Μάθημα 5ο
(13/3/2015)

Όρια, Συνέχεια (...)

Θεώρημα (Θ. Φράγματος, Μεγίστου - Ελαχίστου)

$\vec{f}: K(\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^m$, συνεχής στο K, K = συμπαγές

i) $\vec{f}(K) \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές
Ιδιαιτέρως, η $\vec{f}$ είναι φραγμένη στο K.

ii) $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ τότε
$\exists\ \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K$:
$f(\vec{x}_1) = \min\{f(\vec{x}) : x \in K\}$,
$f(\vec{x}_2) = \max\{f(\vec{x}) : x \in K\}$

Απόδειξη

i) Έστω $\vec{y}_n \in \vec{f}(K)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\exists\ \vec{x}_n \in K$: $\vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{y}_n$

$(\vec{x}_n)_n$ ακολουθία του K = συμπαγές $\Longrightarrow \exists\ \vec{x}_{k_n} \xrightarrow{n} \vec{x}_0 \in K$

$\vec{f}$ συνεχής στο $K \xRightarrow{A.M.} \vec{f}(x_{k_n}) \xrightarrow[n]{} \vec{f}(\vec{x}_0)$

δηλαδή $\vec{y}_{k_n} \longrightarrow \vec{f}(\vec{x}_0) \in \vec{f}(K)$. Άρα, το $\vec{f}(K)$ είναι συμπαγές.

ii) Το $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο

Άρα $\exists\ \sup f(K)$, $\inf f(K) \in \mathbb{R}$.

$f(K)$ = κλειστό, $\sup f(K) \in f(K)$

$\inf f(K) \in f(K)$

δηλαδή, $\exists\ \vec{x}_2 \in K$: $f(\vec{x}_2) = \max f(K)$ και $\exists\ \vec{x}_1 \in K$: $f(\vec{x}_1) = \min f(K)$.

Θεώρημα (Θ. Θ. Συνέχειας)

$\vec{f} : K (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ συνεχής στο K, K συμπαγές.
Τότε, η $\vec{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη Ανάλογη με την απόδειξη για $d=m=1$. —

Ασκήσεις 3.

1) Εξετάστε ως προς την ύπαρξη ορίου στο $(0,0)$ τις συναρτήσεις:

i) $f_1(x,y) = \dfrac{x^4 - 2y^4}{x^2+y^2}$

ii) $f_2(x,y) = x \log \sqrt{x^2+y^2}$

iii) $f_3(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$, $x \neq y$.

iv) $f_4(x,y) = \dfrac{1-\text{συν}(xy)}{\text{ημ}^2(x^2+y^2)}$

v) $f_5(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{\text{ημ}(x^4+y^4)}$

2) Υπάρχει $a_i \in \mathbb{R}$ ώστε g_i να είναι συνεχής;

i) $g_1(x,y) = \dfrac{xy}{\text{ημ}(x^2+y^2)}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $g_1(0,0) = a_1$.

ii) $g_2(x,y) = \dfrac{2x^2 - x^2y^2 + 2y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $g_2(0,0) = a_2$

iii) $g_3(x,y,z) = \dfrac{\text{ημ}(x^2+y^2+z^4)}{x^2+y^2+z^2}$, $(x,y,z) \neq (0,0)$, $g_3(0,0,0) = a_3$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

Τι παρατηρούμε;

4) $f(x,y)=\begin{cases} x\,\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ Τι παρατηρούμε;

5) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(x_0,y_0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

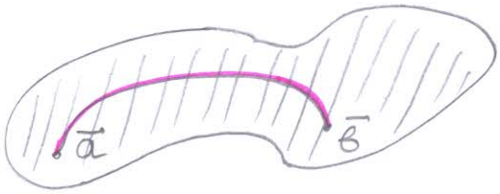
Έστω $\exists\ \lim_{(x_0,y_0)}f(x,y)$, $\lim_{x\to x_0}f(x,y)$ $\forall y\in\mathbb{R}$ και $\lim_{y\to y_0}f(x,y)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

ΝΔΟ $\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0}(f(x,y))\right)=\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}(f(x,y))\right)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y))$

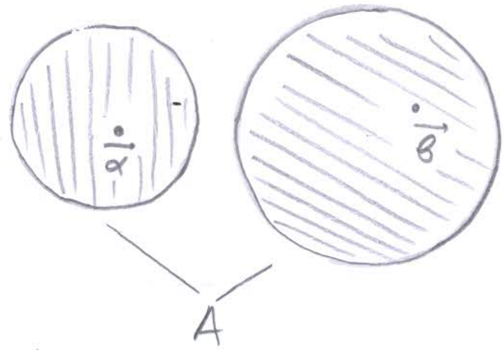
6) $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $A \neq \emptyset$

A κατά τόξα συνεκτικό. $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b} \in A$, $\vec{a} \neq \vec{b}$
υπάρχει $\vec{\tau} : [a, b] \longrightarrow A$ συνεχής : $\vec{\tau}(a) = \vec{a}$, $\vec{\tau}(b) = \vec{b}$

ΝΔΟ $\bar{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ συνεχής τότε το $\bar{f}(A)$ είναι κ.τ. συνεκτικό.



Κατά τόξα
συνεκτικό.



όχι κατά τόξα
συνεκτικό.