Ασκησεις Μαθημα 3

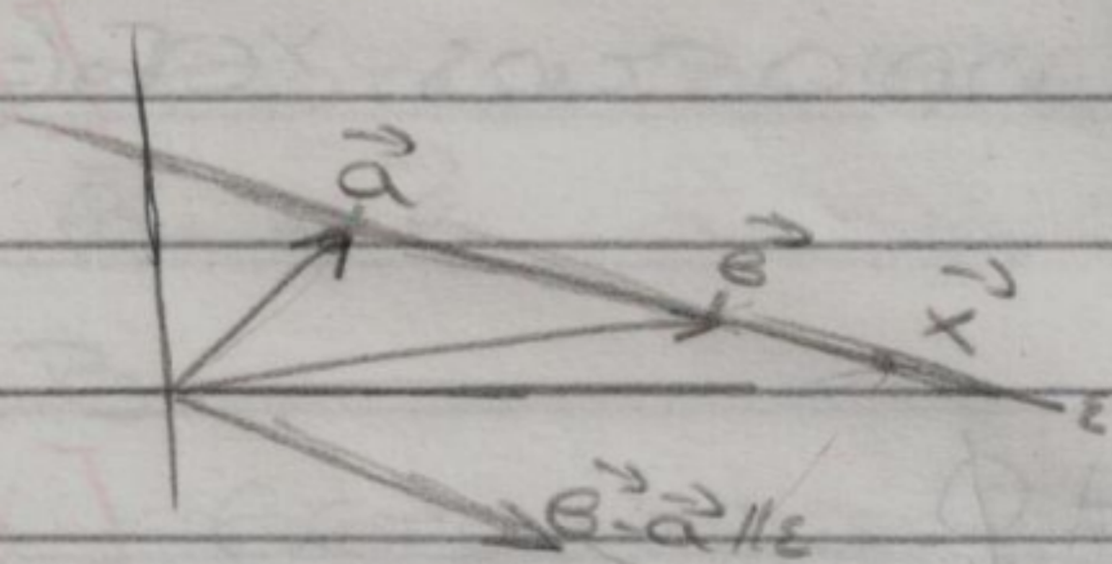
Ασκησεις(3)

(1) $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ $\vec{a}\neq\vec{b}$. Να ευρεθεί η παραμετρική εξίσωση

(α) Της ευθείας που διέρχεται από τα $\vec{a},\vec{b}$

(β) του ευθ. τμήματος $[\vec{a},\vec{b}]$

(α)



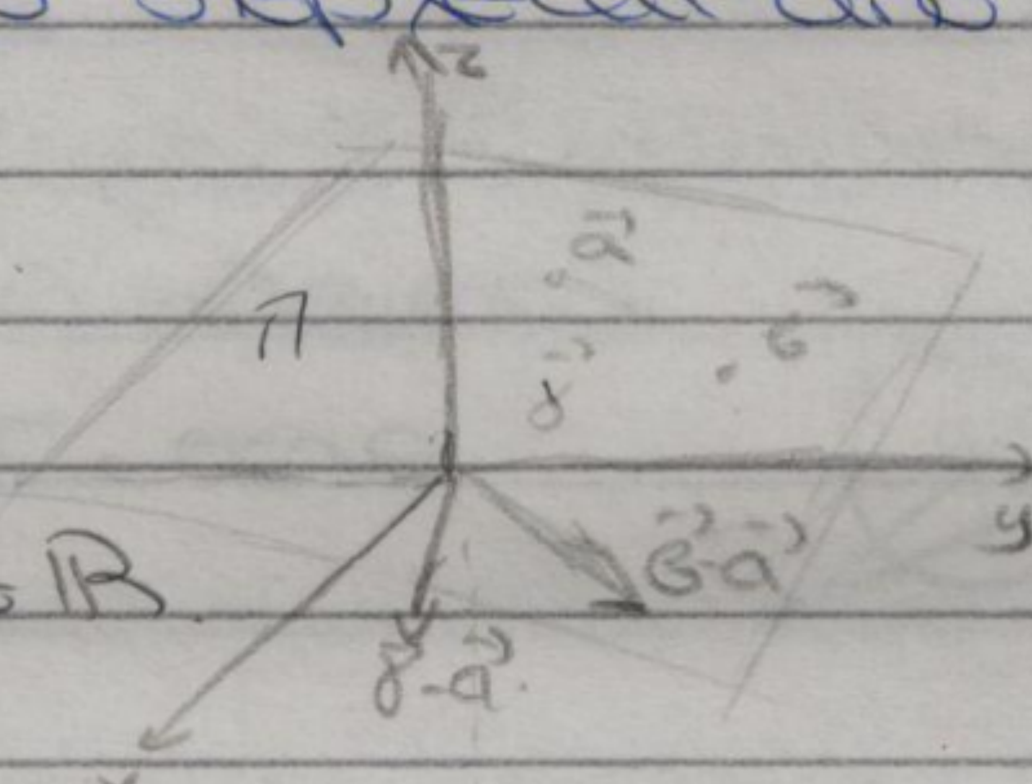
Εστω $x\in\varepsilon$: ζητούμενη ευθεία)

τότε $\vec{x}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$, $\lambda\in\mathbb{R}$

τότε $\vec{r}(\lambda)=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$, $\lambda\in\mathbb{R}$

(β) Αν $x\in[\vec{a},\vec{b}]$ τότε $\vec{r}(\lambda)=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$, $\lambda\in[0,1]$.

(2) Εξίσωση 2-επιπέδου του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από τα μη συνευθειακά $\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma}$.



Εστω Π το ζητούμενο επίπεδο

Τότε $\Pi\parallel\langle\vec{b}-\vec{a},\vec{\gamma}-\vec{a}\rangle$ και $\vec{a}\in\Pi$

Εστω $\vec{x}\in\Pi$ τυχαίο, τότε $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\vec{x}-\vec{a}=\lambda(\vec{b}-\vec{a})+\mu(\vec{\gamma}-\vec{a})\Rightarrow$

$\vec{x}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})+\mu(\vec{\gamma}-\vec{a})\Rightarrow\vec{r}(\lambda,\mu)=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})+\mu(\vec{\gamma}-\vec{a})$.

(3) Εξίσωση υπερεπιπέδου του $\mathbb{R}^4$ που περιέχει: $\vec{e}_1,\vec{e}_1+2\vec{e}_2,\vec{e}_2+3\vec{e}_3,\vec{e}_3+4\vec{e}_4$

Εστω Π το ζητούμενο υπερεπίπεδο Τότε

$\Pi\parallel\langle\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_1,\vec{e}_2+3\vec{e}_3-\vec{e}_1,\vec{e}_3+4\vec{e}_4-\vec{e}_1\rangle=$

$\langle2\vec{e}_2,\vec{e}_2+3\vec{e}_3-\vec{e}_1,\vec{e}_3+4\vec{e}_4-\vec{e}_1\rangle=$

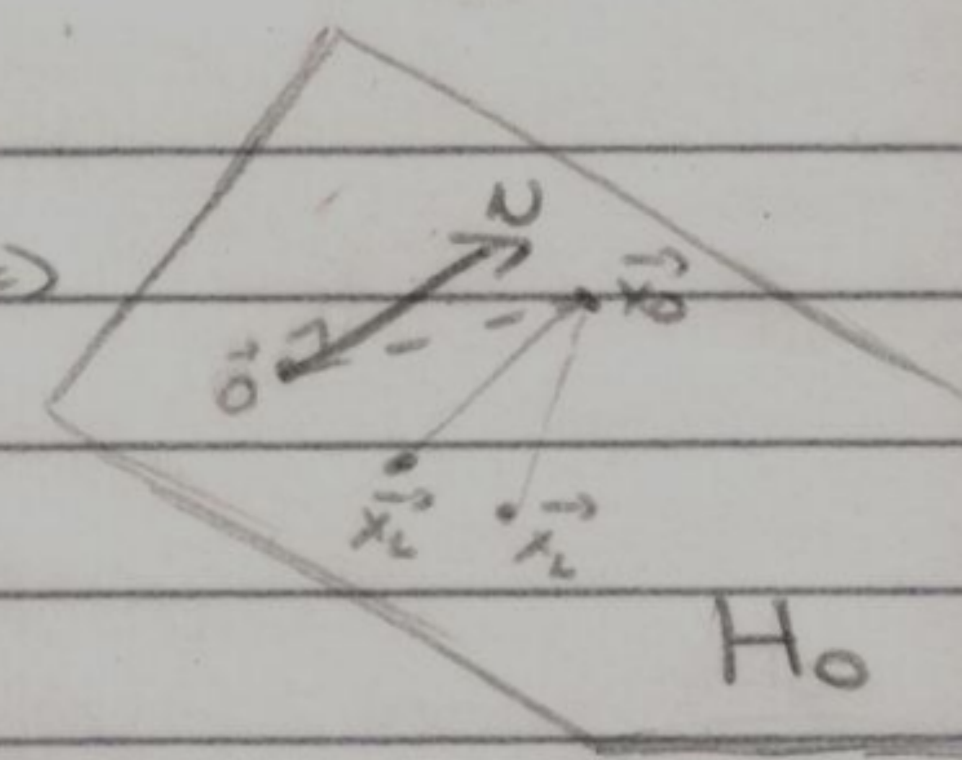
$\langle(0,2,0,0),(-1,1,3,0),(-1,0,1,4)\rangle=A$

Τότε $\Pi:\vec{r}(\lambda,\mu,\nu)=\vec{e}_1+A=(1,0,0,0)+(0,2\lambda,0,0)+(-\mu,\mu,3\mu,0)+(-\nu,0,\nu,4\nu)=(1-\mu-\nu,2\lambda+\mu,3\mu+\nu,4\nu)$

(4) Εστω $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ και Υ υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ που διέρχεται από το $\vec{x}_0$ $\vec{v}\perp Y$ $(\vec{v}\neq\vec{0})$ Δ.ο. $d(\vec{x}_0,Y)=\dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{x}-\vec{v}\cdot\vec{x}_0|}{\|\vec{v}\|}$ Ιδιαιτέρως για $n=2,3$

Εστω $Y_c=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\vec{v}\cdot\vec{x}=c\}$, $\vec{v}\perp Y$ χβγ. υποθέτουμε ότι $\|\vec{v}\|=1$ διαφορετικά θέτουμε όπου $\vec{v}$ το $\vec{v}/\|\vec{v}\|$

Εστω $\vec{x}\in Y_0=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\vec{v}\cdot\vec{x}=0\}$ τότε $|\vec{v}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)|\leq\|\vec{v}\|\,\|\vec{x}-\vec{x}_0\|=\|\vec{x}-\vec{x}_0\|\Rightarrow d(\vec{x}_0,Y_0)\geq|\vec{v}\cdot\vec{x}-\vec{v}\cdot\vec{x}_0|=|\vec{v}\cdot\vec{x}_0|$



Παίρνουμε $\vec{x}_1 - \vec{x}_0 = -(\vec{v}\cdot\vec{x}_0)\vec{v} \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_0 - (\vec{v}\cdot\vec{x}_0)\vec{v} \Rightarrow$

$\vec{x}_1\cdot\vec{v} = 0$, $\vec{x}_1 \in Y_0$ $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| = |\vec{v}\vec{x}_0| \geq d(\vec{x}_0, H_0)$

Άρα $d(\vec{x}_0, Y_0) = |\vec{v}\cdot\vec{x}_0|$

Έστω $c\in\mathbb{R}$, $\vec{x}\in Y_c$: $\vec{x}\cdot\vec{v} = c$ Τότε:

$d(\vec{x}_0, Y_c) = d(\vec{x}_0 - \vec{x}, Y_c - \vec{x} = Y_0) = |\vec{v}(\vec{x}_0 - \vec{x})| =$

$|\vec{v}\vec{x} - \vec{v}\vec{x}_0|$.

Ιδιαιτέρως: για $n=2$ $Y_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax+\beta y = c\}$

και για $\vec{x}_0 = (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ $d(\vec{x}_0, Y_c) = \dfrac{|ax_0+\beta y_0-c|}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$

Για $n=3$ $Y_c = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ax+\beta y+\gamma z = c\}$

και για $\vec{x}_0 = (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ $d(\vec{x}_0, Y_c) = \dfrac{|ax_0+\beta y_0+\gamma z_0-c|}{\sqrt{a^2+\beta^2+\gamma^2}}$

Σημείωση:

1) Άσκηση (1) (α) $\vec{r}(\lambda) = \vec{a} + \lambda(\vec{\beta}-\vec{a})$, $\lambda\in\mathbb{R}$ Για $\vec{a} = (a_1, a_2)$
$\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ και $\left.\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda(\beta_1 - a_1) \\ y &= a_2 + \lambda(\beta_2 - a_2)\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\beta_1 \neq a_1} y - a_2 = \dfrac{x-a_1}{\beta_1-a_1}(\beta_2-a_2)$

Δηλαδή $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 \\ \beta_1-a_1 & \beta_2-a_2 \end{vmatrix} = 0$ Εξίσωση ευθείας
στον $\mathbb{R}^2$ που διέρχεται από τα (a_1,a_2), (β_1,β_2)

2) Άσκηση (2) Για $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$
ανάλογα προκύπτει $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ \beta_1-a_1 & \beta_2-a_2 & \beta_3-a_3 \\ \gamma_1-a_1 & \gamma_2-a_2 & \gamma_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$ Εξίσωση επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$

Παρατήρηση: Στην άσκηση (1) τα διανύσματα $\vec{x}-\vec{a}$ και $\vec{\beta}-\vec{a}$ είναι γρ. εξαρτημένα, όπως και στην (2) τα $\vec{x}-\vec{a}$, $\vec{\beta}-\vec{a}$, $\vec{\gamma}-\vec{a}$.