Ασκήσεις 4

(1) Έστω $f(x,y)=x^2+\arctan y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

(i) Δ.ο. η f είναι διαφορίσιμη στο (1,0)

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{1+y^2}$

Οι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$

άρα η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$

άρα και στο (1,0) και $df(1,0)(x,y)=2x+y$

(ii) Να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο (1,0)

Το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο (1,0) είναι το: $z=f(1,0)+\nabla f(1,0)\cdot((x,y)-(1,0))$ (ε)

$\nabla f(1,0)=(2,1)$

$f(1,0)=1$

Άρα (ε): $z=1+(2,1)\cdot(x-1,y) \Leftrightarrow$

$z=2x+y-1$

(iii) Να ευρεθεί η μέγιστη τιμή της παραγώγου κατά κατεύθυνση για $\vec{a}\in\mathbb{R}^2$: $\|\vec{a}\|=1$

Αφού $\nabla f(1,0)\neq(0,0)$. Η μέγιστη τιμή του $D_{\vec{a}}f(1,0)$ δίνεται για $\vec{a}_0=\frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|}$ $\Rightarrow$

και $D_{\vec{a}_0}f(1,0)=\nabla f(1,0)\cdot\vec{a}_0=\|\nabla f(1,0)\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(2) $\vec{F}(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{1+x+y+z},\ \dfrac{y}{1+x+y+z},\ \dfrac{z}{1+x+y+z}\right)$

$(x,y,z)\in A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1+x+y+z\neq 0\}$.

(i) Δ.ο. η $\vec{F}$ ειναι διαφορισιμη στο $(x_0,y_0,z_0)\in A$ και να υπολογισθει το διαφορικο στο $(x_0,y_0,z_0)\in A$

Θετουμε $F_1(x,y,z)=\dfrac{x}{1+x+y+z}$, $F_2(x,y,z)=\dfrac{y}{1+x+y+z}$

και $F_3(x,y,z)=\dfrac{z}{1+x+y+z}$, $(x,y,z)\in A$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)=\frac{(1+x+y+z)-x}{(1+x+y+z)^2}=\frac{1+y+z}{(1+x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)=\frac{-x}{(1+x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)=\frac{-x}{(1+x+y+z)^2}$$

Τοτε $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}, \dfrac{\partial F_1}{\partial y}, \dfrac{\partial F_1}{\partial z}$ συνεχεις στο A και

η F_1 ειναι διαφορισιμη στο A.

Αναλογα και οι F_2 και F_3 ειναι διαφ. στο A Αρα $\vec{F}$ διαφορισιμη στο A.

Τοτε $D\vec{F}(x_0,y_0,z_0)=J_{\vec{F}}(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{h}$ οπου $\vec{h}=(h_1,h_2,h_3)$ και $J_{\vec{F}}(x_0,y_0,z_0)$ ο πινακας Jacobi στο (x_0,y_0,z_0)

$$D\vec{F}(x_0,y_0,z_0)=\left.\begin{pmatrix} \dfrac{1+y+z}{(1+x+y+z)^2} & \dfrac{-x}{(1+x+y+z)^2} & \dfrac{-x}{(1+x+y+z)^2} \\ \dfrac{-y}{(1+x+y+z)^2} & \dfrac{1+x+z}{(1+x+y+z)^2} & \dfrac{-y}{(1+x+y+z)^2} \\ \dfrac{-z}{(1+x+y+z)^2} & \dfrac{-z}{(1+x+y+z)^2} & \dfrac{1+x+y}{(1+x+y+z)^2} \end{pmatrix}\right|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

(ii) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα Jacobi στο $(x_0, y_0, z_0) \in A$.

$\det(J_f(x_0,y_0,z_0)) =$

$$\frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^6}\Big[(1+y_0+z_0)\left[(1+x_0+z_0)(1+x_0+y_0) - y_0 z_0\right] + y_0\left[-x_0(1+x_0+y_0) - x_0 z_0\right]$$

$$- z_0\left[x_0 y_0 + x_0(1+x_0+z_0)\right]\Big] =$$

$$\frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^6}\Big[(1+y_0+z_0)(1+x_0+y_0+x_0+x_0^2+x_0y_0+z_0+x_0z_0) +$$

$$x_0y_0(1+x_0+y_0+z_0) - x_0z_0(1+x_0+y_0+z_0)\Big] =$$

$$\frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^6}\Big[(1+y_0+z_0)\left[(1+x_0+y_0+z_0) + x_0(1+x_0+y_0+z_0)\right] -$$

$$-(x_0y_0+x_0z_0)(1+x_0+y_0+z_0)\Big] = \frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^6}\Big[(1+x_0+y_0+z_0)\Big[$$

$$(1+y_0+z_0)(1+x_0) - (x_0y_0+z_0x_0)\Big]\Big] =$$

$$\frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^5}\left[1+y_0+z_0+x_0+\cancel{x_0y_0}+\cancel{x_0z_0}-\cancel{x_0y_0}-\cancel{z_0x_0}\right] =$$

$$\frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^5}\cdot(1+x_0+y_0+z_0) = \frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^4}$$

αλλιως:

$$\det J_{\vec{F}}(x_0,y_0,z_0) \overset{\text{προσθέτοντας στην 1η γραμμή τη 2η + 3η}}{=}$$

$$\frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -y_0 & 1+x_0+z_0 & -y_0 \\ -z_0 & -z_0 & 1+x_0+y_0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^6} \cdot \Big[((1+x_0+z_0)(1+x_0+y_0)-y_0\cdot z_0)-(-y_0(1+x_0+y_0)$$

$$-y_0z_0)+(y_0z_0+z_0(1+x_0+z_0))\Big] =$$

$$\frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^6}\Big[(1+x_0+z_0)(1+x_0+y_0)+y_0(1+x_0+y_0)+$$

$$z_0(1+x_0+y_0+z_0)\Big] = \frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^6}\Big[(1+x_0+y_0+z_0)(1+x_0+y_0)$$

$$+z_0(1+x_0+y_0+z_0)\Big] = \frac{(1+x_0+y_0+z_0)^2}{(1+x_0+y_0+z_0)^6} = \frac{1}{(1+x_0+y_0+z_0)^4}$$

(3) Εστω $f(x,y)=\begin{cases} \sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Να υπολογισθει αν υπαρχει το $df(0,0)$.

Αν το $df(0,0)$ υπαρχει τοτε $df(0,0)(\vec{n})=\nabla f(0,0)\cdot\vec{n}$

οπου $\vec{n}=(n_1,n_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t\vec{e}_1)-f(0,0)}{t}=$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t^2/t^2-1}{t}=$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t^2-t^2}{t^3}\overset{0/0}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{2t\cos t^2-2t}{3t^2}=$$

$$\lim_{t\to0}\frac{2t}{3}\,\frac{\cos t^2-1}{t^2}=0$$

Λογω συμμετριας της f ως προς x,y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Τοτε $T_{(0,0)}(\vec{n})=\nabla f(0,0)\cdot\vec{n}=0$

$$\lim_{\vec{n}\to\vec{0}}\frac{f(\vec{n})-f(0,0)-T_{(0,0)}(\vec{n})}{\|\vec{n}\|}=$$

$$\lim_{\vec{n}\to\vec{0}}\frac{\sin\|\vec{n}\|^2/\|\vec{n}\|^2-1}{\|\vec{n}\|}=$$

$$\lim_{\vec{n}\to\vec{0}}\frac{\sin\|\vec{n}\|^2-\|\vec{n}\|^2}{\|\vec{n}\|^3}=0$$

οπως πριν.

Αρα $\exists\, df(0,0)=T_{(0,0)}(\vec{n})=0$.

(4) Να ευρεθούν $\overset{\text{στο } (0,0)}{\text{η}}$ παράγωγος κατά κατεύθυνση $\vec{a}$: $\|\vec{a}\|=1$ και το διαφορικό αν υπάρχει.

(i) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\vec{a})-f(0,0)}{t} \overset{\vec{a}=(a_1,a_2)}{=}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(t^3a_1^2\cdot a_2)/t^2-0}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^3}a_1^2\cdot a_2}{\cancel{t^3}}=a_1^2a_2$$

Άρα $D_{\vec{a}}f(0,0)=a_1^2\cdot a_2$.

Αν $\exists\, df(0,0)$ τότε

$D_{\vec{a}}f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot(a_1,a_2)$

Όμως $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=D_{\vec{e}_1}(0,0)=0$

και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=D_{\vec{e}_2}(0,0)=0$

και $\nabla f(0,0)=(0,0)\Rightarrow$

$\nabla f(0,0)\cdot(a_1,a_2)=0\neq$

$D_{\vec{a}}f(0,0)$ για $a_1\cdot a_2\neq 0$.

Άρα $\nexists\, df(0,0)$

αλλιώς: Αν $\exists\, df(0,0)$ τότε

$df(0,0)(x,y)=\nabla f(0,0)\cdot(x,y)=0$

και η $g(x,y)=\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

$\lim_{(0,0)} g(x,y)=0$

TETTRIS

$$g(x,y) = \frac{x^2y/(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Όμως $\lim_{x\to 0} g(x,x) =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{2}\, x^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Άρα $\nexists\, df(0,0)$

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{a}) - f(0,0)}{t} \overset{\vec{a}=(a_1,a_2)}{=}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t^3 a_1^3 / t^2}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3 \cdot a_1^3)}{t^3} = a_1^3$$

Τότε $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ και

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Όμως $\nabla f(0,0)\cdot(a_1,a_2) = a_1 \neq$
$D_{\vec{a}} f(0,0) = a_1^3$ για $a_1 \neq 0, 1$.
Άρα $\nexists\, df(0,0)$.

(5) Εστω $f_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\lambda} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Δ.Ο. $\exists\, df_\lambda(0,0) \Leftrightarrow \lambda < 1/2$.

$$\lim_{(0,0)} \frac{f_\lambda(x,y) - f(0,0)}{(x^2+y^2)^{1/2}} =$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{xy/(x^2+y^2)^\lambda}{(x^2+y^2)^{1/2}} =$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\lambda+1/2}}$$

Το όριο αυτό υπάρχει

ανν $\lambda + 1/2 < 1 \Leftrightarrow \lambda < 1/2$

Απο ασκηση 7 μάθημα 4

σελίδα 46.

Αρα $\exists\, df_\lambda(0,0) \Leftrightarrow \lambda < 1/2$.

(6) Να υπολογισθούν οι σταθερές ώστε:

(i) $$\lim_{(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - ax - by - \gamma}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Αρκεί ν.δ.ο. η $f(x,y) = e^{x\cos y}$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x\cos y}\cdot\cos y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x\cos y}x\sin y$

είναι συνεχείς στο $(0,0)$

Αρα $\exists\, df(0,0)(x,y) = \nabla f(0,0)(x,y)$

$= x$.

Αρα $$\lim_{(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - 1 - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Αρα απο μοναδικοτητα του διαφορικου

$a=1,\ \beta=0,\ \gamma=1$

(ii) $$\lim_{(3,1,2)} \frac{(x-y)^2 - ax - \beta y - \gamma z - \delta}{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}} = 0$$

Αρκει ν.δ.ο. η $f(x,y,z)=(x-y)^2$ ειναι διαφορισιμη στο $(3,1,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$$

Ειναι συνεχεις στο $(3,1,2)$ Αρα $\exists\, df(3,1,2)(x,y,z)$

$= \nabla f(3,1,2)\cdot(x,y,z) = 4x - 4y$

Αρα $$\lim_{(3,1,2)} \frac{(x-y)^2 - 4 - 4(x-3) + 4(y-1) + 0(z-2)}{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(3,1,2)} \frac{(x-y)^2 - 4 - 4x + 12 + 4y - 4}{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{(3,1,2)} \frac{(x-y)^2 - 4x + 4y + 4}{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}} = 0$$

Απο μοναδικοτητα του διαφορικου εχουμε

$a=4,\ \beta=-4,\ \gamma=0$ και $\delta=-4$.

(7) Δ.Ο. οι f_k, $k=1,2$ είναι

(i) συνεχείς

(ii) $D_{\vec{a}} f(0,0)=0 \quad \forall \|\vec{a}\|=1$

(iii) Οι f_k δεν είναι διαφορίσιμες στο $(0,0)$

όπου $f_1(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\sqrt{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

και $f_2(x,y)=\begin{cases} \left[1-\cos\left(\dfrac{x^2}{y}\right)\right]\sqrt{x^2+y^2} & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$

(α) (i) Ξέρουμε ότι $(x^2-y)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^4+y^2-2x^2y\geq 0 \Leftrightarrow$
$x^4+y^2\geq 2x^2y \Leftrightarrow \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\leq\dfrac{1}{2}$

Άρα $|f_1(x,y)-0| = \left|\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}\|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Άρα η f_1 είναι συνεχής στο $(0,0)$ άρα και στο $\mathbb{R}^2$

(ii) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f_1(t\vec{a})-f_1(0,0)}{t} \overset{\vec{a}=(a_1,a_2)}{=}$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2a_1^2\, ta_2|t|}{t(t^4a_1^4+t^2a_2^2)} =$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a_1^2a_2|t|}{t^2a_1^4+a_2^2} \overset{a_2\neq 0}{=} 0$

Αν $a_2=0$ $\dfrac{f_1(t\vec{a})-f_1(0,0)}{t}=0$ ✓

Άρα $D_{\vec{a}} f_1(0,0)=0$.

(iii) Για να δείξουμε ότι $\nexists\, df(0,0)$ αρκεί ν.δ.ο. $\nexists$ το όριο:

$$\lim_{(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

Θέτουμε $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

Τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x,0) = 0$

και $\lim\limits_{x\to 0} g(x,x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$

Άρα $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

Άρα $\nexists\, df(0,0)$.

(β) (i) $|f_2(x,y) - 0| = |1-\cos(x^2/y)|\cdot|\sqrt{x^2+y^2}| \leq$
$(1+|\cos(x^2/y)|)\,\|(x,y)\| \leq 2\|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$
Άρα η f_2 είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Έστω $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{a}\| = 1$. Τότε:
Για $a_2 \neq 0$ $D_{\vec{a}} f_2(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_2(t\vec{a}) - f_2(0,0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos(t^2 a_1^2 / t a_2))\,|t|}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos(t a_1^2 / a_2))\,|t|}{t} = 0.$$

Για $a_2 = 0$ $D_{\vec{a}} f_2(0,0) =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_2(ta_1, 0) - f_2(0,0)}{t} =$$

$\lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$

Αρα σε καθε περιπτωση
$D_{\vec{a}} f_2(0,0) = 0.$

(iii) Απο το προηγουμενο υποερωτημα
$\nabla f_2(0,0) = (0,0).$

$\frac{f_2(x,y) - f_2(0,0) - \nabla f_2(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$1 - \cos(x^2/y) = \sigma(x,y).$

$\lim_{x\to 0} \sigma(x,x^2) = \lim_{x\to 0} 1-\cos 1 =$

$1-\cos 1 \neq 0$ Αρα $\nexists\, df_2(0,0)$

(8) Εστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και $\vec{x}_0 \in A$ (= ανοικτο) ωστε να υπαρχει το $\nabla f(\vec{x}_0)$. Τ.Α.Ε.Ι.:

(i) Η f ειναι διαφορισιμη στο $\vec{x}_0$

(ii) $\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{a}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{a}$

ομοιομορφα στο $S^{d-1} = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^d : \|\vec{a}\| = 1\}$
Δηλαδη $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$: αν $0 < |t| < \delta$ τοτε
$\left| \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{a}) - f(\vec{x}_0)}{t} - \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{a} \right| < \varepsilon$ για καθε
$\vec{a} \in S^{d-1}$

Η f ειναι διαφορισιμη στο $\vec{x}_0$ αν
$\lim_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{|f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{h}|}{\|\vec{h}\|} = 0.$ (1)

Γραφουμε $\vec{h} = \|\vec{h}\| \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$ και $t = \|\vec{h}\|$, $\vec{a} = \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$

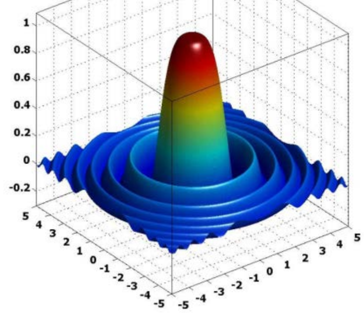
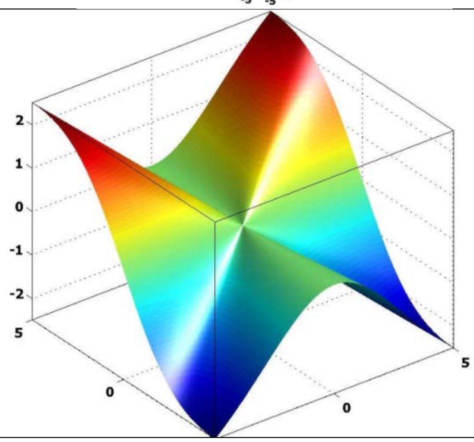
Τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

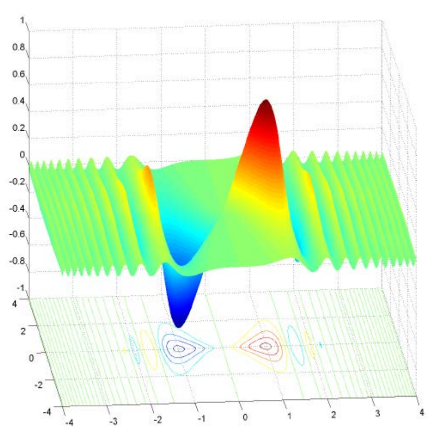
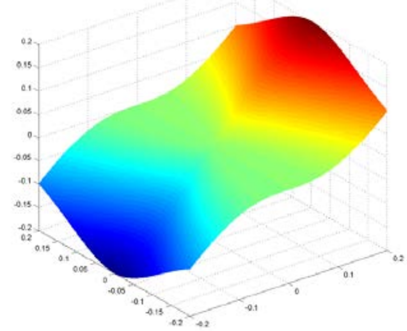
$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(\vec{x}_0+t\vec{a})-f(\vec{x}_0)}{t}-\nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{a}\right|=0 \iff$$

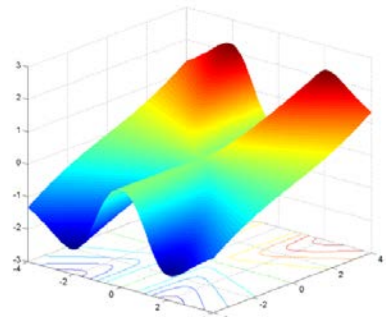
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\vec{a})-f(\vec{x}_0)}{t}=\nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{a} \text{ ομοιόμορφα.}$$

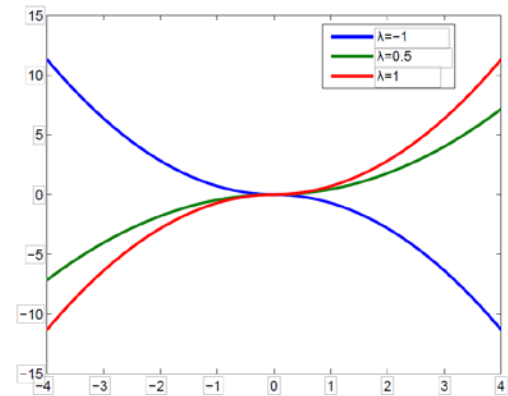
Σημείωση: Από τις ασκήσεις (7) και (8) συμπεραίνουμε ότι είναι απαραίτητο η σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη για την ύπαρξη του διαφορικού.

Σχήματα

	Άσκηση 3
	Άσκηση 4i

		Άσκηση4ii 1^{η} Εικόνα γραφική παράσταση 2^{η} Εικόνα Zoom στην περιοχή του (0,0)

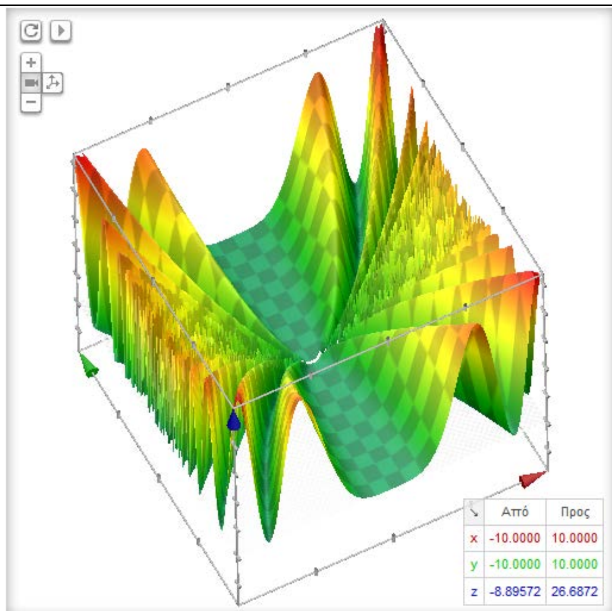




Άσκηση 7

$1^{η}$ Γραφική παράσταση της f_1

$2^{η}$ Περιορισμοί της f_1 σε ευθείες $y=λx$ όπου φαίνεται το 7ii



Άσκηση 7 f_2