3(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{\sin^2(2x^2)} \overset{DLH}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot\sin x^2}{2\sin(2x^2)\cdot\cos(2x^2)\,4x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin x^2}{\sin(4x^2)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2/x^2}{4\sin(4x^2)/4x^2} =$

$1/2 \cdot 1/4 = 1/8.$

Για $x \neq 0$ $f_3(x,0) = \frac{0}{\sin^2(x^2)} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f_3(x,0) = 0$

Άρα $\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f_3(x,y)$

(iv) $f_4(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{\sin(x^4+y^4)}$

Για $x \neq 0$ $f_4(x,0) = \frac{x^4}{\sin(x^4)}$

$\lim_{x \to 0} f_4(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(x^4)/x^4} = 1$

Για $y = ax$ $f_4(x,ax) = \frac{(a^2+1)^2 \cdot x^4}{\sin((a^4+1)x^4)}$ Άρα

$\lim_{x \to 0} f_4(x,ax) = \lim_{x \to 0} \frac{(a^2+1)^2/(a^4+1)}{\sin((a^4+1)x^4)/(a^4+1)x^4} =$

$\frac{(a^2+1)^2}{a^4+1}$ Τότε για $a = 1$

$\lim_{x \to 0} f_4(x,x) = 2$

Άρα $\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f_4(x,y)$

(2) Έστω $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$, $x \neq y$. Ν.δ.ο.:

(i) $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \underset{r\to 0}{\to} 0$

(ii) $f(x, ax^\lambda) \underset{x\to 0}{\to} 0$, $\lambda > 1$

(iii) $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(i) Θέτουμε $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$
με $r \in (0,+\infty)$ και $\theta \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi/4, 5\pi/4\}$.
Τότε $f(r\cos\theta, r\sin\theta) =$

$$\frac{r^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{r(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{r\sin 2\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

Τότε $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$.

(ii) $f(x, ax^\lambda) = \frac{ax^{\lambda+1}}{x - ax^\lambda} = \frac{ax^{\lambda+1}}{x^\lambda(1/x^{\lambda-1} - a)} =$

$$\frac{ax}{1/x^{\lambda-1} - a} \underset{x\to 0}{\to} 0$$

(iii) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y} = \frac{1}{1/y - 1/x}$, $x \neq y$.

Θεωρούμε $g(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $x \neq y$.

Τότε $f(x,y) = \frac{1}{g(x,y)}$. Όμως

$\lim\limits_{n\to\infty} g(1/n, -1/n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-2n) = -\infty$

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n, -1/n) = 0$ και
$\lim\limits_{n\to\infty} g(1/n, 1/(n+1)) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$
Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n, 1/(n+1)) = 1$
Άρα $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(3) Εξετάστε αν υπάρχει $a_i \in \mathbb{R}$ ώστε η g_i να είναι συνεχής

(i) $g_1(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{\sin(x^2+y^2)}$ $(x,y) \neq (0,0)$, $g_1(0,0) = a_1$

$g_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{r^2 \sin(2\theta)}{\sin(r^2)}$

Τότε $\lim\limits_{r \to 0} g_1(r\cos\theta, r\sin\theta) =$
$\dfrac{1}{2} \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin(r^2)/r^2} = \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$

Αλλά το $\frac{1}{2} \cdot \sin(2\theta)$ μεταβάλλεται σε σχέση με το θ.
πχ για $\theta = \pi/4$ $\lim\limits_{r \to 0} g_1\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$
και για $\theta = 0$ $\lim\limits_{r \to 0} g_1(r,0) = 0$.
Άρα $\nexists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} g_1(x,y) \Rightarrow$
$\nexists a_1 \in \mathbb{R}$: $g_1(x,y)$ συνεχής στο $(0,0)$.

αλλιώς: $\lim\limits_{x \to 0} g_1(x,x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sin(2x^2)} = \dfrac{1}{2}$

και $\lim\limits_{x \to 0} g_1(x,0) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$.

(ii) $g_2(x,y) = \dfrac{2x^2 - x^2y^2 + 2y^2}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$, $g_2(0,0) = a_2$.

$|g_2(x,y) - 2| = \left| \dfrac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 2 \right| =$

$\left| \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| = \dfrac{|x^2y^2|}{\|\vec{x}\|^2} \leq \dfrac{\|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2} = \|\vec{x}\|^2 \xrightarrow[\vec{x} \to (0,0)]{} 0$

όπου $\vec{x} = (x,y)$.
Άρα για $a_2 = 2$ η g_2 είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(iii) $g_3(x,y,z)=\dfrac{\sin(x^2+y^2+z^4)}{x^2+y^2+z^2}$, $(x,y,z)\neq\vec{0}$, $g_3(0,0,0)=a_3$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g_3(x,y,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$

$\lim\limits_{z\to 0} g_3(0,0,z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z^4}{z^2}=$

$\lim\limits_{z\to 0} z^2\cdot\dfrac{\sin z^4}{z^4}=0\cdot 1=0$

Αρα $\nexists \lim\limits_{(0,0,0)} g_3(x,y,z) \Rightarrow \nexists a_3\in\mathbb{R}$:
g_3 συνεχης στο $(0,0,0)$.

(4) Να ευρεθουν τα $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ αν υπαρχουν, οπου
$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))=\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=0$

Ομως $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$

και $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$
Αρα $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
Δηλαδη ενω τα διαδοχικά ορια υπαρχουν και ταυτιζονται το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπαρχει.

(5) Να υπολογισθούν τα $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}(f(x,y))$ και $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ αν υπάρχουν όπου $f(x,y)=\begin{cases} x\sin(1/y), & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$

$|f(x,y)-0|=|x||\sin(1/y)|\leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Αρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

$\lim_{x\to 0} f(x,y)=0 \Rightarrow \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))=0$

Ομως $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ δεν υπάρχει για $x\neq 0$. Πράγματι, $\nexists$ το όριο της $x_0\cdot\sin(1/y)$ για $y\to 0$, $x_0\neq 0$.

Ενώ δηλαδή το όριο της συνάρτησης υπάρχει στο (0,0) το ένα από τα μερικά όρια δεν υπάρχει για $x\neq 0$.

(6) Εστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν τα $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ για $y\in\mathbb{R}$, $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ για $x\in\mathbb{R}$ Δ.ο.

$\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))=\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))$

Εστω ότι $\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell$ και $\varepsilon>0$ τυχαίο. Τότε $\exists\,\delta>0$: αν $0<|x-x_0|<\delta$ και $0<|y-y_0|<\delta$ τότε $|f(x,y)-\ell|<\varepsilon$ (1)

Αλλά αφού $\exists \lim_{x\to x_0} f(x,y)$ η σχέση (1) γίνεται: $|\lim_{x\to x_0} f(x,y)-\ell|<\varepsilon$ για $0<|y-y_0|<\delta$.

Αρα $\exists \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\ell$

Ομοίως $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))=\ell$

Ορισμός: Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Το A καλειται κατα τοξα συνεκτικό αν $\forall \vec{a}, \vec{b} \in A$ $\exists$ συνεχής καμπυλη $\vec{r}: [a_0, b_0] \to A$ τ.ω. $\vec{r}(a_0) = \vec{a}$ και $\vec{r}(b_0) = \vec{b}$.

(*) Εαν $\vec{f}: A \to \mathbb{R}^m$ συνεχής στο A - κατα τοξα συνεκτικό τοτε το $\vec{f}(A)$ ειναι κατα τοξα συνεκτικό.

Εστω $\vec{a}, \vec{b} \in A$ αφου το A ειναι κ.τ.σ.

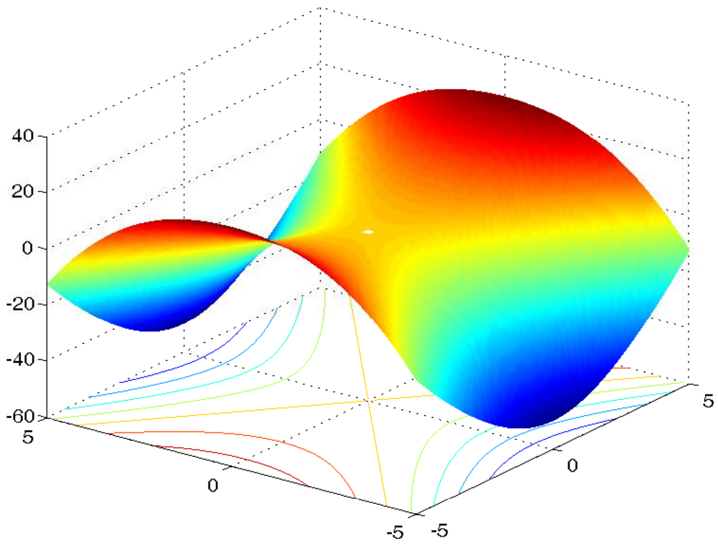
$\exists \vec{r}: [a_0, b_0] \to A : \vec{r}(a_0) = \vec{a}$ και $\vec{r}(b_0) = \vec{b}$ και

$\vec{r}$ συνεχής, $\vec{r}([a_0, b_0]) \subseteq A$ (1)

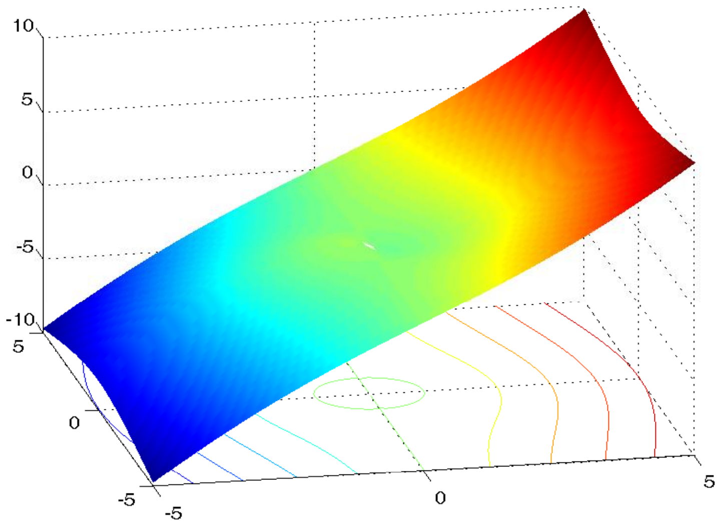
Τοτε η $\vec{g} = \vec{f} \circ \vec{r}$ ειναι συνεχής ως συνθεση συνεχων και $\vec{g}([a_0, b_0]) = \vec{f}(\vec{r}([a_0, b_0])) \overset{(1)}{\subseteq} \vec{f}(A)$.

Αρα το $\vec{f}(A)$ ειναι κ.τ.σ.

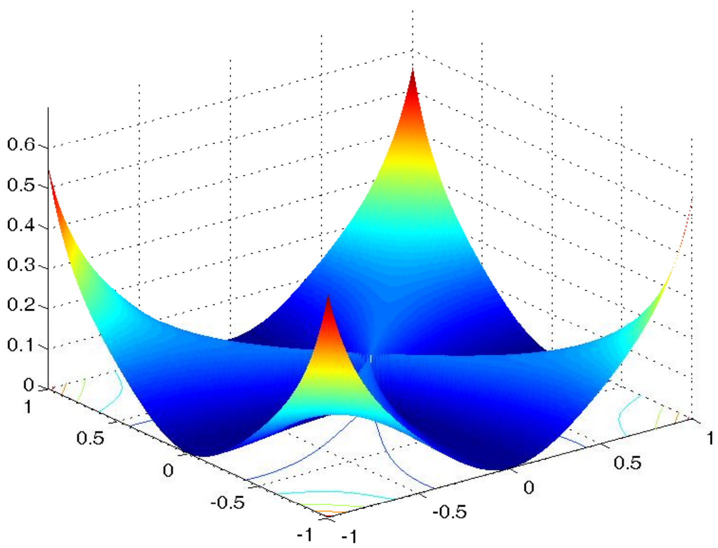
Σχήματα



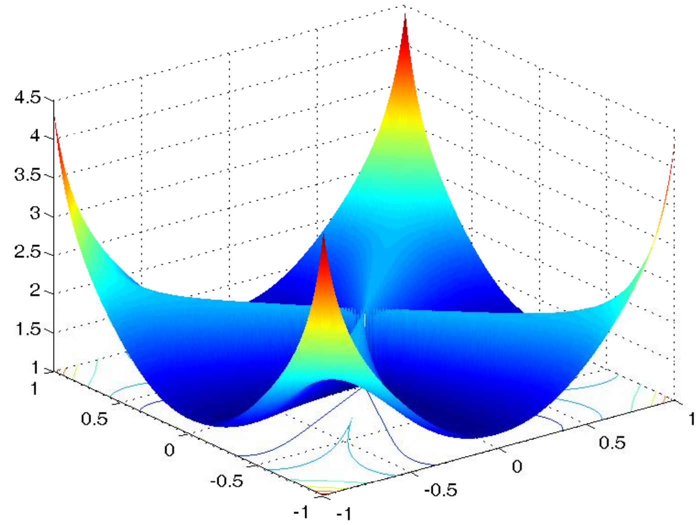
Άσκηση 1. i)



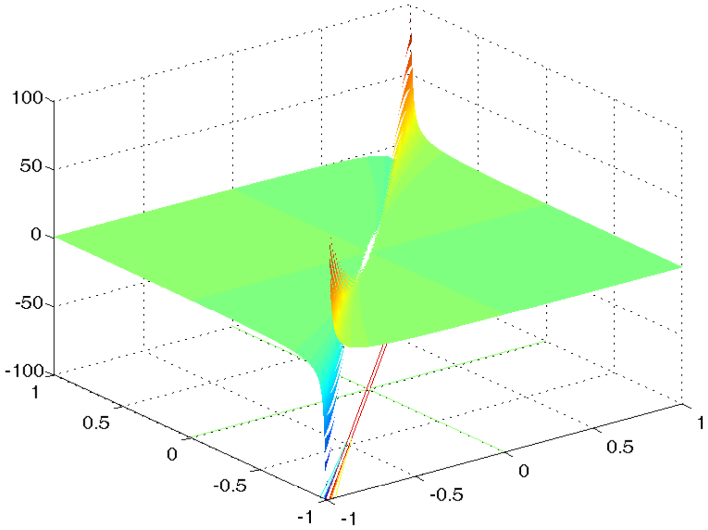
Άσκηση 1. ii)



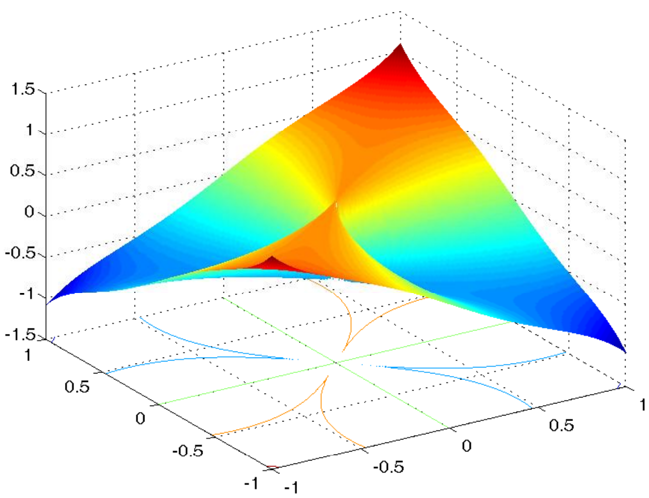
Άσκηση 1. iii)



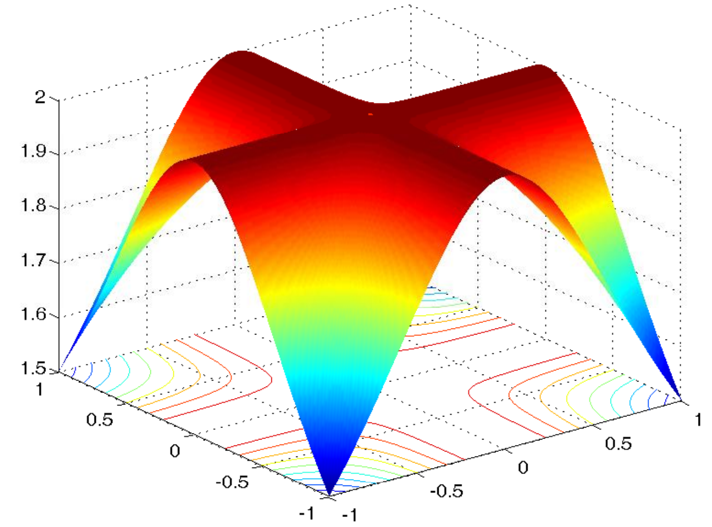
Άσκηση 1. iv)



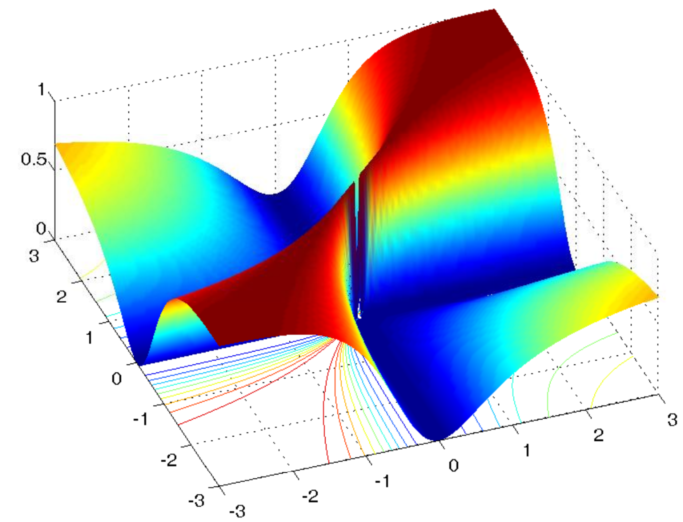
Άσκηση 2



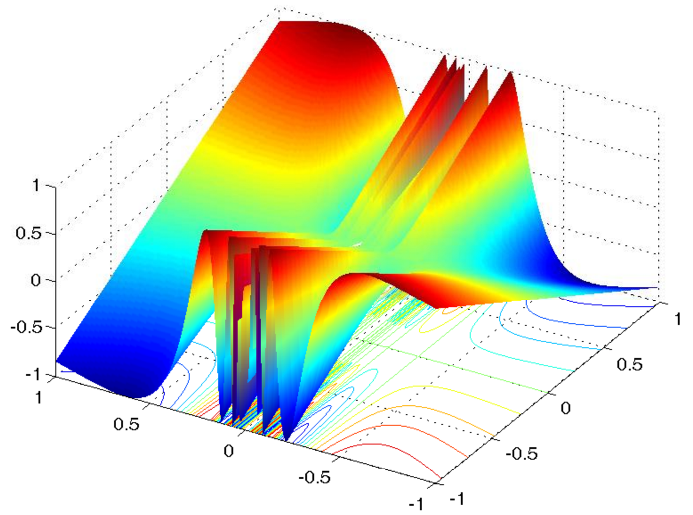
Άσκηση 3. i)



Άσκηση 3. ii)



Άσκηση 4



Άσκηση 5