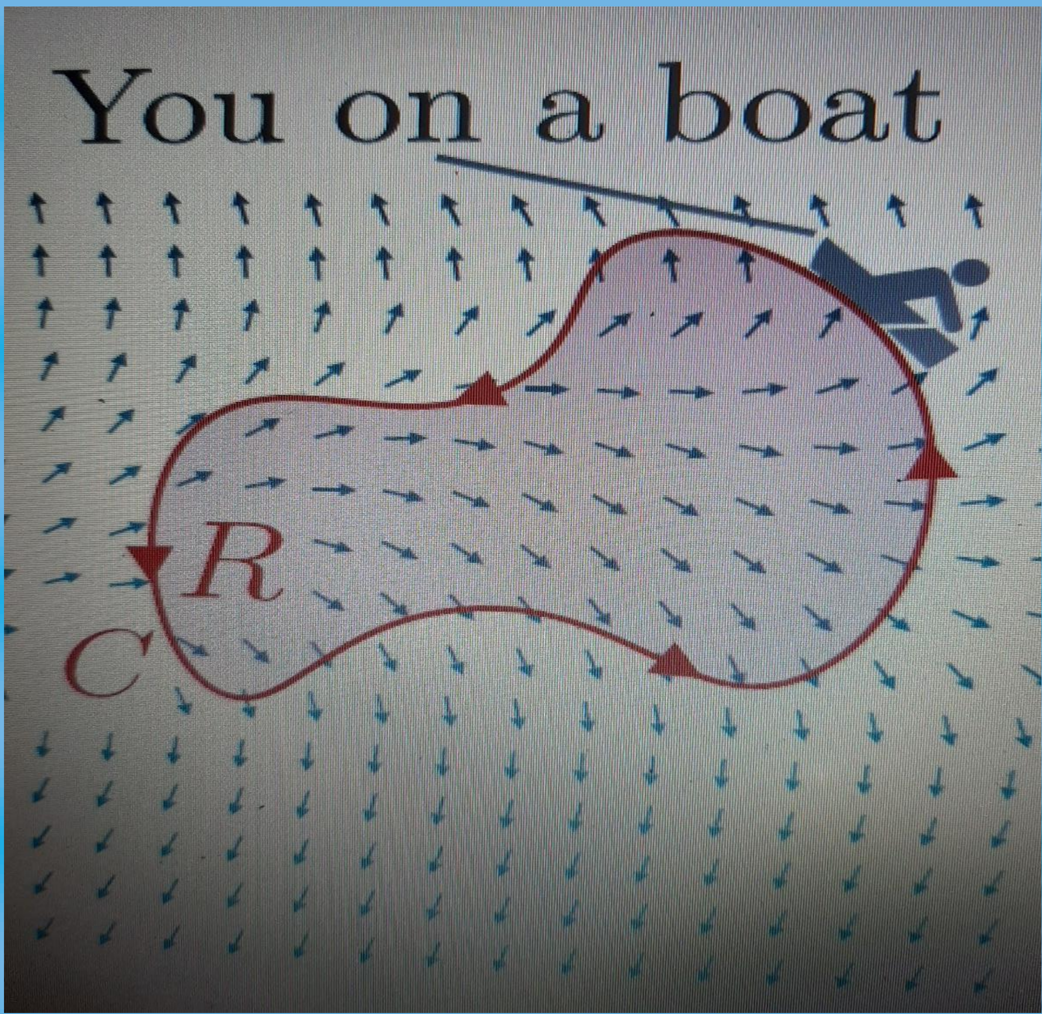
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ GREEN



Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ (2020-2021(Χ)

ΜΑΘΗΜΑ 25 (7-12-20)

(1)

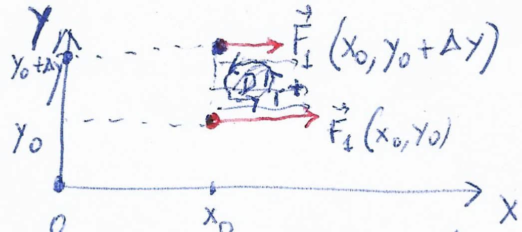
ΚΕΦ 11 Θεωρήματα Green (~1830) στο $\mathbb{R}^2$

Τα Θ. Green αναφέρονται αποκλειστικά σε επίπεδες επιφάνειες. Χωρίς βλάβη μπορούμε να υποθέσουμε ότι το επίπεδο, που κείται μια τέτοια επιφάνεια, είναι το x-y δηλ. $z=0$

Έστω $\vec{F}=(P,Q): A(\subseteq \mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}^2$, C^1 και D επιφάνεια στο A.

$\vec{F}=(P,0)+(0,Q)$

- $\vec{F}_1=(P(x,y),0)$

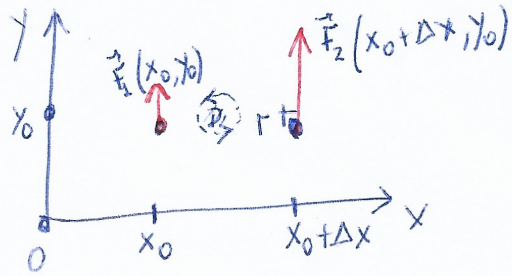


$\vec{F}_1(x_0,y_0+\Delta y)-\vec{F}_1(x_0,y_0)=(P(x_0,y_0+\Delta y)-P(x_0,y_0),0)$

D "μικρή" επιφάνεια: Αν $P(x_0,y_0+\Delta y)<P(x_0,y_0)$, το D θα περιστραφεί με την φορά Γ+, δηλ. το Έργο (Ροή) του $\vec{F}_1>0$ και ανάλογο $-\frac{\partial P}{\partial y}$ (>0)

Για $P(x_0,y_0+\Delta y)>P(x_0,y_0)$, έργο (Ροή) $\vec{F}_1<0$ και ανάλογο $-\frac{\partial P}{\partial y}$ (<0)

- $\vec{F}_2=(0,Q(x,y))$

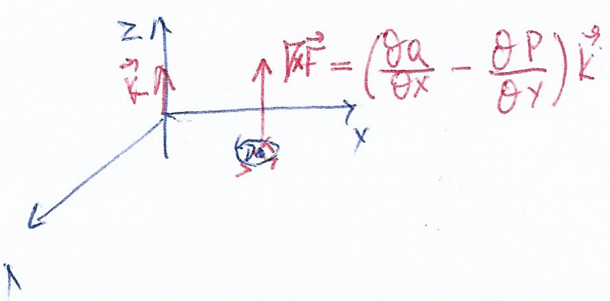


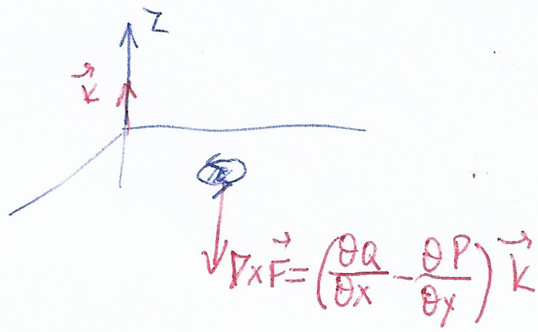
Ανάλογα: αν $\frac{\partial Q}{\partial x}>0$ θα έχουμε έργο του $\vec{F}_2>0$

και $\frac{\partial Q}{\partial x}<0$ θα έχουμε έργο <0

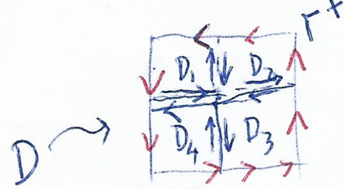
$\vec{F}=(P,Q)=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, αν $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0$ θα έχουμε έργο >0

αν $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}<0$ — — — <0.





Ας πάρουμε περισσότερες "μικρές" επιφάνειες



D_1, D_2, D_3, D_4 με σύνορο $\Gamma_1^+, \Gamma_2^+, \Gamma_3^+, \Gamma_4^+$

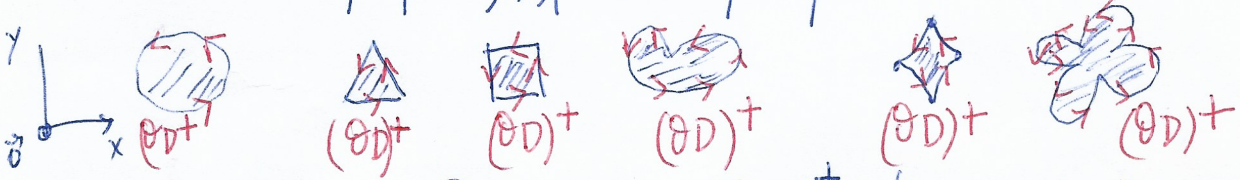
$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ (σχήματος)

το έργο (P,Q) της $\vec{F}=(P,Q)$, $W=\int_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ είναι ανάλογο με το "συνολικό" $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ πάνω στο D, δηλ. το $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$.

A) Θ. Green +

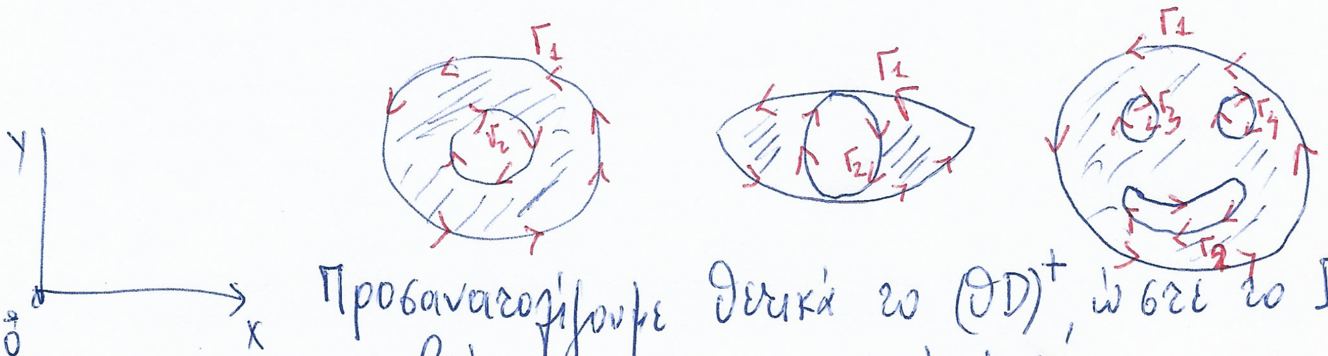
Το θ. Green αναφέρεται αποκλειστικά σε σύνολα D του $\mathbb{R}^2$ ειδικών κατηγοριών:

α) Σύνολο Green : $D \subseteq \mathbb{R}^2$, με σύνορο απλή, κλειστή, C^1 (ή C^1 κατά τμήματα), λεία καμπύλη Γ.



Προσανατολίζουμε θετικά το $(\partial D)^+$, ώστε το D να βρίσκεται στα αριστερά μας. Θετικός προσανατολισμός ως προς D

β) Στοιχειώδες Σύνολο Green : $D \subseteq \mathbb{R}^2$, με σύνορο απλές, κλειστές, C^1 (ή C^1 κατά τμήματα), λείες καμπύλες (τουλάχιστον 2, πεπερασμένο το πλήθος τους)



Προσανατολίζουμε θετικά το $(\partial D)^+$, ώστε το D να βρίσκεται στα αριστερά μας.

Θετικός προσανατολισμός ως προς D

Θεώρημα Green

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, Στοιχειώδες σύνολο Green
$\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P, Q)$, C^1 συνάρτηση. Τότε

$$\boxed{\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.}$$

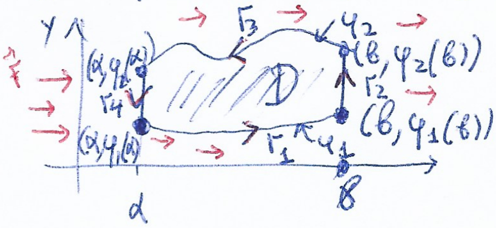
ή, σε Διανυσματική μορφή

$$\boxed{\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k}\; dx\,dy. \quad \Big| \; \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

Απόδειξη (για D απλό σύνολο)

→ $\vec{F} = (P, 0)$, $D = \{(x,y) : \alpha \le x \le \beta,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ (φ_1, φ_2 C^1)

Το ∂D^+ αποτελείται από τις



$\|x -$απλό

- Γ_1: $\vec{r}_1(t) = (t, \varphi_1(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$
  $\vec{r}_1\,'(t) = (1, \varphi_1'(t))$

  $$I_1 = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta (P(t, \varphi_1(t)), 0) \cdot (1, \varphi_1'(t))\, dt = \int_\alpha^\beta P(t, \varphi_1(t))\, dt \quad (1)$$

- Γ_2: $\vec{r}_2(t) = (\beta, t)$, $t \in [\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta)]$
  $\vec{r}_2\,'(t) = (0, 1)$

  $$I_2 = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta (P(\beta, t), 0) \cdot (0, 1)\, dt = \int_\alpha^\beta 0\, dt = 0 \quad (2).$$

- Γ_3: $\vec{r}_3(t) = (\alpha + \beta - t, \varphi_2(\alpha + \beta - t))$, $t \in [\alpha, \beta]$
  $\vec{r}_3\,'(t) = (-1, -\varphi_2'(\alpha + \beta - t))$

  $$I_3 = \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta (P(\alpha+\beta-t, \varphi_2(\alpha+\beta-t)), 0) \cdot (-1, -\varphi_2'(\alpha+\beta-t)) = -\int_\alpha^\beta P(\alpha+\beta-t, \varphi_2(\alpha+\beta-t))\, dt \quad (3)$$

- Γ_4: $\vec{r}_4(t) = (\alpha, \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta) - t)$, $t \in [\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)]$, $\int_{\Gamma_4} (P, 0) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4)$

Άρα, $J_1=\int_{\partial D^+}(P,0)\cdot d\vec{r} = I_1+I_2+I_3+I_4 = \int_a^b \left[P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t))\right]dt$

$$J_2 = -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]dy\right)dx \overset{\text{ΘΘΑΛ}}{=} \text{(!!)}$$

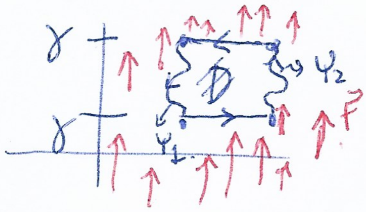
$$= -\int_a^b \left[P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\right]dx$$

Άρα, $J_1 = J_2$, $\int_{\partial D^+}(P,0)\cdot d\vec{r} = -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy$ (*)

Ανάλογα

→ $\vec{F}=(0,Q)$, $D=\{(x,y):\ \gamma\le y\le \delta,\ \ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$ (ψ_1,ψ_2 C^1)

$\int_{(\partial D)^+}(0,Q)\cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy$ (**)



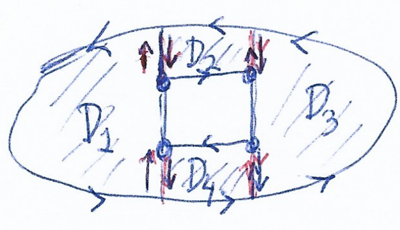
|| y-απλό

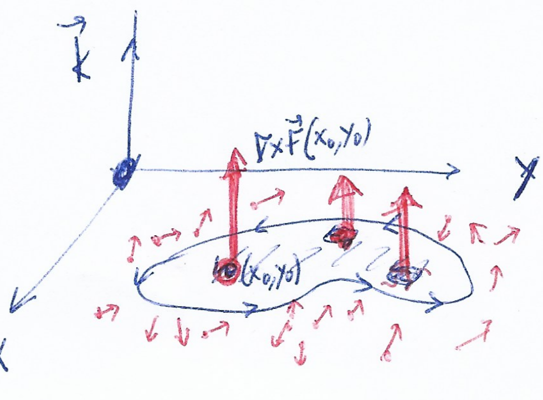
→ Για $\vec{F}=(P,Q)=(P,0)+(0,Q)$ έχουμε από (*), (**)

$$\oint_{\partial D^+}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

όπου D είναι x-απλό και y-απλό.

Για σύνολα που δεν είναι απλά, αλλά είναι Στοιχειώδη Σύνολα Green, η απόδειξη γίνεται με χωρισμό σε απλά.





Εφαρμογές Θ. Green

1) Υπολογισμός Επικαμπυλίου Ολοκληρώματος με την βοήθεια διπλού Ολοκληρώματος

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

για Γ C^1 απλή, ΚΛΕΙΣΤΗ, λεία, $\Gamma = \partial D$, Γ καμπύλη του x-y

όταν το $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ είναι δυσκολότερο από το $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.

2) Υπολογισμός Εμβαδού $A(D)$ με την βοήθεια Επικ. Ολοκλ.

όταν το $A(D)=\iint_D 1\,dx\,dy$ είναι δυσκολότερο από το $\oint_{(\partial D)+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

για $\vec{F}$ κατάλληλη, ώστε $\oint_{(\partial D)+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D 1\,dx\,dy$. (*) // $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Πώς γίνεται;

Ζητάμε $\vec{F}=(P,Q)$ ώστε $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

πχ. $\vec{F}=(0,x)$ ή $\vec{F}=(-y,0)$ ή $\vec{F}=\frac{1}{2}(-y,x)$,

$$\boxed{A(D) \overset{(*)}{=} \oint_{\partial D+} (0,x)\cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D+} (-y,0)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\oint_{\partial D+} (-y,x)\cdot d\vec{r}}$$

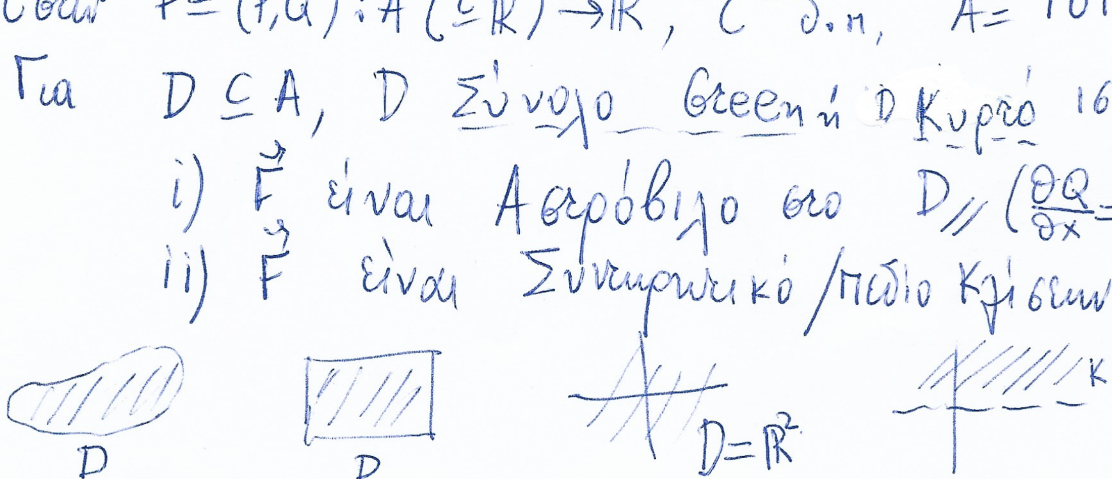
3) Μελέτη Αστρόβιλων Δ.Μ στον $\mathbb{R}^2$

(α) Έστω $\vec{F}=(P,Q): A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, C^1 δ.π., A= ΤΟΠΟΣ

Για $D \subseteq A$, D Σύνολο Green ή D Κυρτό ισοδυναμία

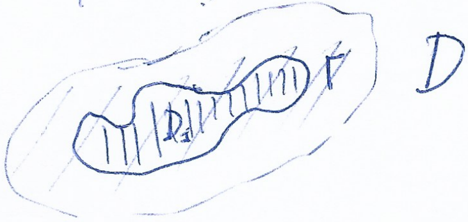
i) $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο στο D // $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ στο } D\right)$

ii) $\vec{F}$ είναι Συντηρητικό/πεδίο Κλίσεων στο D //



Απόδ. ii) ⇒ i) Ισχύει στο A (Μάθημα 24)

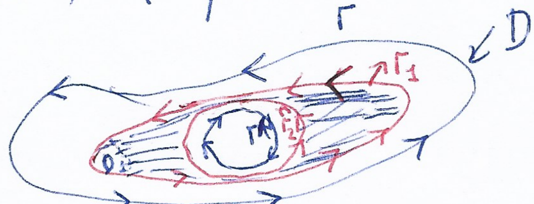
i) ⇒ ii) Έστω Γ ΚΛΕΙΣΤΗ, απλή, C^1, λεία καμπύλη του D



$\Gamma = \partial D_1$ $\quad \oint_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0.$

Άρα, (Μάθημα 24), το $\vec{F}$ είναι Συντηρ. Δ.Π στο D.

(β) Έστω $\vec{F} = (P, Q)$ Αστρόβιλο Δ.Π., ορισμένο σε Στοιχειώδες σύνολο Green D που έχει σύνορο τις Γ, Γ^*



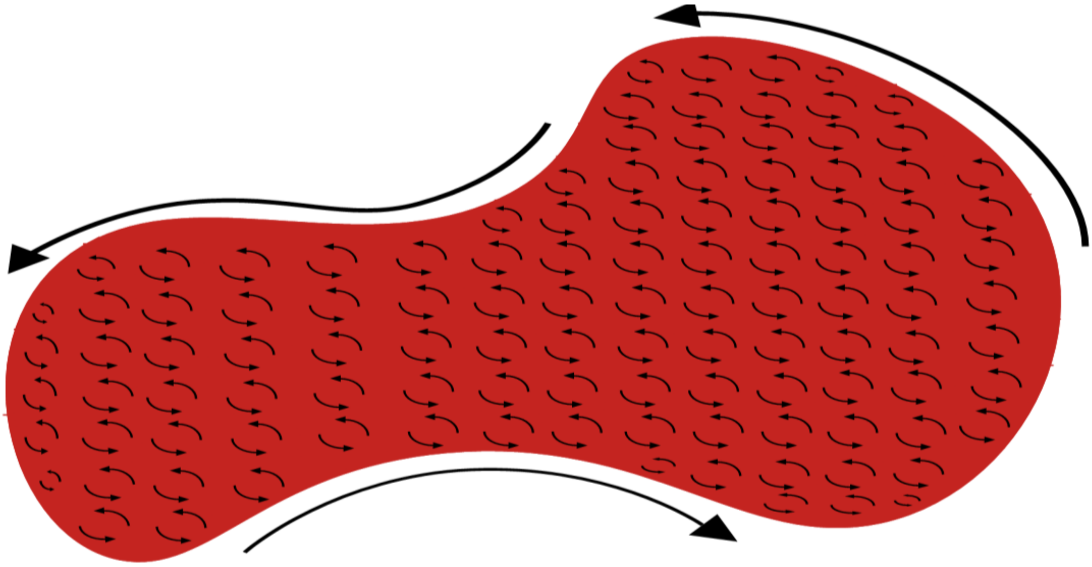
Παίρνουμε Γ_1, Γ_2 καμπύλες (κλειστές, C^1, απλές, λείες) ώστε $\varepsilon\sigma\Gamma^* \subseteq \varepsilon\sigma\Gamma_2 \subseteq \varepsilon\sigma\Gamma_1 \subseteq \varepsilon\sigma\Gamma$

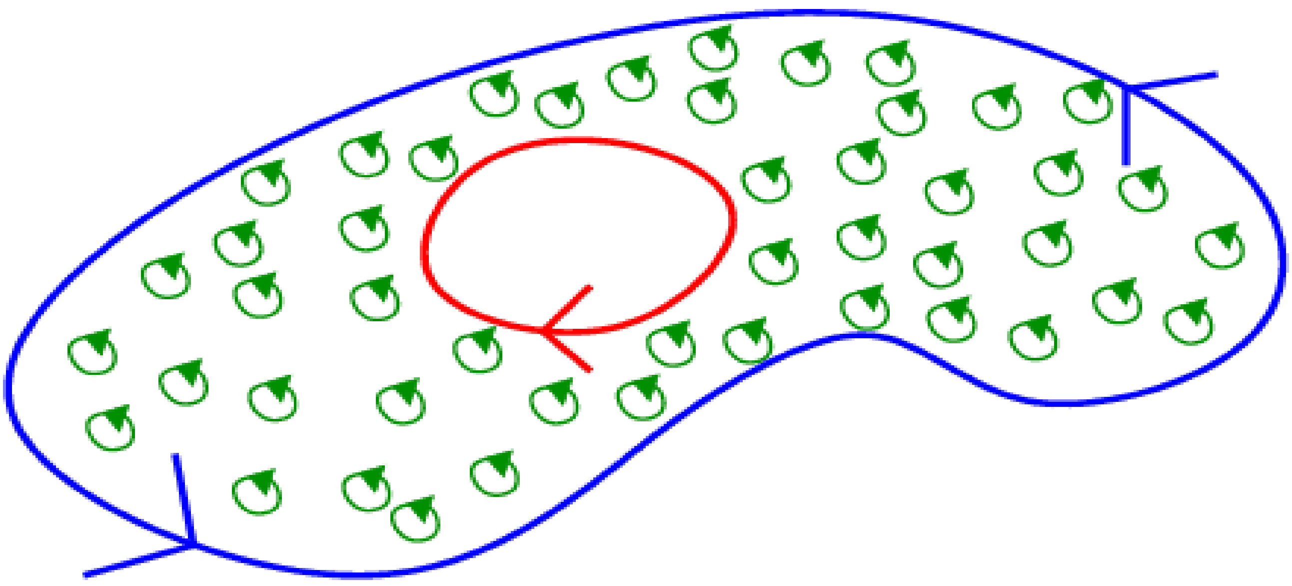
Τότε $\oint_{\Gamma_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (+, αντίθετος των δεικτών ωρολογίου)

$0 = \iint_{D_1 = \varepsilon\sigma\Gamma_1 \cap \varepsilon\xi\Gamma_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k}\, dx\,dy = \oint_{\partial D_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Άρα, $\int_{\Gamma_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ //

Το Θ. Green * είναι ειδική περίπτωση του Θ. Stokes για Επιφάνειες D του x-y επιπέδου.





Θεώρημα Green

(B) Θ. Απόκλισης στον $\mathbb{R}^2$ (Green)

Έστω $D\,(\subseteq \mathbb{R}^2)$, στοιχειώδες σύνολο Green
$\vec{F}: D \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}=(P,Q)$, C^1 συνάρτηση. Τότε

$$\boxed{\oint_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot\vec{N}\, ds = \iint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dx\, dy}\quad , \quad \vec{r}(t)=(x(t),y(t))$$

όπου, $\vec{N}(t)=\dfrac{(y'(t),-x'(t))}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$, $\operatorname{div}\vec{F}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ | $\vec{N}(t)\perp\vec{T}(t)$

Απόδ. Θέτουμε $\vec{F}_1=(-Q,+P)=(P_1,Q_1)$, $\vec{F}\cdot\vec{F}_1=0$
Εφαρμόζουμε στην $\vec{F}_1$ το Θ. Green:

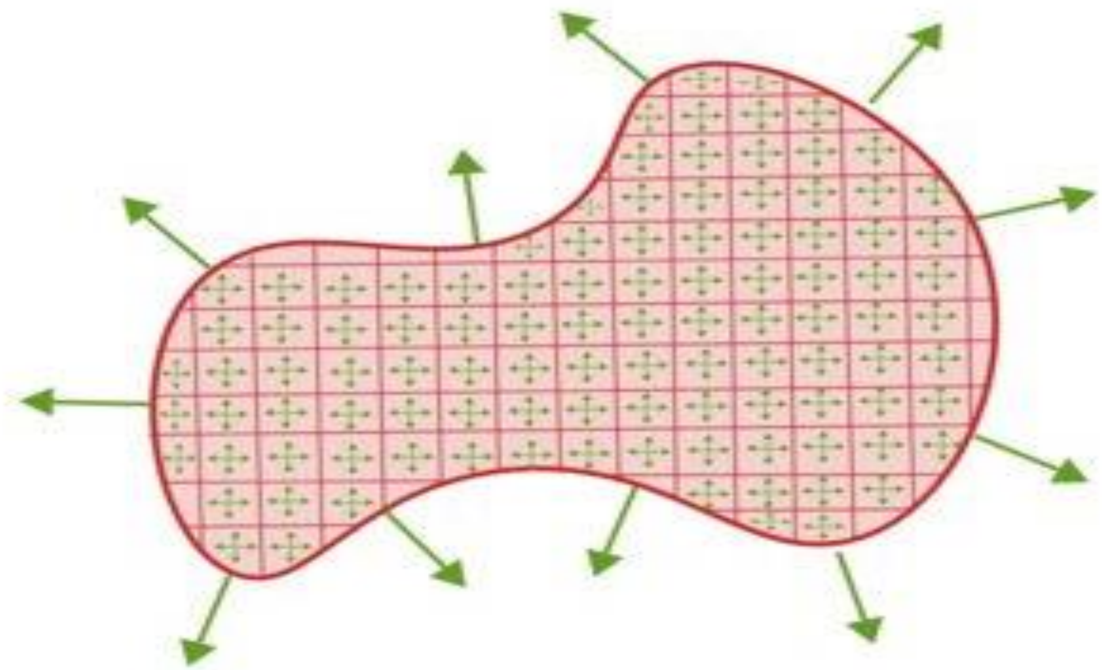
$$\oint_{(\partial D)^+} \vec{F}_1\cdot\vec{T}\, ds = \iint_D (\nabla\times\vec{F}_1)\cdot\vec{k}\, dx\, dy \qquad (*)$$

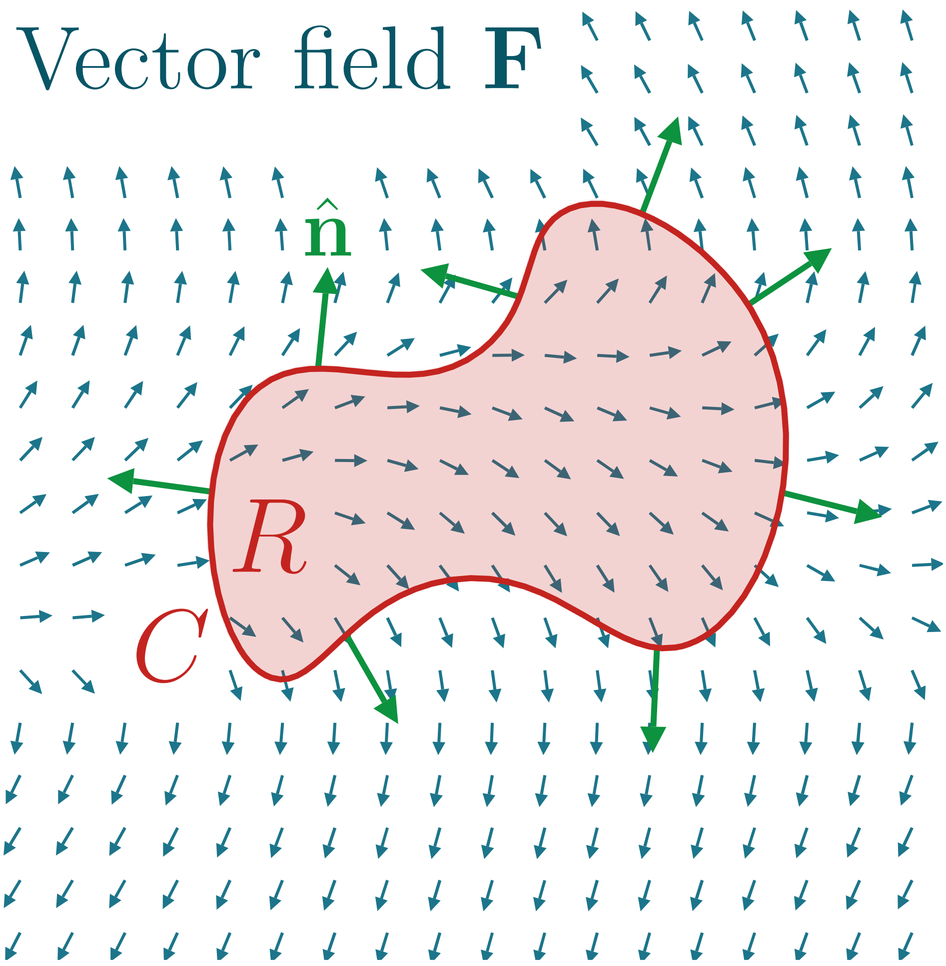
$$\begin{cases} \vec{F}_1\cdot\vec{T}=(P_1,Q_1)\cdot\dfrac{(x'(t),y'(t))}{\|\vec{r}\,'(t)\|}=\dfrac{1}{\|\vec{r}\,'(t)\|}\cdot(-Q\cdot x'(t)+P\cdot y'(t))=\vec{F}\cdot\vec{N} \\ (\nabla\times\vec{F}_1)\cdot\vec{k}=\dfrac{\partial Q_1}{\partial x}-\dfrac{\partial P_1}{\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\operatorname{div}\vec{F} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην $(*)$ έχουμε $\oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot\vec{N}\, ds = \iint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dx\, dy$. —

Το Θ. Απόκλισης είναι ειδική περίπτωση του Θ. Gauss για "στερεό" D του x-y επιπέδου.

Θεώρημα της Απόκλισης (Green)

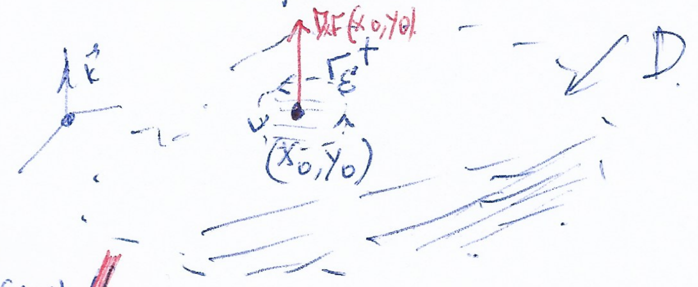




Φυσική ερμηνεία του Στροβιλισμού και της Απόκλισης στον $\mathbb{R}^2$

$\vec{F}=(P,Q)$ C^1, D στ. σύνολο Green.

i) Έστω $(x_0,y_0)\in D\setminus\partial D$ και $B_\varepsilon=B((x_0,y_0),\varepsilon)\subseteq D$, $\Gamma_\varepsilon^+=\partial B_\varepsilon^+$



Έστω $\varepsilon>0$

- $\varphi(x,y)=\nabla\times\vec{F}(x,y)\cdot\vec{k}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x,y)}$

  φ συνεχής, υπάρχει $\delta>0$: $|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ για $(x,y)\in B_\delta$ $(*)$

- $\varphi(x_0,y_0)=\varphi(x,y)+[\varphi(x_0,y_0)-\varphi(x,y)]$

  Ολοκληρώνουμε στην B_t, $0<t<\delta$

$$\iint_{B_t}\varphi(x_0,y_0)=\iint_{B_t}\varphi(x,y)+\iint_{B_t}[\varphi(x_0,y_0)-\varphi(x,y)]\overset{\Theta.\ \text{Green}}{=}\oint_{B_t^+}\vec{F}\cdot\vec{T}+\iint_{B_t}[\varphi(x_0,y_0)-\varphi(x,y)]$$

Άρα, $\left|\varphi(x_0,y_0)A(B_t)-\oint_{B_t^+}\vec{F}\cdot\vec{T}\right|\overset{*}{\le}\frac{\varepsilon}{2}A(B_t)$,

$$\left|\nabla\times\vec{F}(x_0,y_0)\cdot\vec{k}-\frac{1}{A(B_t)}\int_{B_t^+}\vec{F}\cdot\vec{T}\right|<\varepsilon \quad \text{για } 0<t<\delta$$

Άρα, $\nabla\times\vec{F}(x_0,y_0)\cdot\vec{k}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{A(B_t)}\oint_{B_t^+}\vec{F}\cdot\vec{T}$ / $B_t=B((x_0,y_0),t)$ (i)

- $\vec{F}=$ πεδίο ταχυτήτων ρευστού, $\oint_{\partial D^+}\vec{F}\cdot T$ περιγράφει την ποσότητα του ρευστού που κυκλοφορεί πάνω στην ∂D^+. Το $\oint_{B_t^+}\vec{F}\cdot\vec{T}$ είναι μέτρο "περιστροφικής τάσης" του ρευστού στο σημείο (x_0,y_0)
- Οπότε, η (i) μας δίνει, ότι η συνιστώσα του Στροβιλισμού στο (x_0,y_0) κατά την διεύθυνση $\vec{k}\perp D$, είναι μέτρο στροβιλισμού ανά μονάδα εμβαδού, στη μονάδα του χρόνου, στο σημείο (x_0,y_0)

ii) $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot(P,Q) \overset{\text{op}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ καλείται <u>Απόκλιση του $\vec{F}$</u>

Χρησιμοποιώντας το Θ. Απόκλισης (Green), εργαζόμενοι ανάλογα με το i) θα έχουμε

$$\operatorname{div}\vec{F}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{A(B_t)} \oint_{\partial B_t^+} \vec{F}\cdot\vec{N} \qquad \underline{(ii)}$$

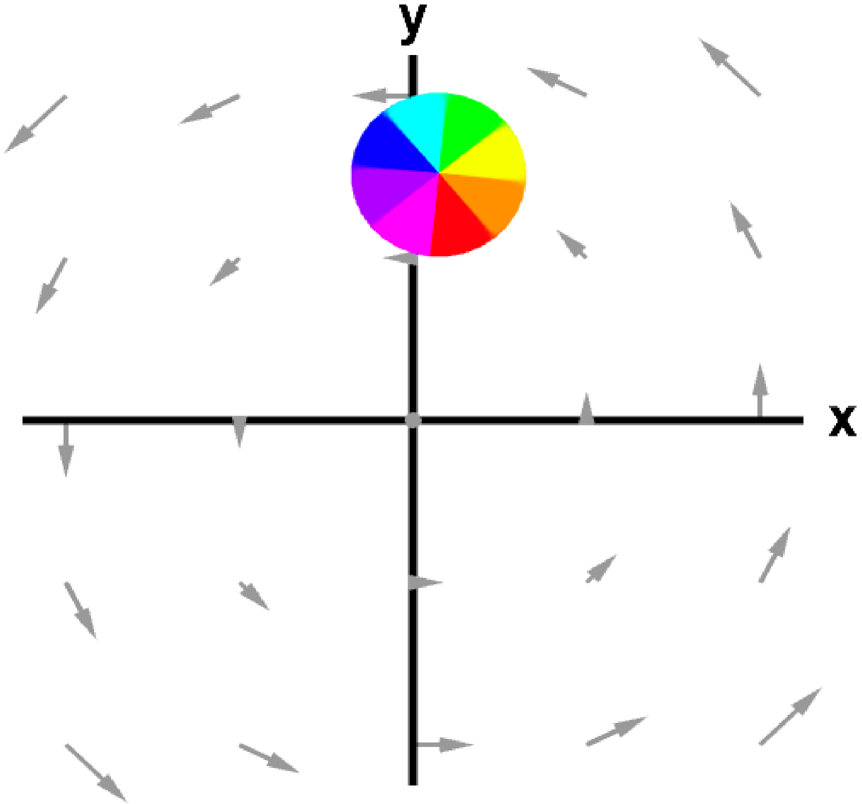
$(B_t = B((x_0,y_0), t))$

• $\vec{F}$ = πεδίο ταχυτήτων ρευστού, $\oint_{(\partial D)^+} \vec{F}\cdot\vec{N}$ περιγράφει την ποσότητα του ρευστού που εισρέει ή εκρέει δια μέσου της καμπύλης $(\partial D)^+$.

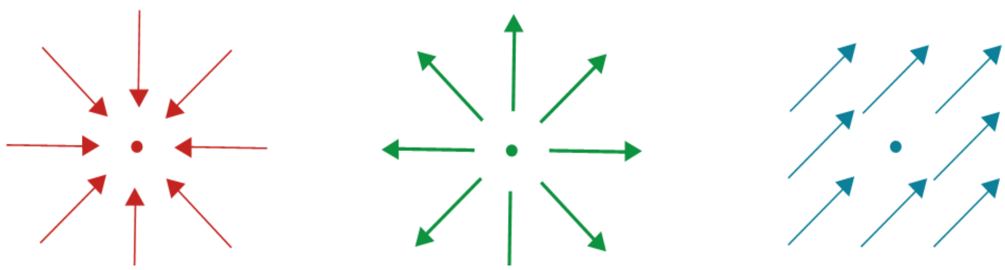
Το $\oint_{B_t^+} \vec{F}\cdot\vec{N}$ είναι "μέτρο εισροής ή εκροής" του ρευστού στο (x_0,y_0)

• Οπότε, η (ii) μας δίνει ότι, η <u>απόκλιση $\operatorname{div}\vec{F}(x_0,y_0)$</u> είναι η ποσότητα του ρευστού, που εισρέει ή εκρέει, ανά μονάδα εμβαδού, στη μονάδα του χρόνου, στο σημείο (x_0,y_0)

Στροβιλισμός



$\mathrm{div}\,\mathbf{F} < 0$ $\mathrm{div}\,\mathbf{F} > 0$ $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$



Απόκλιση