# ΜΑΘΗΜΑ 30 (18-12-20)



## Δεν ξεχνάμε

- $\vec{F}=(P,Q,R)$, $C^1$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$ , Στροβιλισμός της $\vec{F}$ ή curl ή rot

$$\nabla\cdot\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$ , Απόκλιση της $\vec{F}$ ή div

- $G\subseteq\mathbb{R}^3$ με σύνορο κλειστή/ές, λεία/ές, $C^1$ επιφάνειες και $\vec{F}:A(\subseteq\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3$, $C^1$, $G\subseteq A$, τότε

$$\iint_{\partial G^+}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS=\iiint_G \operatorname{div}\vec{F}$$ (Τύπος Gauss).

$\partial G\to\vec{r}(u,v)$, $\vec{N}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v/\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|$

## Ασκήσεις

1) Να επαληθευτεί ο τύπος του Gauss για $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)=(P,Q,R)$ στο $B=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le\alpha^2\}$ $(\alpha>0)$

i) • $\operatorname{div}\vec{F}=1+1+1=3$, $I_1=\iiint_B 3\,dx\,dy\,dz=3\cdot V(B)=3\left(\frac{4}{3}\pi\alpha^3\right)=4\pi\alpha^3$

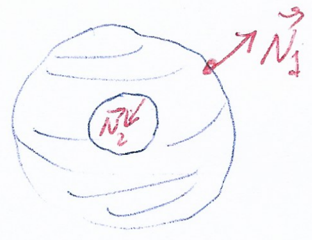
ii) • Το $\vec{r}=(x,y,z)$ είναι $\perp$ στην επιφάνεια της $B$, $\vec{N}=\frac{\vec{r}}{r}$

$\vec{F}\cdot\vec{N}=\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=\frac{r^2}{r}=r$, $\vec{F}\cdot\vec{N}=\alpha$ στην επιφάνεια της $B$

$$I_2=\iint_{\partial B_\alpha^+}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS=\alpha\iint_{\partial B_\alpha^+}dS=\alpha(4\pi\alpha^2)=4\pi\alpha^3$$

Άρα, $I_1=I_2$

2) Να επαληθευτεί ο τύπος Gauss για $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r}=(x,y,z)$
$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ για $B=\{(x,y,z):\ \alpha^2 \le x^2+y^2+z^2 \le \beta^2\}$ $(0<\alpha<\beta)$




i) • $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$

$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$. Άρα, $\operatorname{div}\vec{F} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0$.

• $I_1 = \iiint_B \operatorname{div}\vec{F} = 0$

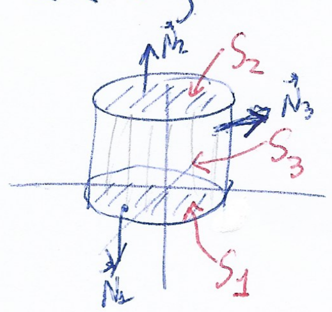
ii) • Μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=\beta^2$ είναι
το $\vec{N}_1 = \frac{\vec{r}}{\beta}$, $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N}_1 = -\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{\beta} = -\frac{r^2}{r^3\beta}$,
στην επιφάνεια $r=\beta$, $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N}_1 = -\frac{1}{\beta^2}$
Το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ πρέπει
να κοιτά στο εσωτερικό της $B_\alpha=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le\alpha^2\}$,
οπότε θα έχουμε $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N}_2 = \frac{1}{\alpha^2}$ στην επιφάνεια της $B_\alpha$

$$I_2 = \oiint_{\partial B^+} (\vec{F}\cdot N)\,dS = \oiint_{\partial B_\beta} \vec{F}\cdot N_1\,dS + \oiint_{\partial B_\alpha} \vec{F}\cdot N_2\,dS = -\frac{1}{\beta^2}A(\partial B_\beta) +$$
$$+\frac{1}{\alpha^2}A(\partial B_\alpha) = -\frac{1}{\beta^2}(4\pi\beta^2) + \frac{1}{\alpha^2}(4\pi\alpha^2) = -4\pi+4\pi = 0 \qquad I_1 = I_2$$

---

3) Να επαληθευτεί ο τύπος Gauss για $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, e^z)$
για $B=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le\alpha^2,\ 0\le z\le\beta\}$

i). $\operatorname{div}\vec{F} = 3(x^2+y^2)+e^z$



$$I_1 = \iiint_B [3(x^2+y^2)+e^z]\,dx\,dy\,dy \xrightarrow[\text{συντ.}]{\text{κυλιν.}} \int_0^b \int_0^{2\pi} \Big[\int_0^\alpha [3r^2+e^z]r\,dr\Big]\,d\theta\,dz$$

$$= \frac{3\pi}{2}\alpha^4 b + \pi\alpha^2(e^b-1)$$

ii) $I_2 = \oiint_{\partial B} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$

Το σύνορο $\partial B$ αποτελείται από τις επιφάνειες

$S_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le \alpha^2,\ z=0\}$ με κάθετο το $-\vec{k}$

$\vec{F}(x,y,z)\cdot(0,0,-1) = -e^z$, άρα $\vec{F}\cdot\vec{N}_1 = -e^0 = -1$ στην $S_1$

$S_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le \alpha^2,\ z=b\}$ με κάθετο το $+\vec{k}$

οπότε $\vec{F}\cdot\vec{N}_2 = e^b$ στην $S_2$

$S_3 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = \alpha^2,\quad 0 \le z \le b\}$

Παραμετρικοποίηση $\vec{r}(\theta,z) = (\alpha\,\text{συν}\theta,\ \alpha\,\text{ημ}\theta,\ z)$, $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (\alpha\,\text{συν}\theta,\ \alpha\,\text{ημ}\theta,\ 0)$

$(\theta,z) \in [0,2\pi]\times[0,b]$

$\vec{F}(\vec{r}(\theta,z))\cdot(\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z) = \alpha^4\text{συν}^4\theta + \alpha^4\text{ημ}^4\theta$, $(\theta,z)\in[0,2\pi]\times[0,b]$

$$I_2 = \iint_{S_1} (\vec{F}\cdot\vec{N}_1)\,dS + \iint_{S_2} (\vec{F}\cdot\vec{N}_2)\,dS + \iint_{S_3} (\vec{F}\cdot\vec{N}_3)\,dS =$$

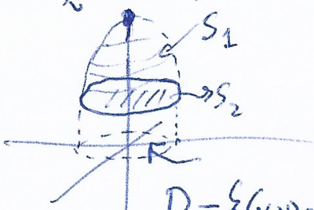
$$= -A(S_1) + e^b A(S_2) + \int_0^{2\pi}\int_0^b (\alpha^4\text{συν}^4\theta + \alpha^4\text{ημ}^4\theta)\,dz\,d\theta =$$

$$= -\pi\alpha^2 + e^b\pi\alpha^2 + \frac{3\pi}{2}\alpha^4 b$$

Άρα $I_1 = I_2 = \frac{3\pi}{2}\alpha^4 b + \pi\alpha^2(e^b-1)$

4) Να επαληθευτεί ο τύπος Gauss για την $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ στο B που έχει ως σύνορο το ελλειψοειδές $S_1$ $3x^2+3y^2+z^2=28$, $z>0$ και το επίπεδο$_{S_2}$ $z=1$

i) $\operatorname{div}\vec{F}=3$. Η προβολή του B στο x-y επίπεδο




$D=\{(x,y): x^2+y^2\le 9\}$

$(S_1\cap S_2=\{3(x^2+y^2)+1=28\})$

$I_1=\iiint_B 3\,dx\,dy\,dz$.

Κυλινδρικές συντεταγμένες, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z$.

$B^*=\{(r,\theta,z):\ 0<r\le 3,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 1\le z\le\sqrt{28-3r^2}\}$

$$I_1=3\int_0^{2\pi}\int_0^3\left(\int_1^{\sqrt{28-3r^2}} r\,dz\right)dr\,d\theta=6\pi\int_0^3\left(\sqrt{28-3r^2}-1\right)r\,dr=$$

$$=\frac{56\pi}{3}\left(\sqrt{28}\right)-\frac{83}{3}\pi$$

ii) $S_1$: $\vec{r}_1(x,y)=(x,y,\sqrt{28-3x^2-3y^2})=(x,y,f(x,y))$,

Κάθετο: $(-f_x,-f_y,1)$

$$\vec{F}(x,y,f(x,y))\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{6x}{f(x,y)},\frac{1}{2}\frac{6y}{f(x,y)},1\right)=\frac{3x^2+3y^2}{f(x,y)}+f(x,y)\ \frac{\text{στο}}{\text{σύνορο}}$$

$$=\frac{28-f^2(x,y)}{f(x,y)}+f(x,y)=\frac{28}{f(x,y)}=\frac{28}{\sqrt{28-3(x^2+y^2)}}$$

Άρα, $$J_1=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS=\iint_D\frac{28}{\sqrt{28-3(x^2+y^2)}}\,dx\,dy\ \frac{\text{πολ.}}{\text{συν}}\int_0^{2\pi}\int_0^3\frac{28}{\sqrt{28-3r^2}}\,r\,dr\,d\theta=$$

$$=\frac{56\pi}{3}\sqrt{28}-\frac{56}{3}\pi$$

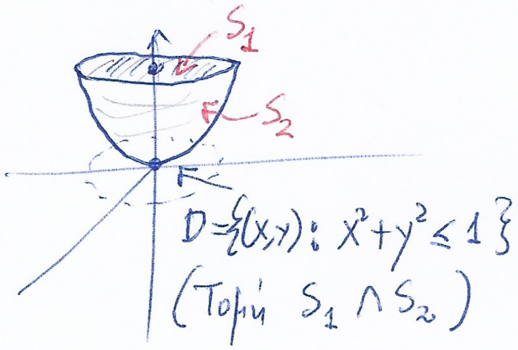
$S_2$: $\vec{r}_2(x,y)=(x,y,1)$, $(x,y)\in D$, Μοναδιαίο κάθετο το $-\vec{k}$

$$J_2=\iint_{S_2}(x,y,1)\cdot(0,0,-1)\,dS=-\iint_{S_2}dS=-A(S_2)=-\pi\cdot 9$$

Άρα $I_2=\oiint_{\partial B}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = J_1+J_2 = \frac{56}{3}\pi\sqrt{28} - \frac{56}{3}\pi - 9\pi = \frac{56}{3}\pi\sqrt{28} - \frac{81}{3}\pi$

Τελικά, $I_1=I_2$

**5)** Να επαληθευτεί ο τύπος του Gauss για $\vec{F}=(x+y,\,y+z,\,x+z)$ στο στερεό B που έχει ως σύνορο το παραβολοειδές $z=2(x^2+y^2)$ και το επίπεδο $z=2$




i) $\operatorname{div}\vec{F}=1+1+1=3$

$$I_1=\iiint_B 3\,dx\,dy\,dz \overset{\text{Κυλ.}}{\underset{\text{Συν.}}{=}} 3\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_{2r^2}^{2} r\,dz\right)dr\,d\theta=$$

$$=3\cdot 2\pi\int_0^1 r(2-2r^2)\,dr = 3\pi$$

ii) • $S_1$, $\vec{r}_1(x,y)=(x,y,2)$, $(x,y)\in D$, Μον. κάθετο το $\vec{k}$

$\vec{F}\cdot\vec{k}=x+2$

$$J_1=\iint_D (x+2) \overset{\text{πολ.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta+2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^1 r^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr =$$

$$=0+2\cdot\pi$$

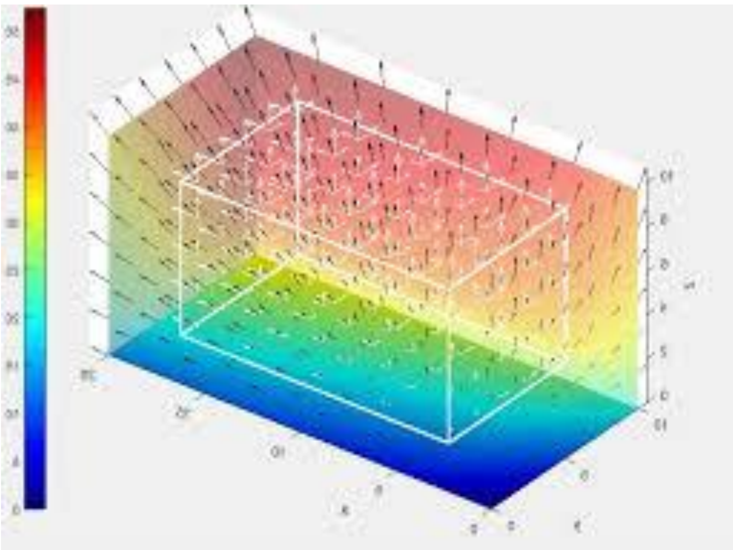
• $S_2$, $\vec{r}_2(r,\theta)=(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, 2r^2)$, $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$

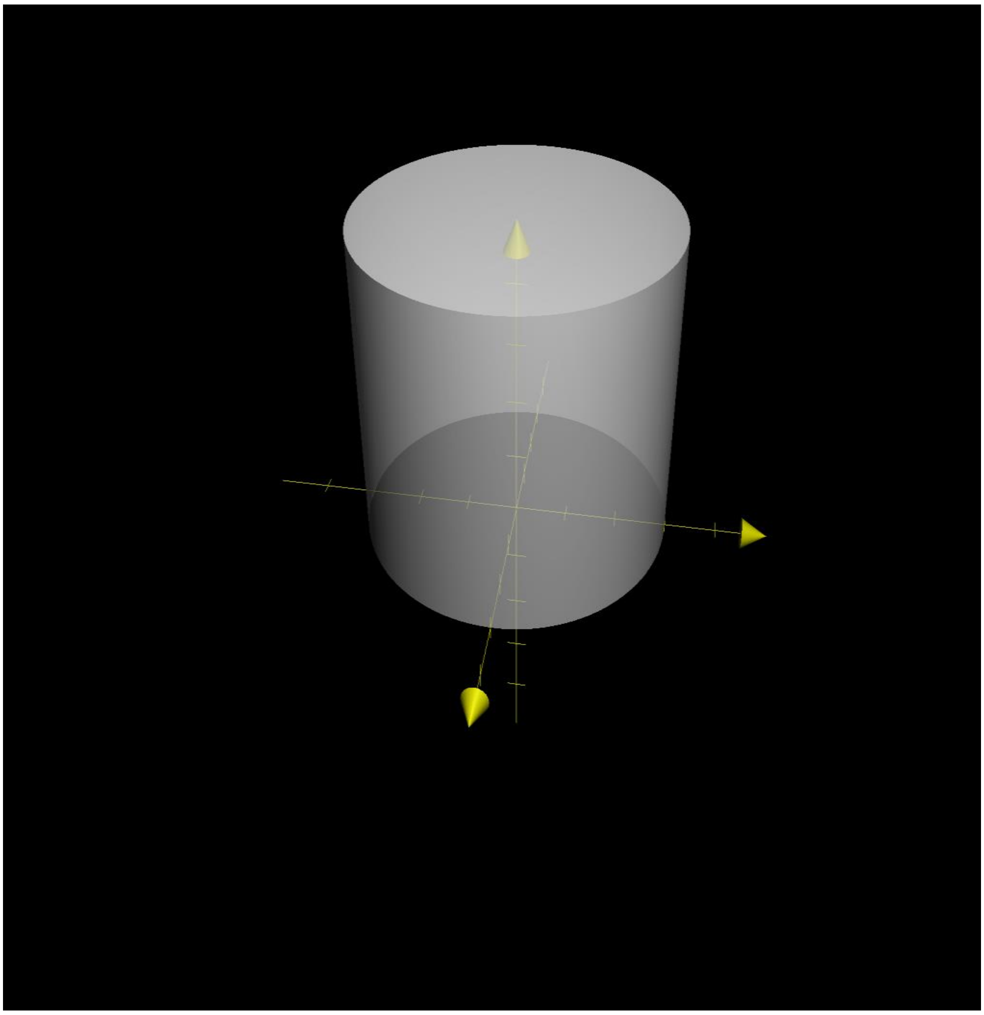
Κάθετο $(-4r^2\cos\theta,\,-4r^2\sin\theta,\,r)=\vec{n}$

$$J_2=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(r,\theta))\cdot\vec{n}\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(2r^3+4r^3\sin\theta\cos\theta + 8r^4\sin\theta - r^2\cos\theta\right)dr\right)d\theta = \pi$$

$$I_2=\oiint_{\partial B}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = J_1+J_2 = 3\pi$$

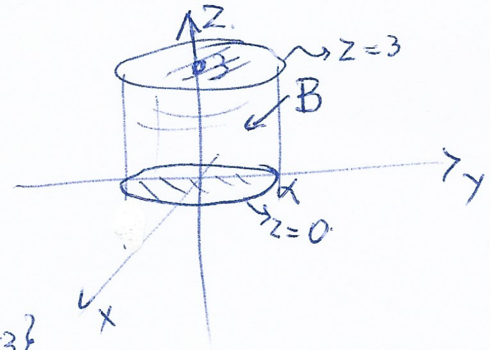
$I_1=I_2$.





6) Να υπολογιστεί το Επιφανειακό Ολοκλήρωμα του Δ.Π

$\vec{F}(x,y,z) = (x+e^{y},\ y-\sigma\upsilon\nu z,\ z+\ln(x+y))$, στην επιφάνεια του (Κλ) Κυλίνδρου $x^2+y^2=\alpha^2$, που κόβεται από τα επίπεδα $z=0$, $z=3$ $(\alpha>0)$




---

$$I = \iint_{\partial B} (\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS = \iiint_{B} \operatorname{div}\vec{F}$$

όπου $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le \alpha^2,\ 0 \le z \le 3\}$

. $\operatorname{div}\vec{F} = 1+1+1 = 3$

Άρα $I = \iiint_{B} 3\,dx\,dy\,dz = 3\,V(B) = 3(\pi\alpha^2\cdot 3) = \pi\alpha^2$ //

---

7) Να υπολογιστεί το Επιφανειακό Ολοκλήρωμα του Δ.Π.

$\vec{F}(x,y,z) = (xy^2,\ x^2y,\ y)$, στην επιφάνεια του Κυλίνδρου (Κλειστού) $x^2+y^2=1$, που κόβεται από τα επίπεδα $z=-1$, $z=1$.

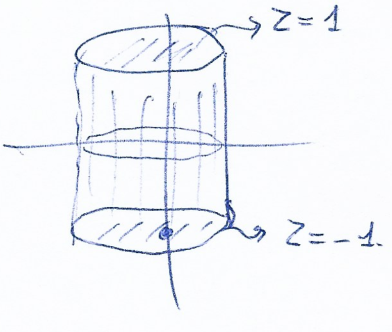
---

$$I = \oiint_{\partial B} \vec{F}\vec{N}\,dS = \iiint_{B} \operatorname{div}\vec{F}, \quad B=\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ -1 \le z \le +1\}$$

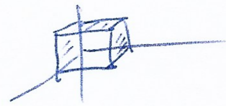
. $\operatorname{div}\vec{F} = (y^2+x^2+0) = x^2+y^2$

$$I = \iiint_{B} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \overset{\text{Κυλ.}}{\underset{\text{Συν.}}{=}} \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_{-1}^{+1} r^2\cdot r\right)dz\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 r^3\,dr =$$

$= 4\pi\cdot\frac{1}{4} = \pi$ //



8) Να υπολογιστεί το Επιφανειακό Ολοκλήρωμα της $\vec{F}(x,y,z)=(xy,\, yz,\, xz)$ στην επιφάνεια του κύβου



$B=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

$$I=\oiint_{\partial B^+} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_B \operatorname{div}\vec{F} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y+z+x)\,dx\,dy\,dz =$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left(\int_0^1 y\,dy\right)dx\,dz + \int_0^1\int_0^1\left(\int_0^1 z\,dz\right)dx\,dy + \int_0^1\int_0^1\left(\int_0^1 x\,dx\right)dy\,dz =$$

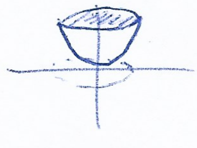
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

9) Να υπολογιστεί το Επιφανειακό Ολοκλήρωμα της $\vec{F}(x,y,z)=(3x+2y,\, 0)$ στην επιφάνεια της Σφαίρας $B=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 9\}$

$$I=\oiint_{\partial B} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_B \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_B (3+2+0) = 5\,V(B) =$$

$$=5\left(\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3\right)= 180\pi$$

10) Να υπολογιστεί το Επιφανειακό Ολοκλήρωμα της $\vec{F}(x,y,z)=(y,\, x,\, z^2)$ στην επιφάνεια του Στερεού (κλειστού)



$B=\{(x,y,z)\ :\ 1\geq z\geq x^2+y^2\}$.

$$I=\oiint_{\partial B^+} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_B \operatorname{div}\vec{F} = \iiint_B (0+0+2z)\,dx\,dy\,dz \xrightarrow[\text{ΣΥΝΤ}]{\text{ΚΥΛΙΝ.}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_{r^2}^1 (2z)\cdot r\,dz\right)dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 r(1-r^4)\,dr = \frac{2\pi}{3}$$

**11)** Να ευρεθούν τα $\alpha, \beta > 0$, ώστε το Επιφανειακό Ολοκλήρωμα της $\vec{F}(x,y,z) = (-x^2 - 4xy, -6yz, 12z)$, υπολογισμένο στην επιφάνεια του $B_{(\alpha,\beta)} = [0,\alpha] \times [0,\beta] \times [0,1]$ να πάρει την μέγιστη τιμή.

---

$$f(\alpha,\beta) = \oiint_{\partial B_{(\alpha,\beta)}} \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F} = \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} \int_0^1 (-2x - 4x - 6z + 12) \, dz \, dy \, dx$$

$$= -\alpha^2 \beta - 2\alpha\beta^2 + 9\alpha\beta, \quad \alpha, \beta > 0$$

---

- Κρίσιμα σημεία της $f(x,y) = -x^2 y - 2xy^2 + 9xy$ τα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, & -2xy - 2y^2 + 9y = 0 \underset{y \neq 0}{\Rightarrow} -2x - 2y + 9 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, & -x^2 - 4yx + 9x = 0 \underset{x \neq 0}{\Rightarrow} -x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_0, y_0) = \left(3, \tfrac{3}{2}\right)$$

- Ο Εσσιανός πίνακας $H\left(3, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{\left(3,\frac{3}{2}\right)} = \begin{pmatrix} -2x & 9-2x-4y \\ 9-2x-4y & -4x \end{pmatrix}_{\left(3,\frac{3}{2}\right)} =$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -6 < 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = 36 - 9 > 0.$

Άρα το $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ Τοπ. Μέγιστο. Λόγω μοναδικότητας του Κρίσιμου Σημείου το $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ είναι Ολικό Μέγιστο.

**12)** Χρησιμοποιώντας το Θ. Gauss, να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (βαθμωτής) $f(x,y,z)=x^2+y+z$ στην επιφάνεια της Σφαίρας $B=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}$

---

Ζητάμε $\vec{F}=(P,Q,R)$, ώστε

$\vec{F}\cdot\vec{N}=f$, $\vec{N}=(x,y,z)\ (=\vec{r})$

$P\cdot x+Qy+Rz=x^2+y+z$, Άρα για $P(x,y,z)=x$, $Q(x,y,z)=1$

$R(x,y,z)=1$, έχουμε $\vec{F}\cdot\vec{N}=f$.

$$I=\oiint_{\partial B^+} f\,dS=\oiint_{\partial B^+}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS=\iiint_B \operatorname{div}\vec{F}=\iiint_B (1+0+0)\,dx\,dy\,dz=V(B)=\frac{4\pi}{3}$$

**13)** Να αποδειχθούν για $\vec{F}$ $C^1$, $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $C^2$, $\vec{F}=f\nabla g$.

i) $\operatorname{div}\vec{F}=\operatorname{div}(f\operatorname{grad}g)=\operatorname{grad}f\cdot\operatorname{grad}g+f\Delta g$,

$\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(f\nabla g)=\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g$, $\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

ii) $\vec{F}\cdot\vec{N}=f\,D_{\vec{N}}(g)$ ($D_{\vec{N}}$ κατευθυνόμενη παράγωγος, $\|\vec{N}\|=1$)

i) $\vec{F}=f\nabla g=(fg_x, fg_y, fg_z)$, $\operatorname{div}\vec{F}=(f_xg_x+fg_{xx})+(f_yg_y+fg_{yy})+(f_zg_z+fg_{zz})$

$=\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g$.

ii) $\vec{F}\cdot\vec{N}=(f\nabla g)\cdot\vec{N}=f(\nabla g\cdot\vec{N})=f\,D_{\vec{N}}g$.

**14)** Τύποι του Green. ($f,g$ όπως στην 13)

i) $\iiint_B(\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g)=\oiint_{\partial B^+} f\,D_{\vec{N}}g$ (1ος Ολοκλ. Τύπος)

ii) $\iiint_B (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) = \oiint_{\partial B^+} (f D_{\vec N} g - g D_{\vec N} f)$, (2ος Ολοκλ. Τύπος)

όπου B στερεό του $\mathbb{R}^3$, με σύνορο $\partial B$ λεία, $C^1$, κλειστή επιφάνεια, $\vec N$ το Δ.Π των καθέτων (μοναδιαίων) στην $\partial B$.

i) Θέτουμε $\vec F = f\nabla g$, και εφαρμόζουμε τον τύπο Gauss

$$\iiint_B \operatorname{div}\vec F = \oiint_{\partial B^+} (\vec F \cdot \vec N)\, dS \quad \text{Από την 13) άσκηση}$$

$$\iiint_B (\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g) = \oiint_{\partial B^+} f D_{\vec N} g \quad \text{ο.ε.δ.}$$

ii) Από την i) αλλάζοντας την f με g και την g με f.

$$\iiint_B (\nabla g \cdot \nabla f + g\nabla^2 f) = \oiint_{\partial B^+} g\, D_{\vec N} f \quad (*)$$

Αφαιρούμε τις i) και ii)

$$\iiint_B (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) = \oiint_{\partial B^+} (f D_{\vec N} g - g D_{\vec N} f) \quad \text{ο.ε.δ.}$$

15)** Έστω $\vec F$ Αστρόβιλο ($\operatorname{curl}\vec F = \vec 0$) και Σωληνοειδές Δ.Π ($\operatorname{div}\vec F = 0$)

Να δειχθεί ότι $\vec F = \nabla f$ με $\nabla^2 f = 0$ / $\underset{\vec F\ \ C^1}{\text{Π.Ο}}$ του $\vec F$ Απλά Συνεκτικό σύνολο.

- Ειδική περίπτωση, $\vec F(\vec r) = \frac{\vec r}{r^3}$, $\vec r = (x,y,z)$, $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$\vec F$ Αστρόβιλο σε Απλά Συν. σύνολο $\Rightarrow$ $\vec F$ Συντηρητικό $\Rightarrow \exists$ f με $\vec F = \nabla f$, $(P,Q,R) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\operatorname{div}\vec F = 0$, $\operatorname{div}\vec F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$.

Άρα, $\nabla^2 f = 0$.

# Οι τελεστές της Διανυσματικής Ανάλυσης και οι ιδιότητες τους

## 1 Εσωτερικό, Εξωτερικό, Μεικτό Γινόμενο διανυσματικών πεδίων

Έστω $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{H} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ διάνυσματικά πεδία. Ορίζονται (ανάλογα με τα γινόμενα στον $\mathbb{R}^3$) για $\overrightarrow{F} = (P_1, Q_1, R_1)$, $\overrightarrow{G} = (P_2, Q_2, R_2)$, $\overrightarrow{H} = (P_3, Q_3, R_3)$

i $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G} = P_1P_2 + Q_1Q_2 + R_1R_2$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}$, **το εσωτερικό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ ($\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}$ α.π.)

ii $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} =$

$= (Q_1R_2 - R_1Q_2)\overrightarrow{i} - (P_1R_2 - R_1P_2)\overrightarrow{j} + (P_1Q_2 - Q_1P_2)\overrightarrow{k}$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}^3$, το **εξωτερικό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ ($\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}$ δ.π.)

iii $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix}$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}$, το **μεικτό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}$ ($(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H})$ α.π.)

### Χρήσιμες ιδιότητες

1. $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G} = \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{F}$
2. $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G} = -\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{F}$
3. $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{F}) = (\overrightarrow{H}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}) = -(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{G}) = -(\overrightarrow{H}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{F}) = -(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{H})$
4. $\overrightarrow{F} \times (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{H})\overrightarrow{G} - (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G})\overrightarrow{H}$
   $(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{D}) \times (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{D}, \overrightarrow{H})\overrightarrow{G} - (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{D}, \overrightarrow{G})\overrightarrow{H}$
5. $\overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}) = (\overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{D})(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{H}) - (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{D})(\overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{H})$
6. $(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) \cdot (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}) = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}))$

Υπόδειξη: 1,2) εύκολα, 3) απο ιδιότητες ορίζουσας, 4,6) γράφουμε αναλυτικά τα δύο μέλη, 5) Απο την 4).

## 2 Τελεστές: Κλίσης (grad), Απόκλισης (div), Στροβιλισμού (rot)

Ο τελεστής $\boldsymbol{\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})}$ καλείται **ανάδελτα** (ανάποδο ελληνικό $\Delta$) ή **nabla** (αρχαίο Ασσυριακό μουσικό όργανο, άρπα, με την μορφή $\nabla$).

Ο $\nabla$ ορίστηκε απο τον Hamilton (1837) για να δώσει κομψή και ευανάγνωστη γραφή στις εξισώσεις του. Ο Maxwell υιοθέτησε το σύμβολο για να γράψει με σύντομο τρόπο τις εξισώσεις του.

Ο τελεστής έχει δράση σε συναρτήσεις $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμο (π.χ. $C^1$) α.π. και $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμο (π.χ. $C^1$) δ.π. Η δράση του ορίζεται ως εξής:

i $\boldsymbol{\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})}$, με π.ο. στο $\mathbb{R}^3$ και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$, την **κλίση** ή **βαθμίδα** της $f$ ($\nabla f$ δ.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{grad}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla f}$ (gradient).

ii $\boldsymbol{\nabla \cdot \overrightarrow{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$ με π.ο. στο $\mathbb{R}^3$ και π.τ. στο $\mathbb{R}$, την **απόκλιση** της $\overrightarrow{F}$ ($\nabla \cdot \overrightarrow{F}$ α.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{div}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \boldsymbol{\nabla \cdot \overrightarrow{F}}$ (divergence).

iii $$\boldsymbol{\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\overrightarrow{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k}}$$ με π.ο. και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$ τον **στροβιλισμό** της $\overrightarrow{F}$ ($\nabla \times \overrightarrow{F}$ δ.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{curl}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \mathbf{rot}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \boldsymbol{\nabla \times \overrightarrow{F}}$ (curl, rotation).

### Χρήσιμες ιδιότητες I

1. $\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$, $\mathrm{grad}(\lambda f) = \lambda \mathrm{grad}(f)$,
   $\mathrm{grad}(fh) = h\mathrm{grad}(f) + f\mathrm{grad}(h)$
2. $\mathrm{div}(f\overrightarrow{F}) = f\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad}f$, $\mathrm{rot}(\phi\overrightarrow{F}) = \phi\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) + \mathrm{grad}\phi \times \overrightarrow{F}$ ή
   $\nabla \cdot (f\overrightarrow{F}) = f(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot \nabla(f)$, $\nabla \times (\phi\overrightarrow{F}) = \phi(\nabla \times \overrightarrow{F}) + \nabla\phi \times \overrightarrow{F}$
3. $\mathrm{div}(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{G})$ ή
   $\nabla \cdot (\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{G})$
4. $\mathrm{rot}(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}\mathrm{div}(\overrightarrow{G}) - \overrightarrow{G}\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{G} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{F}) - (\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{G})$ ή
   $\nabla \times (\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}(\nabla \cdot \overrightarrow{G}) - \overrightarrow{G}(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{G} \cdot \nabla)(\overrightarrow{F}) - (\overrightarrow{F} \cdot \nabla)(\overrightarrow{G})$
5. $\mathrm{grad}(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{G}) + (\overrightarrow{G} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{G})$ ή
   $\nabla(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times (\nabla \times \overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \times (\nabla \times \overrightarrow{G}) + (\overrightarrow{G} \cdot \nabla)(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{F} \cdot \nabla)(\overrightarrow{G})$

Υπόδειξη: Απο ιδιότητες του τελεστη παραγώγισης $\frac{d}{dt}$

### Χρήσιμες ιδιότητες II

Έστω $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ είναι $C^2$ συναρτήσεις. Ισχύουν

1. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \overrightarrow{0}$ ή $\bigtriangledown \times (\bigtriangledown f) = \overrightarrow{0}$
2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\overrightarrow{F}) = 0$ ή $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown \times \overrightarrow{F}) = 0$
3. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f) \times \mathrm{grad}(h)) = 0$ ή $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown f \times \bigtriangledown h) = 0$

Υπόδειξη 1,2) από το θεώρημα για τις 2ης τάξης μερικές παραγώγους, 3) από την 3) στις ιδιότητες I και την 1) απο τις ιδιότητες II)

### Τελεστης Laplace

Έστω $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ $C^2$ συναρτήσεις. Έστω ο τελεστής $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 = \bigtriangledown \cdot \bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$. Ορίζουμε

i $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$ με πο στο $\mathbb{R}^3$ και πτ στο $\mathbb{R}$ **το α.π. Laplace** της $f$.

ii $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 \overrightarrow{F} = (\bigtriangledown^2 P, \bigtriangledown^2 Q, \bigtriangledown^2 R)}$ με π.ο. και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$, **το δ.π. Laplace** της $\overrightarrow{F}$

### Χρήσιμες ιδιότητες $\Delta \equiv \bigtriangledown^2$

1. $\Delta \overrightarrow{F} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\overrightarrow{F})) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}))$ ή
   $\bigtriangledown^2 \overrightarrow{F} = \bigtriangledown(\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}) - \bigtriangledown \times (\bigtriangledown \times \overrightarrow{F})$
2. $\mathrm{div}(f \mathrm{grad}(h) - h \mathrm{grad}(f)) = f \Delta g - g \Delta f$ ή
   $\bigtriangledown \cdot (f \bigtriangledown g - g \bigtriangledown f) = f \bigtriangledown^2 g - g \bigtriangledown^2 f$
3. $\Delta(fh) = h \Delta f + f \Delta h + 2(\mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(h))$ ή
   $\bigtriangledown^2 (fh) = h \bigtriangledown^2 f + f \bigtriangledown^2 h + 2(\bigtriangledown f \cdot \bigtriangledown h)$

## 3 Πεδία ειδικής μορφής

i Εαν $\boldsymbol{\overrightarrow{F} = \bigtriangledown f}$, το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **συντηρητικό πεδίο**.

ii Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown \times \overrightarrow{F} = 0}$ το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **αστρόβιλο δ.π.** ή **δ.π. μηδενικού στροβιλισμού**.

iii Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F} = 0}$ το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **ασυμπίεστο δ.π.**

iv Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 f = 0}$ το α.π. $f$ καλείται **αρμονικό α.π.**

## Σημειώσεις

α'Εάν $\overrightarrow{F} = (P,Q,R)$ τότε $\overrightarrow{F} \cdot \bigtriangledown = (P,Q,R) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}, R\frac{\partial}{\partial z})$

β' Πολλές φορές (στην Φυσική) ο τελεστής $\bigtriangledown$ συμβολίζεται $\overrightarrow{\bigtriangledown}$

## Συντομεύσεις

π.ο.= πεδίο ορισμού, π.τ.=πεδίο τιμών, δ.π.=διανυσματικό πεδίο, α.π.=αριθμητικό πεδίο.

## ΑνάλυσηII(2010-2011)

## Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών Ε.Κ.Π.Α

**C.F.Gauss (1777-1855)**