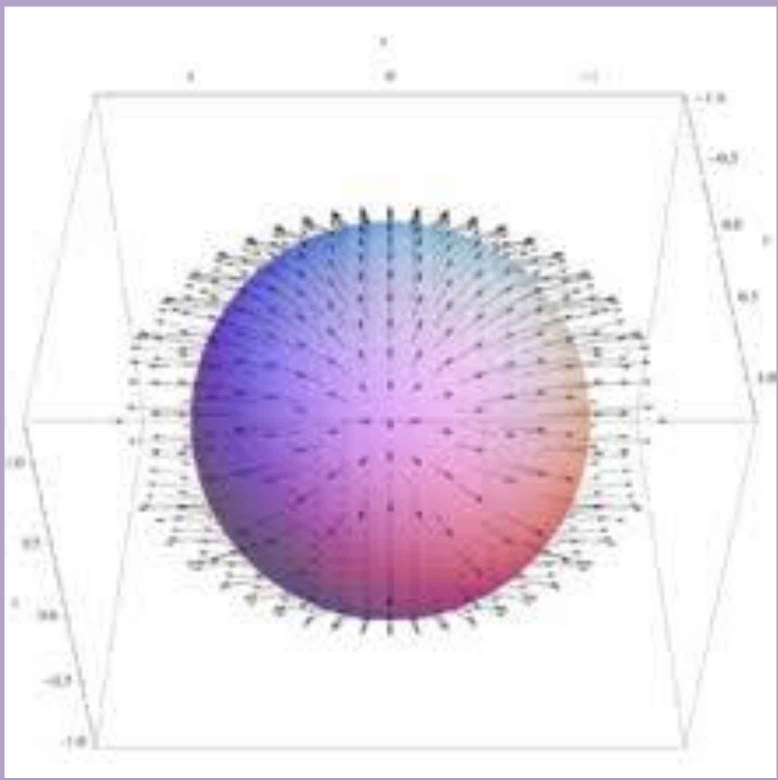
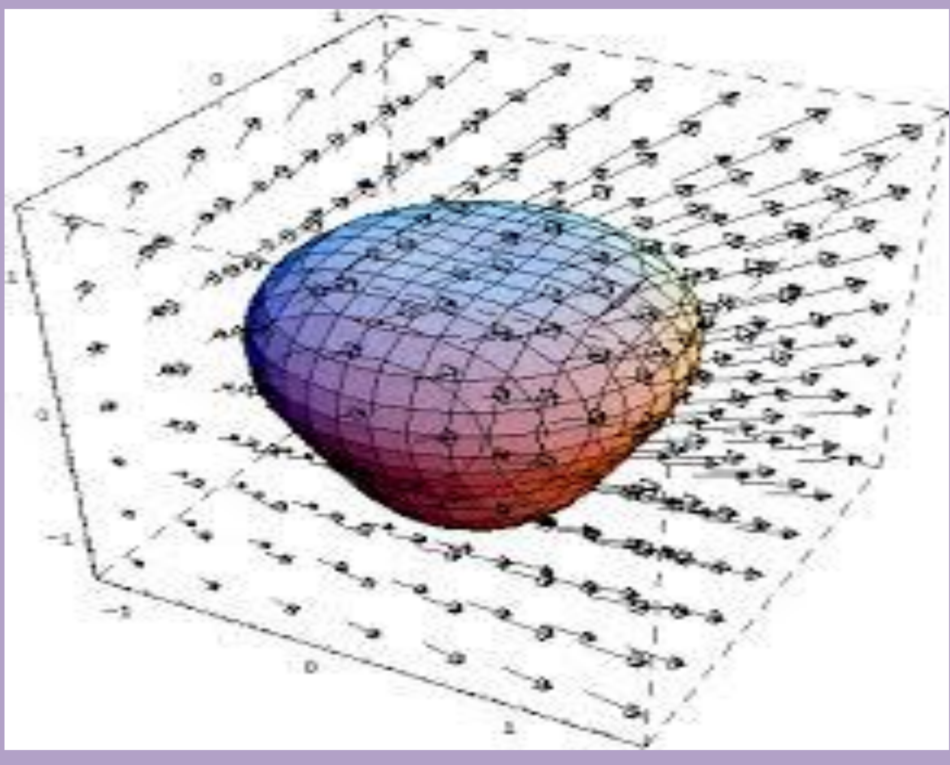
ΘΕΩΡΗΜΑ της ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ του GAUSS





ΜΑΘΗΜΑ 29 (16-12-20)

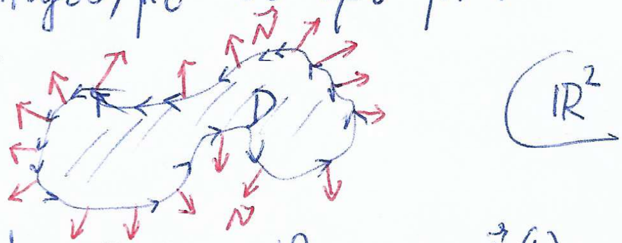
ΚΕΦ 13 Θεώρημα της Απόκλισης του Gauss

Ας θυμηθούμε το Θ. Απόκλισης στον $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{F}=(P,Q)\ ,\ C^1\ ,\quad \operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\ \text{(Απόκλιση)}$$

i) Αν το σύνολο $D\subseteq\mathbb{R}^2$ είναι Συμπαγές, με σύνορο μία κλειστή, λεία, C^1 καμπύλη $\partial D=\Gamma$

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))\ ,\ t\in[\alpha,b]$

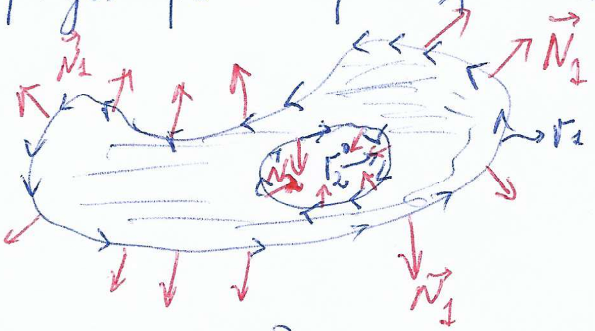


και $\vec{N}(t)=\dfrac{(y'(t),-x'(t))}{\|\vec{r}'(t)\|}$ το μοναδιαίο κάθετο στο $\vec{r}(t)$ της Γ που βλέπει προς το εξωτερικό της Γ τότε

$$\oint_{\partial D^+}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,ds=\iint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy \qquad (ds=\|\vec{r}'(t)\|dt=\text{στοιχ. μήκος})$$

ii) Αν το σύνολο $D\subseteq\mathbb{R}^2$ είναι Συμπαγές με σύνορο κλειστές, λείες, C^1 καμπύλες (πχ Γ_1,Γ_2) τότε πάλι ισχύει

$$\oint_{\partial D^+}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,ds=\iint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy.$$



Τι περιμένουμε για το Θ. Απόκλισης στον $\mathbb{R}^3$;;

$$\vec{F}=(P,Q,R),\ C^1\ ,\quad \operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\ \text{(Απόκλιση)}$$

i) Αν το σύνολο $G\subseteq\mathbb{R}^3$ είναι Συμπαγές, με σύνορο μία κλειστή, λεία, C^1 επιφάνεια $\partial D=S$

$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\ ,\ (u,v)\in B$ (συνήθως ορθογώνιο)

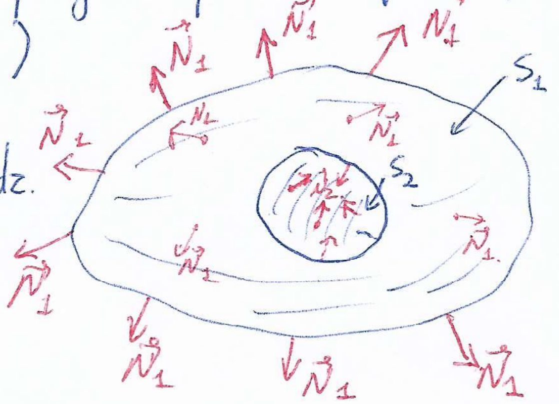
και $\vec{N}(u,v)=\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v\,(u,v)}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}$ το μοναδιαίο κάθετο στο $\vec{r}(u,v)$ της S που βλέπει προς το εξωτερικό της S, τότε

$$\oiint_{\partial G^+} (\vec{F}\cdot\vec{N})dS = \iiint_G \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz \quad , \; dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,du\,dv$$

(Θ. Gauss) $\qquad$ = στοιχ. εμβαδόν.

ii) Αν το σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι Συμπαγές με σύνορο κλειστές, λείες, C^1 επιφάνειες (πχ S_1, S_2)

τότε πάλι $\oiint_{\partial G^+} (\vec{F}\cdot\vec{N})dS = \iiint_G \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$. (Θ. Gauss)



Αν και το Θ. Απόκλισης στον $\mathbb{R}^2$ είναι απλό Πόρισμα του Θ. Green, το Θ. Gauss αποδεικνύεται ανάλογα με το Θ. Green. (από το Θ.Θ.Α.Λ)

Θεώρημα της Απόκλισης του Gauss *

Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^3$ με σύνορο ∂G, θετικά προσανατολισμένη κλειστή, λεία, C^1 επιφάνεια (ή κλειστές, λείες, C^1 επιφάνειες, θετικά προσανατολισμένες ως προς το G). Τότε για $\vec{F}: A(\subseteq\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3 (C^1)$ με $G \subseteq A$ ισχύει :

$$\boxed{\oiint_{\partial G^+} (\vec{F}\cdot\vec{N})dS = \iiint_G \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz} \;, \; \vec{N}(x,y,z) \perp \partial G, \text{ στο } (x,y,z)\in\partial G.$$
(μοναδιαίο)

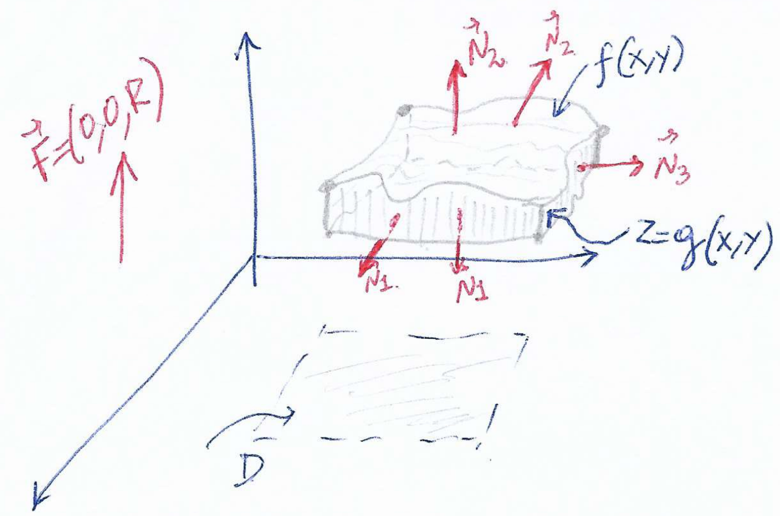
Αποδ. $\vec{F}=(P,Q,R):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, C^1. Θα αποδείξουμε το θεώρημα για απλά σύνολα G του $\mathbb{R}^3$.

• $\vec{F}=(0,0,R)$ και G xy ή yx απλό σύνολο δηλ.

$$G=\{(x,y,z) : \alpha\le x\le \beta, \; \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(y) \text{ και } g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$$

ή $\quad G=\{(x,y,z) : \gamma\le y\le\delta, \; \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y) \text{ και } g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$

Έστω $\quad G=\{(x,y,z) : (x,y)\in D \text{ και } g(x,y)\le z\le f(x,y)\}\;(g, f: C^1)$



Η επιφάνεια ∂G του G αποτελείται από τις

$$S_1=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D,\quad z=g(x,y)\}\ \text{ με }\ \vec{N}_1(x,y)=(g_x,\ g_y,\ -1)_{(x,y)}\Big/(g_x^2+g_y^2+1)^{\frac{1}{2}}_{(x,y)}$$

$$S_2=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D,\quad z=f(x,y)\}\ \text{ με }\ \vec{N}_2(x,y)=(-f_x,\ -f_y,\ 1)_{(x,y)}\Big/(f_x^2+f_y^2+1)^{1/2}_{(x,y)}$$

και μια κυλινδρική επιφάνεια, όπου το $\vec{N}_3=(\cdot,\cdot,0)$ οπότε, $\vec{F}\circ\vec{N}_3=(0,0,R)\circ(\cdot,\cdot,0)=0$. και $\iint_{S_3}(\vec{F}\circ\vec{N}_3)\,dS=0$ (1)

Άρα, $$\iint_{S_1}(\vec{F}\circ\vec{N}_1)\,dS=\iint_D \vec{F}(x,y,g(x,y))\circ(g_x,g_y,-1)\,dx\,dy=\iint_D -R(x,y,g(x,y))\,dx\,dy \quad (2)$$

$$\iint_{S_2}(\vec{F}\circ\vec{N}_2)\,dS=\iint_D \vec{F}(x,y,f(x,y))\circ(-f_x,-f_y,1)\,dx\,dy=\iint_D R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy \quad (3)$$

Άρα $$\oiint_{\partial G^+}(0,0,R)\ \overset{(1)}{\underset{(2),(3)}{=}}\ \iint_D\big[R(x,y,f(x,y))-R(x,y,g(x,y))\big]\,dx\,dy. \quad (*)$$

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{F}=\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint_D\left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right]dx\,dy \quad \underline{\underline{(\text{ΘΘΑΠ!!})}}$$

$$=\iint_D\big[R(x,y,f(x,y))-R(x,y,g(x,y))\big]\,dx\,dy \quad (**)$$

Από $(*)$, $(**)$ έχουμε $$\oiint_{\partial G}\big[(0,0,R)\circ\vec{N}\big]\,dS=\iiint_G\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

- $\vec{F}=(0,Q,0)$ και xz ή zx απλό G, ανάλογα

$$\oiint_{\partial G}\left[(0,Q,0)\cdot\vec{N}\right]dS=\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$$

- $\vec{F}=(P,0,0)$ και yz ή zy απλό G, ανάλογα.

$$\oiint_{\partial G}\left[(P,0,0)\cdot\vec{N}\right]dS=\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Τελικά !

Για G απλό σύνολο στον $\mathbb{R}^3$, $\vec{F}=(P,0,0)+(0,Q,0)+(0,0,R)$,

$$\oiint_{\partial G}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS=\iiint_G \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz.$$

Για σύνολα που δεν είναι απλά, αλλά έχουν σύνορο περισσότερες επιφάνειες, η απόδειξη γίνεται με χωρισμό σε απλά.

<u>Εφαρμογές Θ. Απόκλισης του Gauss</u>

- Το Θ. Gauss έχει πολλές εφαρμογές στην Φυσική (Μηχανική των Ρευστών, Διάδοση Θερμοκρασίας, ...), στις Διαφ. Εξισώσεις (Laplace)

1) <u>Υπολογισμός Επιφανειακού Ολοκληρώματος</u> με την βοήθεια Τριπλού Ολοκληρώματος για επιφάνεια S, C^1, απλή, ΚΛΕΙΣΤΗ, λεία, όταν το $\oiint_{\partial G}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$ είναι <u>δυσκολότερο</u> από το $\iiint_G \operatorname{div}\vec{F}$

2) Υπολογισμό Όγκου $V(G)$ με την βοήθεια Επιφανειακού Ολ. για $\vec{F}$ π.χ $\vec{F}(x,y,z)=\frac{1}{3}(x,y,z)$, $V(G)=\iiint_G 1\,dx\,dy\,dz=\iiint_G \operatorname{div}\vec{F}=\oiint_{\partial G}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS.$

3) <u>Μελέτη Σωληνοειδών</u> Δ.Π.

$\vec{F}$ <u>σωληνοειδές</u> $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{div}\vec{F}=0$ στο π.ο.

Με την βοήθεια του Θ. Απόκλισης μπορούμε να αποδείξουμε

$$\operatorname{div}\vec{F}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{B_t}\oiint_{\partial B_t}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,ds \quad , \text{ όπου}$$

$B_t=B((x_0,y_0,z_0),t)$ (όπως, μέτρον $\mathbb{R}^2$)

Πρόταση

$\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ C^1 ΔΠ. ΤΣΕΙ.

i) $\vec{F}$ σωληνοειδές ($\operatorname{div}\vec{F}=0$)

ii) η ροή $\oiint_{\partial G}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,ds=0$, δια μέσου κλειστής, λείας, C^1 επιφάνειας ∂G ($G\subseteq\mathbb{R}^3$)

iii) υπάρχει $\vec{V}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, ώστε $\vec{F}=\nabla\times\vec{V}$

Το $\vec{V}$ καλείται Διαν. Δυναμικό του $\vec{F}$

Απόδ. i) ⇒ ii) $\oiint_{G}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,ds \overset{\Theta}{\underset{Gauss}{=}} \iiint_G \operatorname{div}\vec{F}=0$.

ii) ⇒ i) $\operatorname{div}\vec{F}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{B_t}\oiint_{\partial B_t}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,ds \overset{(ii)}{=} 0$.

Άρα, $\operatorname{div}\vec{F}=0$

iii) ⇒ i) $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)=\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z},\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x},\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$

$=\nabla\times\vec{V}$, $\vec{V}=(V_1,V_2,V_3)$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{V})=\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{V})=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 V_3}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 V_1}{\partial z\partial y}\right)$$

$=0$ (Θ. Μεικτών Παραγώγων, $\vec{V}=C^2$, $\vec{F}=C^1$)

i) ⇒ iii) Έστω $\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=0$ (*)

Ζητάμε $\vec{V}=(V_1,V_2,V_3)$, ώστε

(1) $F_1=\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}$, $F_2=\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}$, $F_3=\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}$

Παρατηρούμε ότι αν $\vec{V}$ είναι είναι λύση του συστήματος (1) τότε $\vec{V}+\nabla\varphi$, θα είναι λύση ($\nabla\varphi$ = συντηρητικό, $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$, $\vec{F}=\nabla\times(\vec{V}+\nabla\varphi)$) για τυχαία $\varphi: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (C^2) και κάθε άλλη λύση $V^*=\vec{V}+\nabla f$ ..

Αναζητούμε λύση με $V_3=0$, Τότε το σύστημα (1) γίνεται

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\partial V_2}{\partial z} \\ F_2 &= \frac{\partial V_1}{\partial z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_2(x,y,z) &= -\int_{z_0}^{z} F_1(x,y,t)\,dt + f_2(x,y) \quad (2) \\ V_1(x,y,z) &= \int_{z_0}^{z} F_2(x,y,t)\,dt + f_1(x,y) \quad (3) \end{aligned}$$

$$F_3 = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}.$$

Βάσει Θεωρήματος (βλ. Βιβλιογραφία), $\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{z} f(x,t)\,dt = \int_{z_0}^{z}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt$.

Οπότε, $F_3(x,y,z) = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial F_1(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y,t)}{\partial y}\right)dt +$
$+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \overset{*}{=} +\int_{z_0}^{z}\frac{\partial F_3(x,y,t)}{\partial z}\,dt + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) =$
$= +\left[F_3(x,y,z) - F_3(x,y,z_0)\right] + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$, Άρα.

$F_3(x,y,z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$, Θέτουμε $f_1 = 0$, $F_3(x,y,z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$
$\Rightarrow f_2(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_3(t,y,z_0)\,dt$. Αντικαθιστώντας στις (2), (3)

$$\begin{cases} V_1(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} F_2(x,y,t)\,dt \\ V_2(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} F_1(x,y,t)\,dt + \int_{x_0}^{x} F_3(t,y,z_0)\,dt \\ V_3(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

είναι μια λύση του συστήματος. — Η γενική λύση είναι $\boxed{V^* = V + \nabla\varphi}$, φ (τυχαία) C^2

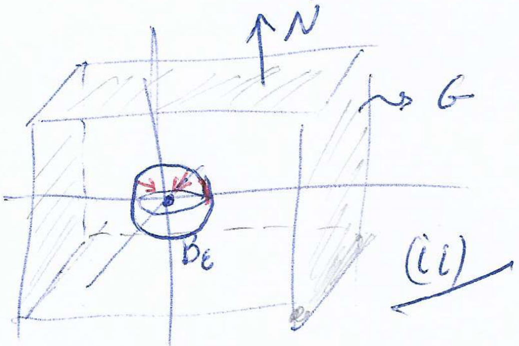
Νόμος του Gauss

Έστω $\vec{F}(\vec{r})=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, $(x,y,z)\neq(0,0,0)$

Τότε το συντηρητικό ΔΠ $\vec{F}$ είναι σωληνοειδές και

$$\oiint_{\partial G}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS=\begin{cases}4\pi, & (0,0,0)\in \varepsilon\sigma G\\ 0, & (0,0,0)\notin G\end{cases}$$

όπου G είναι συμπαγές, και φράσσεται από την επιφάνεια $S=\partial G$ (κλειστή, C', λεία)

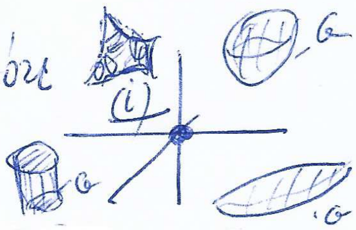


• $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)=(P,Q,R)$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3x^2}{r^5}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3y^2}{r^5}$,

$\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3z^2}{r^5}$ Άρα $\operatorname{div}\vec{F}=\dfrac{3}{r^3}-\dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=\dfrac{3}{r^3}-\dfrac{3r^2}{r^5}=0$

Άρα, το $\vec{F}$ είναι σωληνοειδές.



i) Αν το $(0,0,0)\notin G$, εφαρμόζεται το Θ. Gauss, οπότε
$$\oiint_{\partial G}\vec{F}\cdot\vec{N}\cdot dS=\iiint_G \operatorname{div}\vec{F}=0$$

ii) Αν το $(0,0,0)\in\varepsilon\sigma G$, η $\vec{F}$ δεν ορίζεται στο $(0,0,0)$, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Gauss στην $\vec{F}$.

Έστω $B_\varepsilon=B((0,0,0),\varepsilon)\subseteq\varepsilon\sigma G$.

Το $G_1=G\cap\varepsilon\xi B_\varepsilon$ είναι σύνολο, όπου εφαρμόζεται το Θ. Gauss για την $\vec{F}$. Τότε ($\operatorname{div}\vec{F}=0$) έχουμε

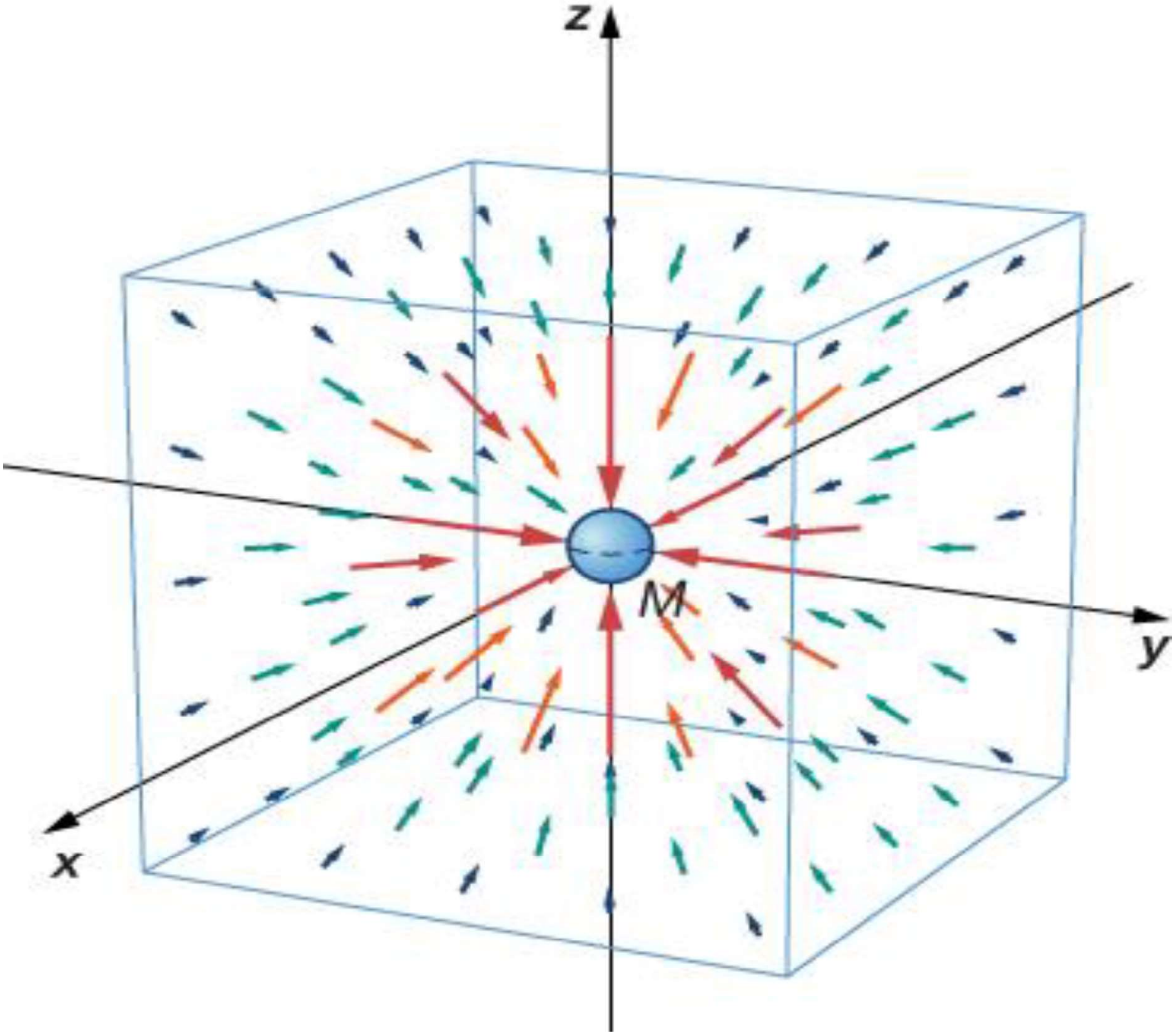
$$\oiint_{\partial G^+}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS=\oiint_{\partial B_\varepsilon^+}(\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS\overset{*}{=}4\pi$$

(*) $B_\alpha = B((0,0,0),\alpha) \quad (\alpha > 0)$

Για $\vec{r} = (x,y,z) \in \partial B_\alpha$, $r = \alpha$ και το μοναδιαίο κάθετο είναι $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{N}$

$\vec{F} \circ \vec{N} = \frac{\vec{r}}{r^3} \circ \frac{\vec{r}}{r} = \frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$, $\vec{F} \circ \vec{N} = \frac{1}{\alpha^2}$ στην επιφάνεια της B_α.

Άρα $\displaystyle\oiint_{\partial B_\alpha^+} (\vec{F} \circ \vec{N})\, dS = \frac{1}{\alpha^2} \iint_{\partial B_\alpha^+} dS = \frac{1}{\alpha^2}\left(A(\partial B_\alpha)\right) = \frac{1}{\alpha^2}(4\pi\alpha^2) = \underline{\underline{4\pi}}$



Οι τελεστές της Διανυσματικής Ανάλυσης και οι ιδιότητες τους

1 Εσωτερικό, Εξωτερικό, Μεικτό Γινόμενο διανυσματικών πεδίων

Έστω $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{H} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ διάνυσματικά πεδία. Ορίζονται (ανάλογα με τα γινόμενα στον $\mathbb{R}^3$) για $\overrightarrow{F} = (P_1, Q_1, R_1)$, $\overrightarrow{G} = (P_2, Q_2, R_2)$, $\overrightarrow{H} = (P_3, Q_3, R_3)$

i $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G} = P_1P_2 + Q_1Q_2 + R_1R_2$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}$, **το εσωτερικό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ ($\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}$ α.π.)

ii $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} =$

$= (Q_1R_2 - R_1Q_2)\overrightarrow{i} - (P_1R_2 - R_1P_2)\overrightarrow{j} + (P_1Q_2 - Q_1P_2)\overrightarrow{k}$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}^3$, το **εξωτερικό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ ($\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}$ δ.π.)

iii $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix}$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}$, το **μεικτό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}$ ($(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H})$ α.π.)

Χρήσιμες ιδιότητες

1. $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G} = \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{F}$
2. $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G} = -\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{F}$
3. $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{F}) = (\overrightarrow{H}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}) = -(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{G}) = -(\overrightarrow{H}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{F}) = -(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{H})$
4. $\overrightarrow{F} \times (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{H})\overrightarrow{G} - (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G})\overrightarrow{H}$
   $(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{D}) \times (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{D}, \overrightarrow{H})\overrightarrow{G} - (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{D}, \overrightarrow{G})\overrightarrow{H}$
5. $\overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}) = (\overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{D})(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{H}) - (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{D})(\overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{H})$
6. $(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) \cdot (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}) = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}))$

Υπόδειξη: 1,2) εύκολα, 3) απο ιδιότητες ορίζουσας, 4,6) γράφουμε αναλυτικά τα δύο μέλη, 5) Απο την 4).

2 Τελεστές: Κλίσης (grad), Απόκλισης (div), Στροβιλισμού (rot)

Ο τελεστής $\boldsymbol{\bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})}$ καλείται **ανάδελτα** (ανάποδο ελληνικό Δ) ή **nabla** (αρχαίο Ασσυριακό μουσικό όργανο, άρπα, με την μορφή $\bigtriangledown$).

Ο $\bigtriangledown$ ορίστηκε απο τον Hamilton (1837) για να δώσει κομψή και ευανάγνωστη γραφή στις εξισώσεις του. Ο Maxwell υιοθέτησε το σύμβολο για να γράψει με σύντομο τρόπο τις εξισώσεις του.

Ο τελεστής έχει δράση σε συναρτήσεις $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμο (π.χ. C^1) α.π. και $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμο (π.χ. C^1) δ.π. Η δράση του ορίζεται ως εξής:

i $\boldsymbol{\bigtriangledown f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})}$, με π.ο. στο $\mathbb{R}^3$ και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$, την **κλίση** ή **βαθμίδα** της f ($\bigtriangledown f$ δ.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{grad}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\bigtriangledown f}$ (gradient).

ii $\boldsymbol{\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$ με π.ο. στο $\mathbb{R}^3$ και π.τ. στο $\mathbb{R}$, την **απόκλιση** της $\overrightarrow{F}$ ($\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}$ α.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{div}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \boldsymbol{\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}}$ (divergence).

iii $$\boldsymbol{\bigtriangledown \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\overrightarrow{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k}}$$ με π.ο. και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$ τον **στροβιλισμό** της $\overrightarrow{F}$ ($\bigtriangledown \times \overrightarrow{F}$ δ.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{curl}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \mathbf{rot}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \boldsymbol{\bigtriangledown \times \overrightarrow{F}}$ (curl, rotation).

Χρήσιμες ιδιότητες I

1. $\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$, $\mathrm{grad}(\lambda f) = \lambda \mathrm{grad}(f)$,
   $\mathrm{grad}(fh) = h\mathrm{grad}(f) + f\mathrm{grad}(h)$
2. $\mathrm{div}(f\overrightarrow{F}) = f\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad}f$, $\mathrm{rot}(\phi\overrightarrow{F}) = \phi\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) + \mathrm{grad}\phi \times \overrightarrow{F}$ ή
   $\bigtriangledown \cdot (f\overrightarrow{F}) = f(\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot \bigtriangledown(f)$, $\bigtriangledown \times (\phi\overrightarrow{F}) = \phi(\bigtriangledown \times \overrightarrow{F}) + \bigtriangledown\phi \times \overrightarrow{F}$
3. $\mathrm{div}(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{G})$ ή
   $\bigtriangledown \cdot (\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \cdot (\bigtriangledown \times \overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \cdot (\bigtriangledown \times \overrightarrow{G})$
4. $\mathrm{rot}(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}\mathrm{div}(\overrightarrow{G}) - \overrightarrow{G}\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{G} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{F}) - (\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{G})$ ή
   $\bigtriangledown \times (\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}(\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{G}) - \overrightarrow{G}(\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{G} \cdot \bigtriangledown)(\overrightarrow{F}) - (\overrightarrow{F} \cdot \bigtriangledown)(\overrightarrow{G})$
5. $\mathrm{grad}(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{G}) + (\overrightarrow{G} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{G})$ ή
   $\bigtriangledown(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times (\bigtriangledown \times \overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \times (\bigtriangledown \times \overrightarrow{G}) + (\overrightarrow{G} \cdot \bigtriangledown)(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{F} \cdot \bigtriangledown)(\overrightarrow{G})$

Υπόδειξη: Απο ιδιότητες του τελεστη παραγώγισης $\frac{d}{dt}$

Χρήσιμες ιδιότητες II

Έστω $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ είναι C^2 συναρτήσεις. Ισχύουν

1. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \overrightarrow{0}$ ή $\bigtriangledown \times (\bigtriangledown f) = \overrightarrow{0}$
2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\overrightarrow{F}) = 0$ ή $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown \times \overrightarrow{F}) = 0$
3. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f) \times \mathrm{grad}(h)) = 0$ ή $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown f \times \bigtriangledown h) = 0$

Υπόδειξη 1,2) από το θεώρημα για τις 2ης τάξης μερικές παραγώγους, 3) από την 3) στις ιδιότητες I και την 1) απο τις ιδιότητες II)

Τελεστης Laplace

Έστω $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ C^2 συναρτήσεις. Έστω ο τελεστής $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 = \bigtriangledown \cdot \bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$. Ορίζουμε

i $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$ με πο στο $\mathbb{R}^3$ και πτ στο $\mathbb{R}$ **το α.π. Laplace** της f.

ii $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 \overrightarrow{F} = (\bigtriangledown^2 P, \bigtriangledown^2 Q, \bigtriangledown^2 R)}$ με π.ο. και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$, **το δ.π. Laplace** της $\overrightarrow{F}$

Χρήσιμες ιδιότητες $\Delta \equiv \bigtriangledown^2$

1. $\Delta \overrightarrow{F} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\overrightarrow{F})) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}))$ ή
   $\bigtriangledown^2 \overrightarrow{F} = \bigtriangledown(\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}) - \bigtriangledown \times (\bigtriangledown \times \overrightarrow{F})$
2. $\mathrm{div}(f \mathrm{grad}(h) - h \mathrm{grad}(f)) = f \Delta g - g \Delta f$ ή
   $\bigtriangledown \cdot (f \bigtriangledown g - g \bigtriangledown f) = f \bigtriangledown^2 g - g \bigtriangledown^2 f$
3. $\Delta(fh) = h\Delta f + f \Delta h + 2(\mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(h))$ ή
   $\bigtriangledown^2 (fh) = h \bigtriangledown^2 f + f \bigtriangledown^2 h + 2(\bigtriangledown f \cdot \bigtriangledown h)$

3 Πεδία ειδικής μορφής

i Εαν $\boldsymbol{\overrightarrow{F} = \bigtriangledown f}$, το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **συντηρητικό πεδίο**.

ii Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown \times \overrightarrow{F} = 0}$ το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **αστρόβιλο δ.π.** ή **δ.π. μηδενικού στροβιλισμού**.

iii Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F} = 0}$ το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **ασυμπίεστο δ.π.**

iv Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 f = 0}$ το α.π. f καλείται **αρμονικό α.π.**

Σημειώσεις

α΄Εάν $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ τότε $\overrightarrow{F} \cdot \bigtriangledown = (P, Q, R) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}, R\frac{\partial}{\partial z})$

β΄ Πολλές φορές (στην Φυσική) ο τελεστής $\bigtriangledown$ συμβολίζεται $\overrightarrow{\bigtriangledown}$

Συντομεύσεις

π.ο.= πεδίο ορισμού, π.τ.=πεδίο τιμών, δ.π.=διανυσματικό πεδίο, α.π.=αριθμητικό πεδίο.

ΑνάλυσηII(2010-2011)

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών Ε.Κ.Π.Α