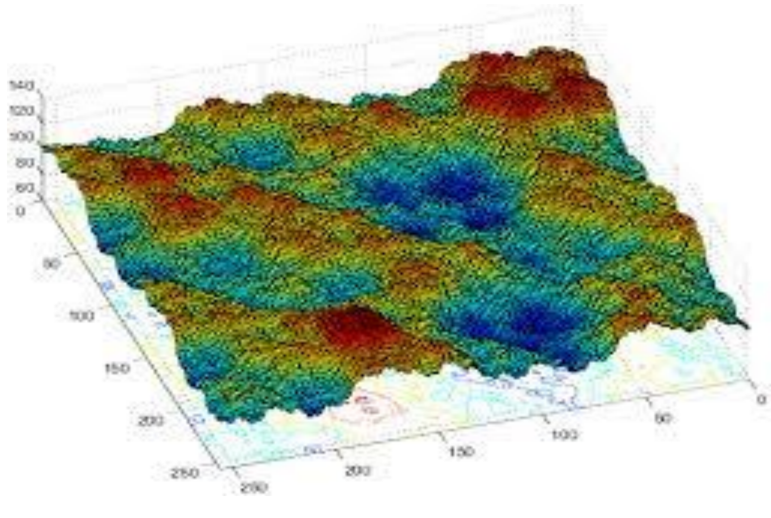
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ως Γράφημα Συνεχούς συνάρτησης, πουθενά Διαφορίσιμης



Μάθημα 23 (2-12-2020)

Ασκήσεις (Ι)

1) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=a^2\}$ $(a>0)$.

$\vec{r}(\theta,\varphi)=(a\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ a\,\eta\mu\varphi\,\eta\mu\theta,\ a\,\sigma\upsilon\nu\varphi)$, $(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$

$(\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi)(\theta,\varphi)=-a\,\eta\mu\varphi\,\vec{r}(\theta,\varphi)$, $\|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi\|(\theta,\varphi)=a^2\eta\mu\varphi$ $(>0,\ \varphi\in(0,\pi))$

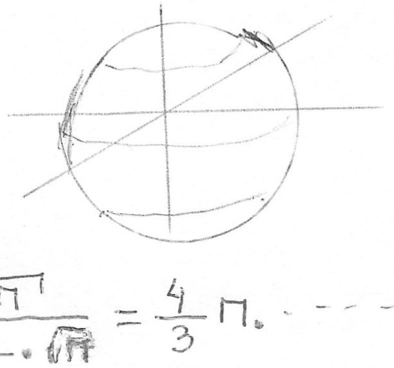
$$A(S)=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}a^2\eta\mu\varphi\,d\varphi\right)d\theta=2\pi a^2\int_0^{\pi}\eta\mu\varphi\,d\varphi=4\pi a^2$$

Σχόλιο: Αποδεικνύεται επαγωγικά και με την βοήθεια του Θ. Fubini ότι $V_d(B(\vec{0},1))=\dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$

όπου $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt$. Ισχύουν $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\nu+1)=\nu!$ $(\nu\in\mathbb{N})$, $x>0$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

- $d=1$, $V_1([-1,+1])=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=2$
- $d=2$, $V_2(B(\vec{0},1))=\dfrac{\pi}{\Gamma(2)}=\pi$
- $d=3$, $V_3(B(\vec{0},1))=\dfrac{\pi^{3/2}}{\Gamma(1+\frac{3}{2})}=\dfrac{\pi\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}=\frac{4}{3}\pi$. ....



Για K = κυρτό+συμπαγές το εμβαδόν επιφανείας του, ορίζεται

$$A(\partial K)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{V_d(K+\varepsilon B(\vec{0},1))-V_d(K)}{\varepsilon}.$$

Για $K=B(\vec{0},1)$, $A(\partial B(\vec{0},1))=d\,V_d(B(\vec{0},1))$ $(B(\vec{0},1)+\varepsilon B(\vec{0},1)=(1+\varepsilon)B(\vec{0},1))$

- $d=2$ μήκος περιφ. κύκλου $B((0,0),1)$ είναι $2\cdot\pi$
- $d=3$ εμβαδόν επιφανείας της $B((0,0,0),1)$ είναι $3\cdot(\frac{4}{3}\pi)=4\pi$.

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν επιφάνειας S_k του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$
$0\le z\le 1$.

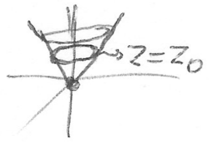
α' τρόπος: $\vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\le 1$

$$A(S_k)=\iint_{x^2+y^2\le 1} 1\cdot \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy}_{dS}=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}\right)^{1/2}dx\,dy=\sqrt{2}\cdot\pi$$

(εμβαδόν κύκλου, ακτ. 1)

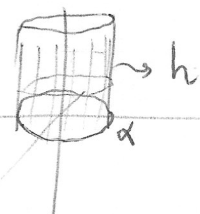
β' τρόπος: $\vec{r}(\theta,z)=(z\cos\theta, z\sin\theta, z)$, $(\theta,z)=[0,2\pi]\times[0,1]$

$\|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_z\|=\sqrt{2}\,z$



$$A(S_k)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2}\,z\,dz\,d\theta=2\pi\cdot\sqrt{2}\left(\frac{z^2}{2}\right|_0^1=\sqrt{2}\cdot\pi$$

3) Να υπολογιστεί το εμβαδόν επιφάνειας S του κυλίνδρου βάσης ακτίνας α, ύψους h.



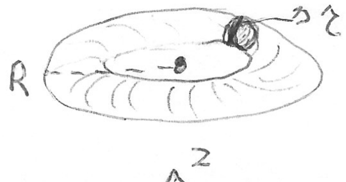
$\vec{r}(\theta,z)=(a\cos\theta, \alpha\sin\theta, z)$, $(\theta,z)\in[0,2\pi]\times[0,h]$

$\|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_z\|=\alpha$

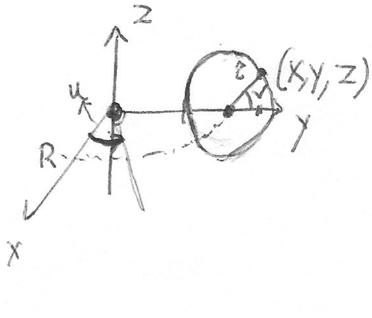
$$A(S)=\int_0^h\left(\int_0^{2\pi}\alpha\,d\theta\right)dz=\int_0^h(2\pi\alpha)\,dz=2\pi\alpha h$$

4) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του Torus/Ντόνατς/Σαμπρέλας/S
$(0<r<R)$

$$\begin{cases} x=\cos u\,(R-r\sin v)\\ y=\sin u\,(R-r\sin v)\\ z=r\cos v\end{cases}\qquad (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$$



$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v))$



Με πράξεις $(\dots)$, $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|(u,v) = r(R - r\,\eta\mu v)$

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R - r\,\eta\mu v)\,du\,dv = 4\pi^2 R r = (2\pi r)(2\pi R)$$

<u>Σχόλιο</u> $A(S)$ είναι το εμβαδόν Κυλίνδρου βάσης ακτίνας r, ύψους $h = 2\pi R$

---

5) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του παραβολοειδούς $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ που αποκόπτεται από τον κύλινδρο $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$. (Λημνίσκος Bernoulli)

Λόγω Συμμετρίας, υπολογίζουμε*:

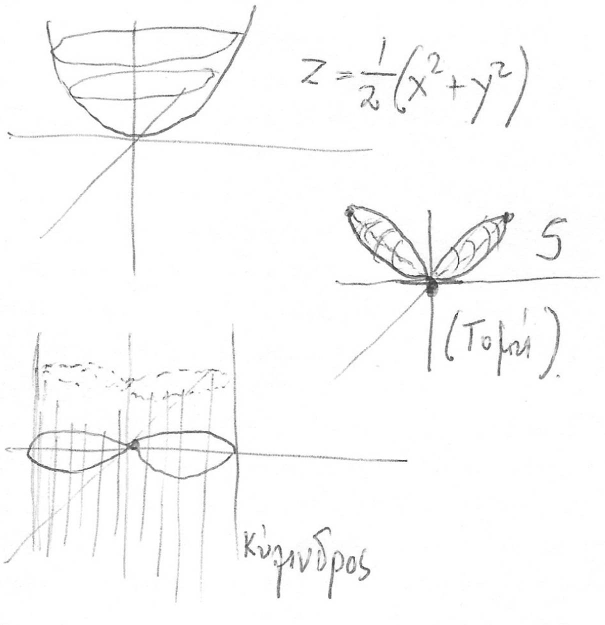
$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $x, y \geq 0$

$\vec{r}(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$

$\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,(x,y) =$

$= \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ όπου

$D = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2,\ x, y \geq 0\}$



Πολικές Συντεταγμένες

$x = r\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = r\,\eta\mu\theta$, $x, y \geq 0$ // Λημνίσκος $\begin{cases} r^4 = r^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta) \\ r^2 = \sigma\upsilon\nu 2\theta > 0 \ (*) \end{cases}$

$D = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta},\ 0 \leq \theta \underset{(*)}{\leq} \frac{\pi}{4}\}$

$$A(S) \underset{*}{=} 4\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}} \sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr\right)d\theta = \frac{4}{3}\int_0^{\pi/4}\left(2^{3/2}\sigma\upsilon\nu^3\theta - 1\right)d\theta =$$

$$= \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3}$$

Παραμετρική εξίσωση

$\vec{r}(\theta) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu^2\theta}, \frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu^2\theta}\right)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

Ασκήσεις (ΙΙ)

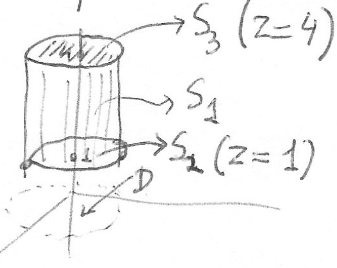
6) $I=\iint_{S_K} z^2\, dS$, όπου S_K η επιφάνεια του κώνου

$K=\{(x,y,z):\ \underset{(*)}{z=\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ x^2+y^2\le 1\}$, $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\}$

$dS=\sqrt{2}\,dx\,dy$ (βλ. Ασ(Ι), 2))

$$I\overset{(*)}{=}\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy \xrightarrow[y=r\,\eta\mu\theta]{x=r\,\sigma\upsilon\nu\theta} \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\sqrt{2})\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

7) Να υπολογιστεί το επιφ. ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)=z(x^2+y^2)$ στην (κλειστή) επιφάνεια S_K του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ με βάσεις στα επίπεδα $z=1$, $z=4$



• S_1 : $\vec{r}(\theta,z)=(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta,z)$, $(\theta,z)\in[0,2\pi]\times[1,4]=D$

$f(\vec{r}(\theta,z))=z$, $\|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_z\|=1$ (Μαθ. 22)

Άρα $I_1=\iint_{S_1} f\,dS=\iint_D z\cdot 1\,d\theta\,dz=\int_0^{2\pi}\int_1^4 z\,dz\,d\theta=15\pi$

• S_2 : $\vec{r}(r,\theta)=(r\,\sigma\upsilon\nu\theta, r\,\eta\mu\theta, 1)$, $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$

$f(\vec{r}(r,\theta))=r^2$, $\|\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta\|=r$

Άρα $I_2=\iint_{S_2} f\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}$

• S_3 : $\vec{r}(r,\theta)=(r\,\sigma\upsilon\nu\theta, r\,\eta\mu\theta, 4)$, $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$

$f(\vec{r}(r,\theta))=4\cdot r^2$, $\|\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta\|=r$.

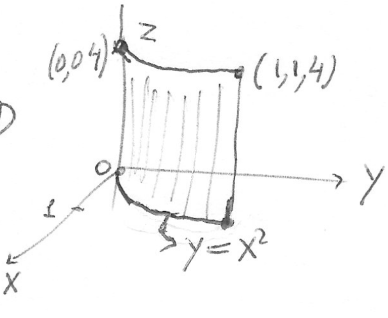
Άρα $I_3=\iint_{S_3} f\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^1(4r^2)\,r\,dr\,d\theta=2\pi$

Τελικά $\iint_{S_K} f\,dS=I_1+I_2+I_3=\frac{35}{2}\pi$

Ασκήσεις (III)

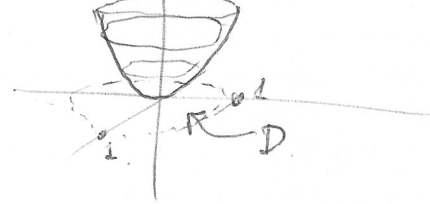
8) $I=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, $\vec{F}(x,y,z)=(yz,\ x,\ -z^2)$, $S=\{(x,y,z):\ 0\le x\le 1,\ y=x^2,\ 0\le z\le 4\}$

$$\begin{cases} \vec{r}(x,z)=(x,\ x^2,\ z)\ ,\ (x,z)\in[0,1]\times[0,4]=D \\ \vec{r}_x\times\vec{r}_z=(2x,\ -1,\ 0) \\ \vec{F}(\vec{r}(x,z))=(x^2 z,\ x,\ -z^2) \end{cases}$$



$$I=\iint_D \vec{F}(\vec{r}(x,z))\cdot(\vec{r}_x\times\vec{r}_z)\,dx\,dz=\int_0^1\left(\int_0^4(2x^3z-x)\,dz\right)dx=2.$$

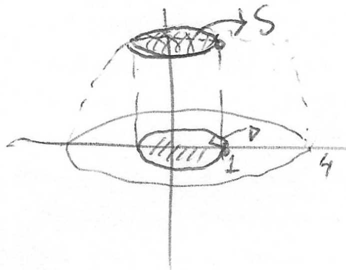
9) $I=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, $\vec{F}(x,y,z)=(-x,\ -y,\ 0)$, S η επιφ. του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$ για $(x,y)\in D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\}$



$$\begin{cases} \vec{r}(x,y)=(x,\ y,\ x^2+y^2),\ \ (x,y)\in D\ ,\ f(x,y)=x^2+y^2 \\ \vec{r}_x\times\vec{r}_y=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},\ -\frac{\partial f}{\partial z},\ 1\right)=(-2x,\ -2y,\ 1) \\ \vec{F}(\vec{r}(x,y))=(-x,\ -y,\ 0) \end{cases}$$

$$I=\iint_D \vec{F}(\vec{r}(x,y))\cdot(\vec{r}_x\times\vec{r}_y)\,dx\,dy=\iint_D(2x^2+2y^2)\,dx\,dy\ \overset{\text{ΠΟΛΙΚΕΣ}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^1(2r^2)\,r\,dr\,d\theta=\pi$$

10) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $\vec{F}=(x,y,z)$ στην επιφάνεια που είναι στο πάνω μέρος του ημισφαιρίου $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ και αποκόπτεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2=1$.



$$S=\{(x,y,z):\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\}$$

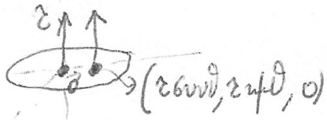
$$\begin{cases} \vec{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}), \quad x^2+y^2\le 1, \quad f(x,y)=(4-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \vec{r}_x\times\vec{r}_y=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1\right) \\ \vec{F}(\vec{r}(x,y))=(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}) \end{cases}$$

$$I=\iint_D \vec{F}(\vec{r}(x,y))\cdot(\vec{r}_x\times\vec{r}_y)\,dx\,dy=\iint_D \frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy \xrightarrow{\text{πολικές}} 4\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{4}{\sqrt{4-r^2}}\cdot r\,d\theta\,dr=$$

$$=8\pi(2-\sqrt{3})$$

---

11) Να υπολογισθεί $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{dS}$, $\vec{F}_1(x,y,z)=(0,0,3x^2+3y^2)$ στην (επίπεδη) επιφάνεια $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ z=0\}$ και το $\int_{\partial S}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}$, $\vec{F}_2(x,y,z)=(-y^3,x^3,0)$



• $$\begin{cases} \vec{r}(r,\theta)=(r\,συνθ,\ r\,ημθ,\ 0), \quad (r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi] \\ \vec{r}_r\times\vec{r}_\theta=(0,0,r) \\ \vec{F}_1(\vec{r}(r,\theta))=(0,0,3r^2) \end{cases}$$

$$I_1=\iint_S \vec{F}_1\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^1(3r^2\cdot r)\,dr\,d\theta=\frac{3}{2}\pi \qquad (1)$$

• $\Gamma=\partial S=\{(συνθ,\ ημθ,\ 0):\ \theta\in[0,2\pi]\}$

$$I_2=\int_\Gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-ημ^3θ,\ συν^3θ,\ 0)\cdot(-ημθ,\ συνθ,\ 0)\,d\theta=\int_0^{2\pi}(ημ^4θ+συν^4θ)\,d\theta=\frac{3\pi}{2} \qquad (2)$$

Αν $\vec{F}_2=(P,Q,R)$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-3y^2$ και $\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2$ $(P=-y^3,\ Q=x^3,\ R=0)$

δηλ. $\vec{F}_1=\left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

Παρατηρούμε ότι (1),(2), $\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot d\vec{S}=\int_{\partial S}(P,Q,0)\cdot d\vec{r}$

Τυχαίο; Όχι (Θ. Green$_{\mathbb{R}^2}$, Θ. Stokes$_{\mathbb{R}^3}$) !!!

12) $\vec{F}(x,y,z)=(+x,+y,+z)=(P,Q,R)$, $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=\alpha^2\}$ $(\alpha>0)$

Να υπολογισεί $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$. Τι παρατηρείτε ;

$$\begin{cases} \vec{r}(\varphi,\theta)=(\alpha\,\text{συν}\theta\,\eta\mu\varphi,\ \alpha\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi,\ \alpha\,\text{συν}\varphi),\quad (\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi] \\ \vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta=\alpha\,\eta\mu\varphi\,\vec{r}(\varphi,\theta) \\ \vec{F}(\vec{r}(\varphi,\theta))=(\alpha\,\text{συν}\theta\,\eta\mu\varphi,\ \alpha\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi,\ \alpha\,\text{συν}\varphi)=\vec{r}(\varphi,\theta) \end{cases}$$

$$I=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\|\vec{r}(\varphi,\theta)\|^2}_{\alpha^2}\alpha\,\eta\mu\varphi\,d\varphi\,d\theta=\alpha^3\cdot 2\pi\cdot 2=3V_3(B(\vec{0},\alpha))$$

Αν πάρουμε $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+1+1=3$

δηλ. $\iint_{\partial B(\vec{0},\alpha)}(P,Q,R)\cdot d\vec{S}=\iiint_{B(\vec{0},\alpha)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$, $\quad S=\partial(B(\vec{0},\alpha))$

Τυχαίο ; ΟΧΙ $\quad$ (Θ. Green $_{\mathbb{R}^2}$, Θ. Gauss $_{\mathbb{R}^3}$) !!!

Σημείωση

1) $\vec{F}=(P,Q,R)$, $\Gamma:\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[\alpha,b]$, $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^b \vec{F}\cdot\vec{r}\,'dt=\int_\alpha^b P\cdot x'(t)\,dt+\int_\alpha^b Q\,y'(t)\,dt+\int_\alpha^b R\,z'(t)\,dt \overset{\text{συμβ.}}{=} \int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

2) $\vec{F}=(P,Q,R)$, $S:\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ $\quad (u,v)\in D$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot(\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v))\,du\,dv=$$

$$=\iint_D P\cdot\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv+\iint_D Q\cdot\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv+\iint_D R\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

$$\overset{\text{συμβ.}}{=}\iint_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$$

ΣΥΝΟΨΗ

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Καμπύλη Γ: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$
$t\in[\alpha,\beta]$

Εφαπτόμενο διάνυσμα

$\vec{r}\,'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

Μοναδιαίο εφ. διάνυσμα

$$\vec{T}(t_0)=\frac{\vec{r}\,'(t_0)}{\|\vec{r}\,'(t_0)\|}$$

Μήκος καμπύλης $\ell(\Gamma)=\int_\alpha^\beta \|\vec{r}\,'(t)\|dt$

Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Επιφάνεια S: $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$
$(u,v)\in D$ (D u-απλό ή v-απλό ή απλό)

Κάθετο διάνυσμα

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}_{(u,v)}$$

Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

$$\vec{N}(u,v)=\frac{(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)(u,v)}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u,v)}$$

Εμβαδόν επιφάνειας $A(S)=\iint_D \|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u,v)\,du\,dv$

$$\boxed{f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}$$

Επικαμπύλιο ολ. της f στην Γ

$$\int_\Gamma f\,ds=:\int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

- f = πυκνότητα, $M=\int_\Gamma f\,ds$ η μάζα του σύρματος Γ

Επιφανειακό ολ. της f στην S

$$\iint_S f\,dS=:\iint_D f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u,v)\,du\,dv$$

- f = πυκνότητα, $M=\iint_S f\,dS$ η μάζα του κελύφους S.

$$\boxed{\vec{F}=(P,Q,R):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}$$

Επικαμπύλιο ολ. της $\vec{F}$ στην Γ

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=:\int_\alpha^\beta F(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

- $\vec{F}$ = πεδίο δυνάμεων, $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ έργο
- $\vec{F}$ = πεδίο ταχυτήτων $I=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ η ροή του $\vec{F}$, κατά μήκος της Γ

Εάν Γ = κλειστή $I=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ η κυκλοφορία του $\vec{F}$ κατά μήκος της Γ

Επιφανειακό ολ. της $\vec{F}$ στην S

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=:\iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)(u,v)\,du\,dv$$

- $\vec{F}$ = πεδίο ταχυτήτων, $I=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ η ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της S, με κατεύθυνση $\vec{N}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν "καλές" προϋποθέσεις για όλα.