Μάθημα 15

4/05/2015

Θ. Green στο Επίπεδο.

Θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως τα εξής:

1) $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi' =$ ολοκληρώσ. Τότε $\int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

(Θ Θ. Απ. Αλ.)

2) $f : D (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

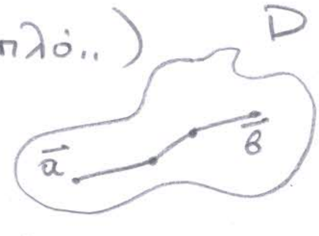
- $D = \{ (x,y) : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$

$\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς

Τότε $\exists$ $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$ (Θ. Fubini)

3) $f \geq 0$ συνεχής στο D (= ανοιχτό, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\bar{D} =$ "απλό..")

και $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$, τότε $f = 0$ (άσκηση)



- 4) $D =$ πολ. συνεκτικό, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (ανοιχτό) και $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$(x,y) \in D$

Τότε $f =$ σταθερή (ΘΜΤ)

---

5) $\vec{F_1}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ $(x,y,z) \in A (\subseteq \mathbb{R}^3)$

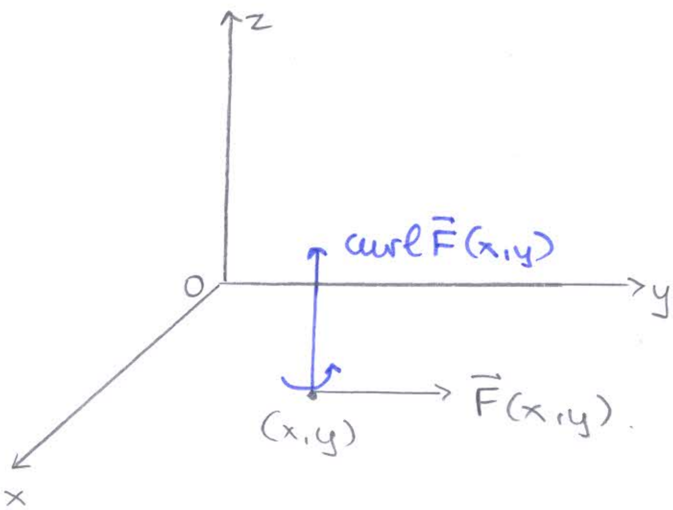
C^1 $\quad \operatorname{curl}\vec{F}(x,y,z) =: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{(x,y,z)} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{(x,y,z)}$

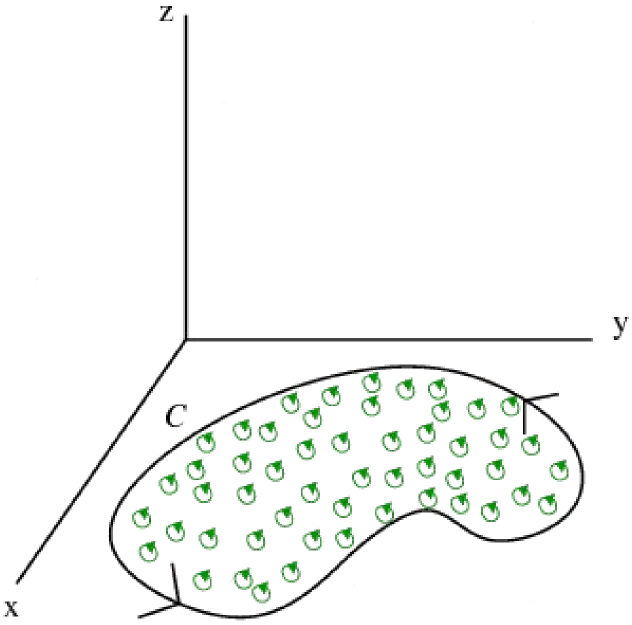
Αστρόβιλο στο $A \iff \operatorname{curl}\vec{F} = (0,0,0)$ στο A

Εάν $\vec{F} = (P,Q) : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$

$\operatorname{curl}\vec{F}(x,y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$

$\vec{F}$ αστρόβιλο στο A $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ στο A





6) $\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (συνεχής)

C^1-παραμετρημένη καμπύλη $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$,
$\vec{r}(t) \in A$

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt =$$

$$\int_a^\beta \left[P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right] dt$$

Συμβολισμός $\displaystyle\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$

7) $\vec{F} = \nabla f$, $\vec{F} = C^1$, $\Gamma: \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^\beta \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \overset{\text{Θ.Θ.Απ.Λ}}{=} f(\vec{r}(\beta)) - f(\vec{r}(\alpha))$$

Κανονας
Αλυσιδας

$\vec{F} = \nabla f$, $\vec{F}$ = συντηρητικό / Π. Κλίσεων

Εάν $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$, Γ = κλειστή $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$\vec{F}$ συντηρητικό $\Longrightarrow$ $\vec{F}$ = αστρόβιλο

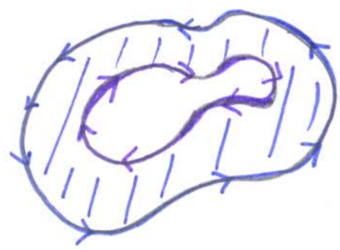
$\not\Longleftarrow$

(Βλέπε Σελ 111)

Τύπος του Green στο επίπεδο.

$\vec{F} = (P, Q) : D \,(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, C^1, ∂D αποτελείται από k-καμπύλες ($k \in \mathbb{N}$) (D = σύνολο Green)

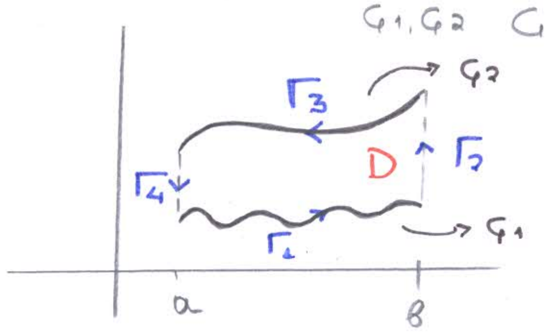
$$\int_{(\partial D)^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$



Απόδειξη για D (ειδική περίπτωση)

1η Περίπτωση. $\vec{F} = (P, 0)$ $D = \{ (x,y) : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \}$

φ_1, φ_2 C^1 (x-απλό / Τύπου Ι)



$(\partial D)^+ = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$

- $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = -\int_\alpha^\beta \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \right) dx \overset{\text{ΘΘΑπΛ}}{=}$$

$$= -\int_\alpha^\beta \left[P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) \right] dx \quad (*)$$

- $$\int_{(\partial D)^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} (P,0) \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} (P,0) \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} (P,0) \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_4} (P,0) \cdot d\vec{r}$$

Γ_1, $\vec{r}_1(t) = (t, \varphi_1(t))$, $t \in [a, b]$, $\vec{r}_1'(t) = (1, \varphi_1'(t))$

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta P(t, \varphi_1(t), 0) \cdot (1, \varphi_1'(t))\, dt = \int_\alpha^\beta P(t, \varphi_1(t))\, dt \quad (1)$$

Γ_2, $\vec{r_2}(t) = (\beta, t)$, $t \in [\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta)]$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\varphi_1(\beta)}^{\varphi_2(\beta)} (P(\beta,t), 0) \cdot (0,1)\, dt = 0 \quad (2)$$

$-\Gamma_3$: $\vec{r_3}(t) = (t, \varphi_2(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_{-\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta (P(t), \varphi_2(t), 0) \cdot (1, \varphi_2'(t))\, dt = \int_\alpha^\beta P(t, \varphi_2(t))\, dt \quad (3)$$

Γ_4, $\int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4)$

Από τις $(1-4)$ $\int_{(\partial D)^+} (P,0) \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta (P(t), \varphi_1(t)) - P(t, \varphi_2(t)))\,dt$

$**$

$*$, $**$ Ισχύει ο τύπος του Green για $\vec{F} = (P,0)$

2η Περίπτωση

$\vec{F} = (0, Q)$, $D = y$-απλό Ανάλογα.

3η Περίπτωση

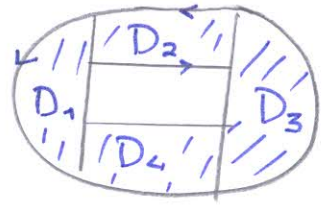
$\vec{F} = (P, Q) = (P,0) + (0,Q)$, D απλό ($x+y$ απλό)

$$\int_{(\partial D)^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(\partial D)^+} (P,0) \cdot d\vec{r} + \int_{(\partial D)^+} (0,Q) \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

<u>Σημείωση</u> Ο τύπος του Green $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int\limits_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ισχύει για γενικότερα σύνολα D.

D = στοιχειώδες σύνολο Green

Χωρίζουμε το D σε «απλά» σύνολα.



(*)

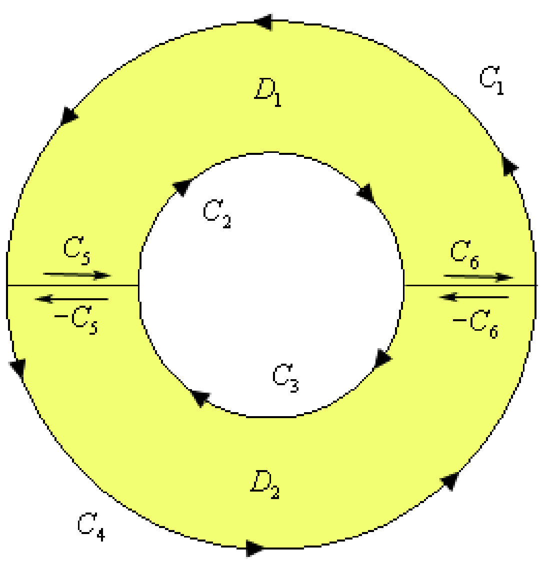
Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green για τα απλά αυτά σύνολα και αθροίζουμε τα ολοκληρώματα.

<u>Σημείωση</u> Ο τύπος του Green αποτελεί γενίκευση ΘΘΑΠ και είναι το Θ. Stokes για επιφάνεια $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (Συμπληρ Υλικό Παν. Αιγαίου)

$\boxed{\text{Πότε χρησιμοποιούμε τον τύπο Green;}}$

- Εάν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παρουσιάζει «δυσκολίες», χρησιμοποιούμε διπλό για να το υπολογίσουμε. Εάν το διπλό παρουσιάζει «δυσκολίες», χρησιμοποιούμε επικαμπύλιο για να το υπολογίσουμε.
- Στα αστρόβιλα πεδία που δεν είναι συντηρητικά:

(*)



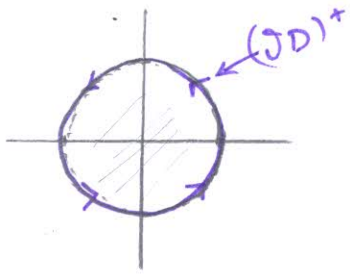
Ασκήσεις.

1) Να επαληθευτεί ο τύπος του Green για

$\vec{F}(x,y) = (x+y, y)$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ (απλό σύνολο)

Λύση. $I_1 = \oint_{(\partial D)^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $I_2 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$



$(\partial D)^+$ $\vec{r}(t) = (συνt, ημt)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}\,'(t) = (-ημt, συνt)$

$I_1 = \int_0^{2\pi} \vec{F}(συνt, ημt) \cdot (-ημt, συνt)\, dt =$

$= \int_0^{2\pi} (ημt + συνt, ημt) \cdot (-ημt, συνt)\, dt = \int_0^{2\pi} (-ημ^2 t)\, dt = -\pi$

$I_1 = -\pi$. $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 - 1 = -1$

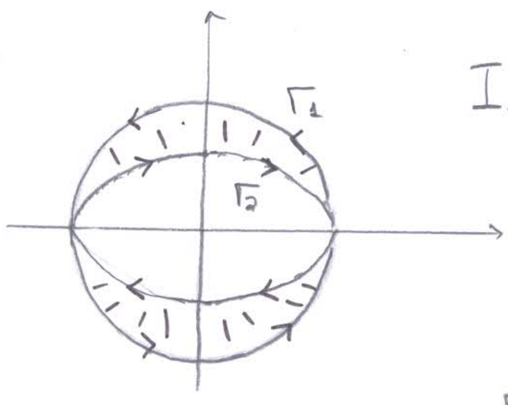
$I_2 = \iint_D (-1)\, dx\, dy = -\iint_D dx\, dy = -\pi$ (Εμβαδόν του $D = \pi a^2$, $a = 1$)

$I_1 = I_2$

2) $\vec{F}(x,y) = (4x - 2y, 2x + 6y)$ $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4, \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \geq 1\}$

(στοιχειώδες σύνολο Green)

Λύση.



$I_1 = \int_{(\partial D)^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\Gamma_1 : \vec{r}_1(t) = (2συνt, 2ημt)$ $t \in [0, 2\pi]$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$

$-\Gamma_2 : \vec{r}_2(t) = (2συνt, ημt)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_1(t))\cdot \vec{r}_1{}'(t)\,dt - \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_2(t)\cdot \vec{r}_2{}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4(2\sigma\upsilon\nu t) - 2\eta\mu t,\ 2(2\sigma\upsilon\nu t) + 6\eta\mu t)\cdot(-2\sigma\upsilon\nu t, \sigma\upsilon\nu t)\,dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (4(2\sigma\upsilon\nu t - 2\eta\mu t,\ 2(2\sigma\upsilon\nu t) + 6\eta\mu t)\cdot(-2\sigma\upsilon\nu t, \sigma\upsilon\nu t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4 + 18\eta\mu t\,dt)\,dt = 8\pi \quad \boxed{I_1 = 8\pi}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - (-2) = 4$$

$$I_2 = \iint_D 4\,dx\,dy = 4\iint_D dx\,dy \overset{*}{=} 8\pi$$

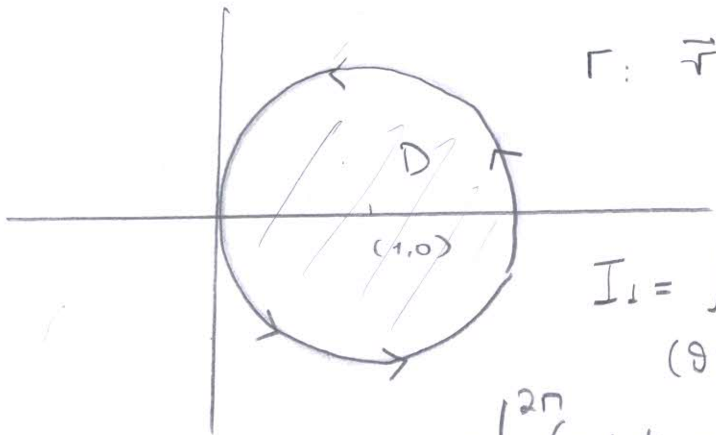
Εμβαδόν D = (Εμβαδόν κύκλου ακτίνας $\alpha=2$) − (Εμβαδόν έλλειψης $\alpha=2,\ \beta=1$)

$$= \pi\cdot 2^2 - 2\cdot 1\cdot \pi = 2\pi$$

3) $\vec{F}(x,y) = (y, -x)$

$D = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

Λύση



$\Gamma: \vec{r}(t) = (\underbrace{1+\sigma\upsilon\nu t}_{x(t)}, \underbrace{\eta\mu t}_{y(t)}),\ t\in[0,2\pi]$

$$I_1 = \int_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\eta\mu t, -(1+\sigma\upsilon\nu t))\cdot(-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\eta\mu^2 t - \sigma\upsilon\nu t - \sigma\upsilon\nu^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-1 - \sigma\upsilon\nu t)\,dt$$

$$= -2\pi \,//$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = (-1)-1 = -2$$

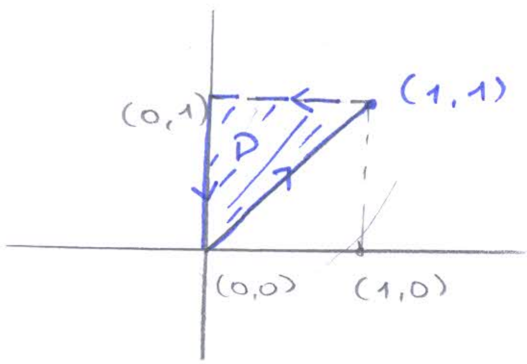
$$I_2 = \iint_D (-2)\,dx\,dy = -2\iint_D dx\,dy = -2\pi$$

$$I_1 = I_2$$

4) Ροή $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\vec{F}(x,y) = (xy - x^2, x^2 y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

D κορυφές $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ Κατά μήκος του συνόρου του τριγώνου που έχει τις παραπάνω κορυφές.

Λύση



$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

D είναι x-απλό και y-απλό.

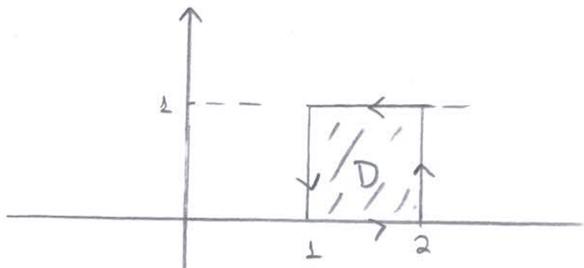
$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \,,\, x \le y \le 1\}$$

$$\oint_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(\int_x^1 (2xy - x)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy^2 - xy \Big|_{y=x}^{y=1} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[(x-x) - (x^3 - x^2) \right] dx = \int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

5) $\oint_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\vec{F}(x,y) = (x - xy,\ y^3 + 1)$

$D = [1,2]\times[0,1]$



$$\oint_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\int_0^1\left[\int_1^2 (0-(x)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_1^2 x\,dx\right)dy = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{2}\right)dy$$

$$= \int_0^1\left(2 - \frac{1}{2}\right)dy = \frac{3}{2}$$

Υπολογισμός $A(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ («καλό») με τη βοήθεια Επικαμπύλιου Ολοκληρώματος (Τύπο Green)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (P,Q)$$

- $\vec{F}(x,y)$: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $A(D) = \oint_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$\vec{F} = (P,Q)$

πχ $\vec{F}(x,y) = (0,x)$, $A(D) = \oint_{(\partial D)^+} (0,x)\cdot d\vec{r}$

$\vec{F}(x,y) = (-y,0)$ $A(D) = \oint_{(\partial D)^+} (-y,0)\cdot d\vec{r}$

$\vec{F}(x,y) = (-y,x)$ $A(D) = \frac{1}{2}\int_{(\partial D)^+} (-y,x)\cdot d\vec{r}$

6) Να ευρεθεί το Εμβαδόν του χωρίου $D=\{(x,y): x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\le 1\}$

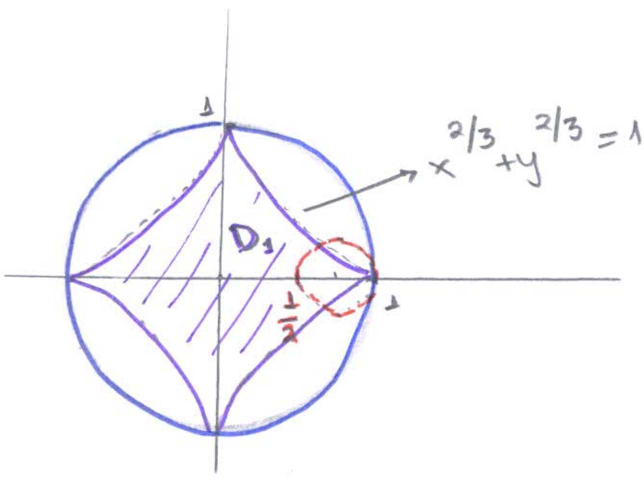
Λύση. ∂D, $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, $\vec{r}(t)=(\text{συν}^3 t, \text{ημ}^3 t)$ $\quad t\in[0,2\pi]$

$\vec{r}\,'(t)=(-3\,\text{συν}^2 t\cdot\text{ημ}t,\ 3\,\text{ημ}^2 t\cdot\text{συν}t)$

$$A(D)=\frac{1}{2}\oint_{(\partial D)^+}(-y,x)\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\text{ημ}^3 t,\ \text{συν}^3 t)\cdot(-3\,\text{συν}^2 t\,\text{ημ}t,\ 3\,\text{ημ}^2 t\,\text{συν}t)\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(\text{συν}^2 t\cdot\text{ημ}^4 t+\text{ημ}^2 t\,\text{συν}^4 t)\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\text{ημ}^2 t\,\text{συν}^2 t\,dt$$

$$=\frac{3\pi}{8}$$



Υποκυκλοειδές

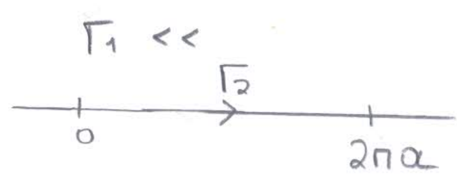
$$A(D)=4\,A(D_1)=4\int_0^1(1-x^{2/3})^{3/2}dx \quad (;)$$

7) $A(D)$ $\quad D$ περιβάλλεται από την καμπύλη

$x(t)=a(t-\text{ημ}t)$, $y(t)=a(1-\text{συν}t)$, $t\in[0,2\pi]$ $\quad(a>0)$

και την $y=0$

Λύση. $A(D)=\oint_{(\partial D)^+}(-y,0)\cdot d\vec{r}$



$-\Gamma_1$: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ $\quad t\in[0,2\pi]$

Γ_2: $\vec{r}(t)=(t,0)$ $\quad t\in[0,2\pi a]$

$$\int_{-\Gamma_1}(-a(1-\text{συν}t),0)\cdot(a(1-\text{συν}t),\ a\,\text{ημ}t)\,dt=+a^2\int_0^{2\pi}(1-\text{συν}t)^2dt=3\pi a^2$$

$\int_{\Gamma_2}(0,0)\cdot(1,0)\,dt=0 \quad A(D)=3\pi a^2$

Βλέπε Συμπληρωματικό Υλικό 2