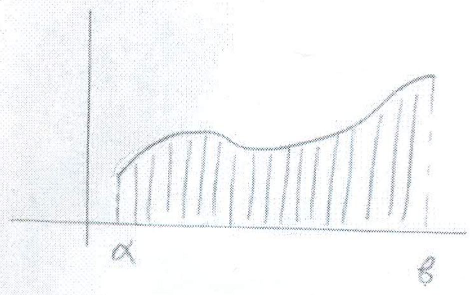
Μάθημα 21ο (27/11/2020)

Κεφ. 8 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα



$\int_\alpha^\beta f = A(f, [\alpha, \beta])$, $f \geq 0$

$\ell([\alpha, \beta]) = (\beta - \alpha)$

Γ: παρ $\vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\vec{r} : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^d$

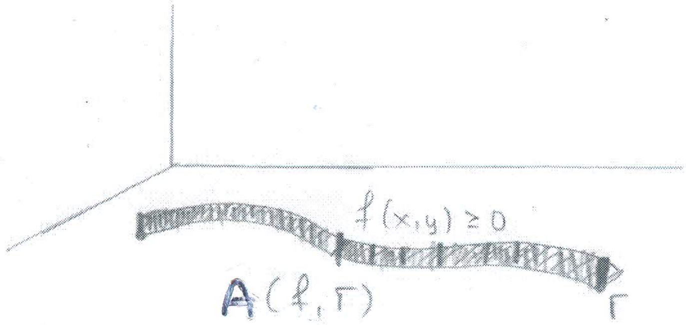
Τι θα θέλαμε να υπολογίσουμε για «καλές» $\vec{r}$

(I) $\ell(\Gamma)$ = μήκος της Γ

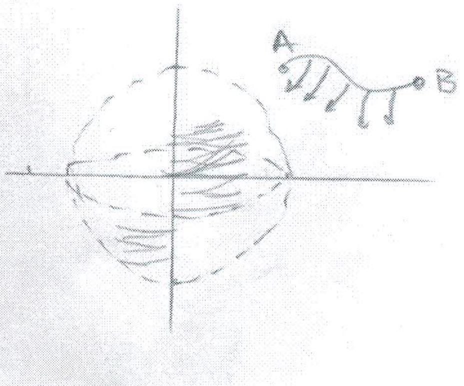
(II) • Γ είναι σε βαθμωτό πεδίο (πχ θερμοκρασίας, πίεσης) να βρούμε το «συνολικό» β.π. πάνω στη Γ, Μέση τιμή

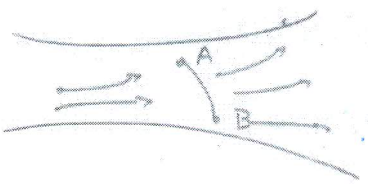
• $\vec{r}(t) \in \Gamma$, $\delta(\vec{r}(t))$ = πυκνότητα μάζας , m = μάζα, ΚΒ , ροπές

• $\mathbb{R}^2$



(III) Γ είναι διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ (πχ. ΔΠ δυνάμεων, Ταχυτήτων, Ροής) Ω έργο/Ροή κατά μήκος Γ





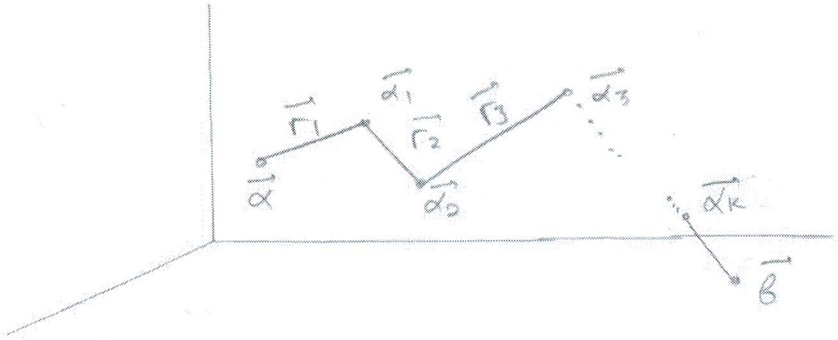
Πώς προσεγγίζουμε τα προβλήματα αυτά;

(I) Γ

$\underline{\underline{\Gamma}}$ $\vec{r}(t) = \vec{\alpha} + t(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$, $t \in [0,1]$

$\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$

$\ell(\Gamma) = \|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\| = \|\vec{r}\,'(t)\|$



$\ell(\Pi) = \sum_{n=1}^{k+1} \|\vec{r}\,'(t)\|$

Γ $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$\Delta = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = \beta\}$

$\Pi_\Delta / \ell(\Pi_\Delta) > 0$

$\ell(\Gamma) =: \sup\{\ell(\Pi_\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}\} \in [0, +\infty)$

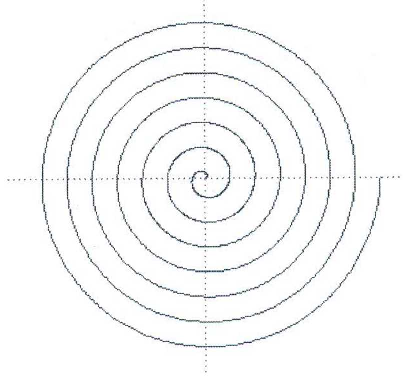
Εάν $\exists\, r'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \|r'(t)\|\,dt$

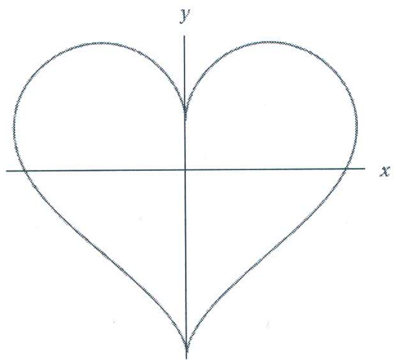
$\underline{\vec{r} = C^1}$

$s(t) = \int_\alpha^t \|r'(z)\|\,dz$ $\qquad \dfrac{ds(z)}{dz} = \|\vec{r}\,'(z)\|$ $\qquad \ell(\Gamma) = \int_\Gamma ds$

(Ολοκλήρωμα Riemann Stieltjes / Απει I, Νγρ. Γ-Π)

Spiral of Archimedes

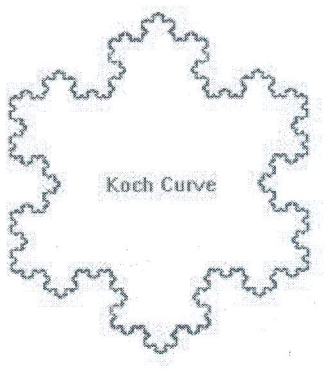




$x(t) = 16\sin^3(t)$

$y(t) = 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t)$

(plotted for t from $-\pi$ to π)



Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

(I) Μήκος καμπύλης (παραμετρημένης)

Γ $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$\Delta \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}$, $\ell(\Pi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|$

$\Delta = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta\}$

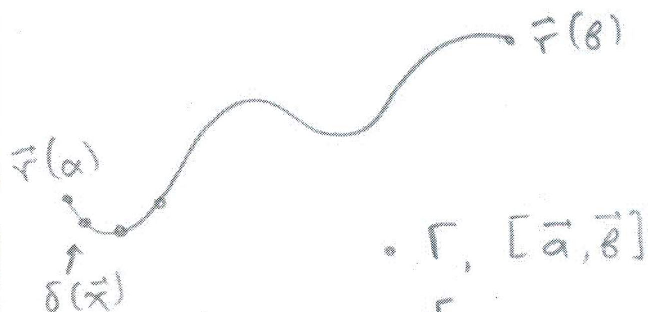
$\ell(\Gamma) = \sup\{\ell(\Pi_\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}\} \in (0, +\infty]$

$\vec{r} = C^1$, $\ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \|r'(t)\|\, dt$ / $s(t) = \int_\alpha^t \|r'(\tau)\|\, d\tau$

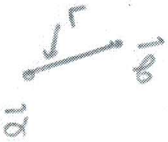
(II) Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Βαθμωτής/Αριθμητικής Συνάρτησης Πεδίου.

$f : A\,(\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ (πχ. θερμοκρασία, Πίεση, Πυκν. Μάζας)

$\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\Gamma \subseteq A$.



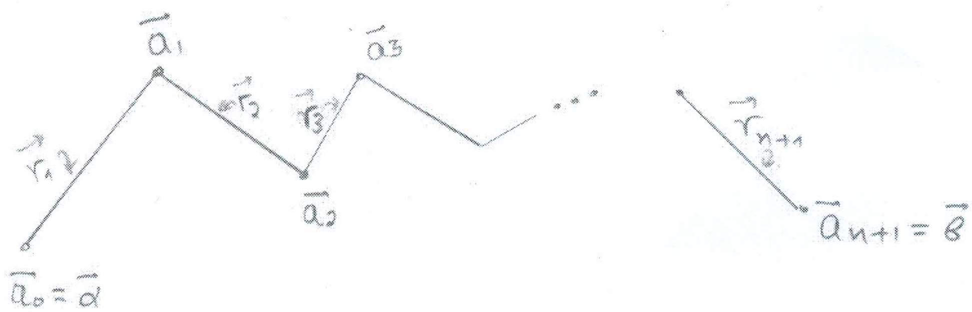
• Γ, $[\vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{r}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ $t \in [0, 1]$



η μάζα της Γ / $m = c\|\vec{b} - \vec{a}\|$ (Συνολική μάζα)

$\delta(\vec{x}) = c$, $\vec{x} \in \Gamma$ / $= c\|\vec{r}'(t)\|$

• Π, $[\vec{a}_0 = \vec{\alpha}, \vec{a}_1] \cup [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2] \cup \ldots \cup [\vec{a}_n, \vec{a}_{n+1} = \vec{\beta}]$



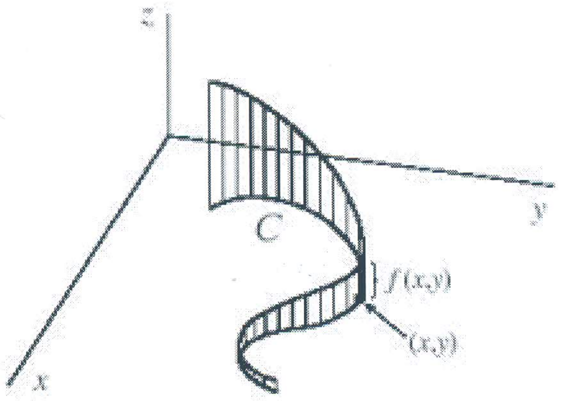
$$m = \sum_{i=1}^{n+1} \delta(\vec{r}_i(t)) \cdot \|\vec{r}_i{}'(t)\| \quad (\text{Συνολική μάζα})$$

$\vec{r}_i$ περ. $[\vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i]$

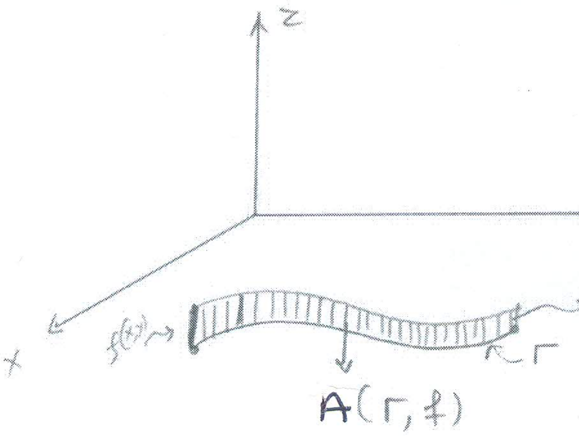
Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\vec{r} = C^1$

$$m = \int_\Gamma f\, ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

f = συνεχής



$\underline{d=2}$



$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in\Gamma,\ 0\le z\le f(x,y)\} =$
$=$ Κυλινδρική επιφάνεια.

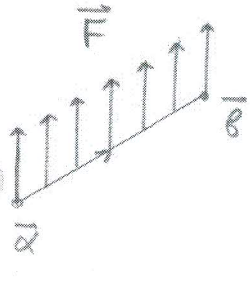
$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2,\ f\ge 0$

$A(\Gamma, f) = \int_\Gamma f\, ds$

III Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Διανυσματικού Πεδίου

- $\Gamma,\ [\vec{\alpha},\vec{b}],\ \vec{r}(t)=\vec{\alpha}+t(\vec{b}-\vec{\alpha}),\ t\in[0,1]$

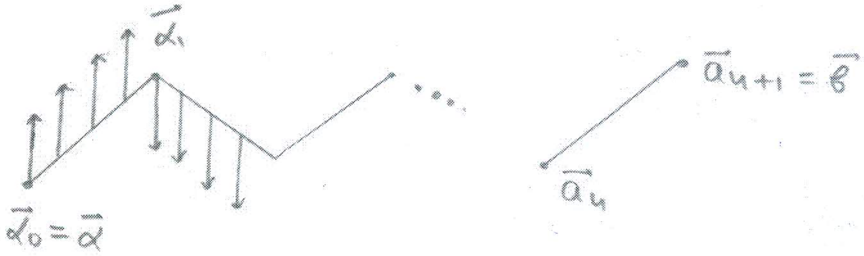
$\vec{F}(\vec{x})=\vec{V},\ \vec{x}\in\Gamma$



$W =: \vec{V}\cdot(\vec{b}-\vec{\alpha}) = \vec{V}\cdot\vec{r}\,'(t)$

(Είναι το Έργο που παράγεται όταν η δύναμη F μετακινεί το σημείο εφαρμογής της στο ευθ. τμήμα $[\vec{\alpha},\vec{b}]$)

- Π



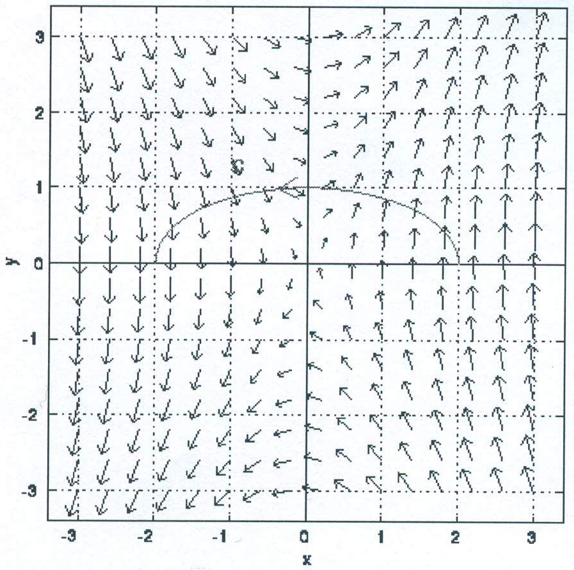
$W = \sum_{i=1}^{n+1} \vec{F}(\vec{r}_i(t))\cdot\vec{r}_i\,'(t),\quad \vec{r}_i \longleftrightarrow [\vec{\alpha}_{i-1},\vec{\alpha}_i]$

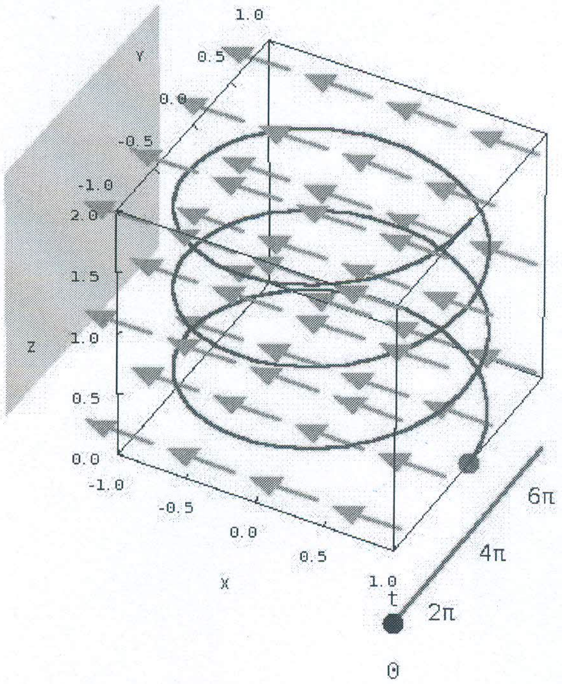
$\vec{F}$ συνεχής συνάρτηση

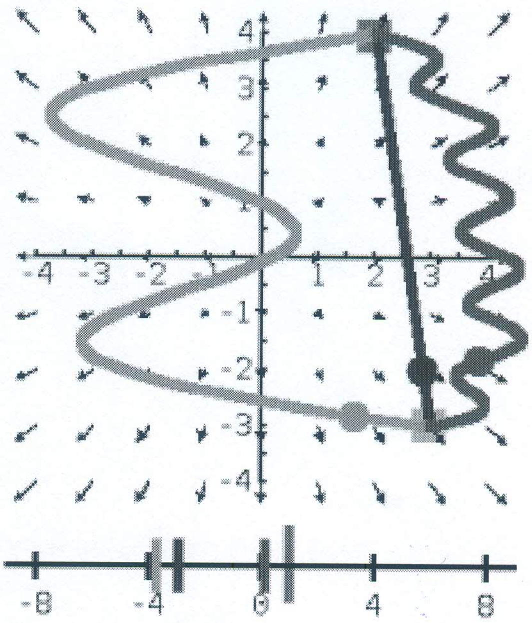
Γ $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ $\underline{C^1}$

$$W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

(Είναι το έργο που παράγεται όταν η δύναμη $\vec{F}$ μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης Γ)







Συμβολισμοί

- $d=2$ $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ $\vec{F}=(P,Q)$ | $\vec{F}=(P,Q,R)$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy$$

$d=3$ Ανάλογα $\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

Σημειώσεις Για $f=1$, $\int_\Gamma 1\,ds=\ell(\Gamma)$

Παρατηρήσεις - Ασκήσεις

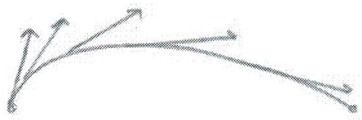
$\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^d)\longrightarrow \mathbb{R}^d$ συνεχής

$\Gamma\subseteq A$, $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r}=C^1$

1) Αν $\vec{F}(\vec{r}(t))\perp r'(t)$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$, $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

2) $\Gamma=$λεία, $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\vec{F}(\vec{r}(t))=\lambda(t)\,\vec{r}'(t)$, $\lambda(t)\geq 0$



$\vec{r}(\alpha)$ $\vec{r}(\beta)$

Τότε $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt=$

$=\int_\alpha^\beta (\lambda(t))\cdot(\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t))\,dt=$

$=\int_\alpha^\beta (\lambda(t)\cdot\|\vec{r}'(t)\|^2)\,dt=\int_\Gamma \|\vec{F}(\vec{r}(t))\|\,ds$

<u>Ιδιαιτέρως</u> $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|r'(t)\|}$

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Άρα: ∃M τ.ω :

3) $\vec{F}$ συνεχής $\|\vec{F}(\vec{r}(t))\| \le M$, $t\in[\alpha,\beta]$

Τότε $\left|\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}\right| \le M\,\ell(\Gamma)$.

$$\left|\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}\right| = \left|\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}(t)|\,dt$$

$$\overset{C-S}{\le} \int_\alpha^\beta \|\vec{F}(\vec{r}(t))\|\cdot\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \le M\int_\alpha^\beta \|r'(t)\|\,dt = M\,\ell(\Gamma)$$

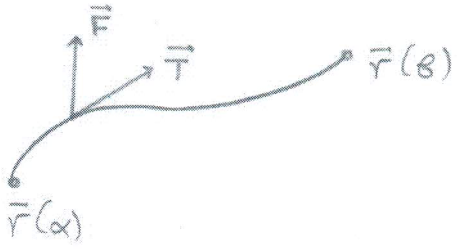
Σχέση Επικ. Ολοκληρωμάτων για <u>Λείες</u> Καμπύλες.

Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r} = C^1$

$\vec{r}\,'(t) \ne \vec{0}$, $\vec{F}: A\,(\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\Gamma \subseteq A$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \left(\vec{F}(\vec{r}(t))\,\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}\right)\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

$$= \int_\Gamma (\vec{F}\cdot\vec{T})\,ds, \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$



Ανεξαρτησία Επ. Ολοκληρωμάτων από την παραμέτρηση της καμπύλης ολοκλήρωσης

Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r} = C^1$, $t \in [\alpha, \beta]$

$\varphi : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$, $\varphi = C^1$, γν. μονότονη και επί

$\vec{\sigma} = \vec{r} \circ \varphi$, Αναπαραμέτρηση της Γ

Πρόταση

1) $f : \Gamma (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f =$ συνεχής

Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{\sigma} =$ αναπαραμέτρηση $(r = C^1)$

Τότε $\int_{\Gamma(\vec{r})} f\, ds = \int_{\Gamma(\vec{\sigma})} f\, d\sigma$, $\frac{d\sigma}{du} = \| \sigma'(u) \|$

Ιδιαιτέρως, $\ell(\Gamma(\vec{r})) = \ell(\Gamma(\vec{\sigma}))$

Δηλαδή, το μήκος της καμπύλης είναι ανεξάρτητο της παραμέτρησης

2) $\vec{F} : A (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\vec{F} =$ συνεχής

Γ: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{\sigma}$ αναπαρ. της Γ

$$\int_{\Gamma(\vec{r})} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} \int_{\Gamma(\vec{\sigma})} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}, & \varphi \uparrow \\ -\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}, & \varphi \downarrow \end{cases}$$

Απόδειξη

1) $\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} f(\vec{\sigma}(u))\,\|\vec{\sigma}'(u)\|\,du = \int_{\gamma}^{\delta} f(\vec{r}(\varphi(u))\,\|\vec{r}'(\varphi(u))\|\,|\varphi'(u)|\,du$

$I = \int_{\gamma}^{\delta} (f\circ\vec{r})(\varphi(u))\,\|\vec{r}'(\varphi(u))\|\,\varphi'(u)\,du \overset{t=\varphi(u)}{=\!=} \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t))\,\|r'(t)\|\,dt$

$\varphi \uparrow \ (\varphi' \geq 0)$

$\varphi \downarrow \ (\varphi' \leq 0)$

$I = \int_{\gamma}^{\delta} (f\circ\vec{r})(\varphi(u))\cdot\|\vec{r}'(\varphi(u))\|\,(-\varphi'(u))\,du \overset{t=\varphi(u)}{=\!=} -\int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt$

$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt$

$\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} f\,d\sigma = \int_{\Gamma(\vec{r})} f\,ds$

2) $\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \int_{\gamma}^{\delta} \left[\vec{F}(\vec{r}(\varphi(u))\cdot\vec{r}'(\varphi(u))\right]\varphi'(u)\,du \overset{t=\varphi(u)}{=\!=}$

$\varphi \uparrow \quad J = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot r'(t)\,dt$

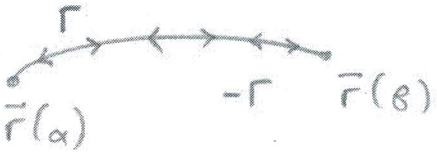
$\varphi \downarrow \quad J = -\int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$

Πόρισμα (Αντίθετη Καμπύλη)

$\vec{F}, \vec{r} \,/\, \Gamma$

$\vec{\sigma}(u) = \vec{r}(\alpha+\beta-u), \; u \in [\alpha, \beta]$

$-\Gamma$ αντίθετη της Γ



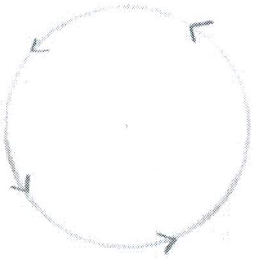
$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{-\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ορισμοί

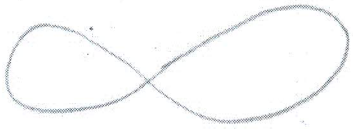
Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

1) Κλειστή Καμπύλη $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$

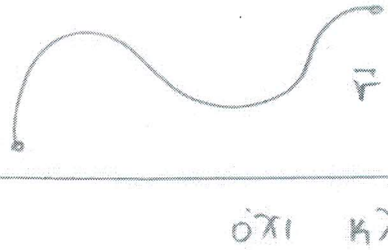
πχ



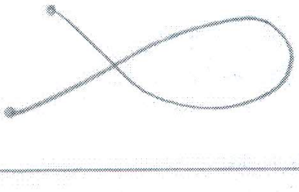
$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$



κλειστές καμπύλες

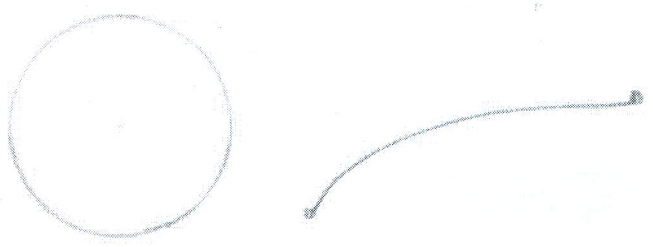


$\vec{r}(\alpha) \neq \vec{r}(\beta)$

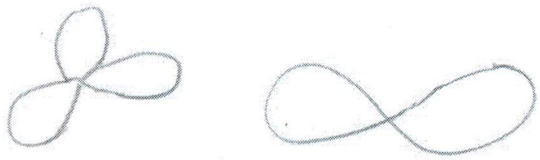


όχι κλειστές καμπύλες

2) Γ απλή $\Longleftrightarrow$ $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$



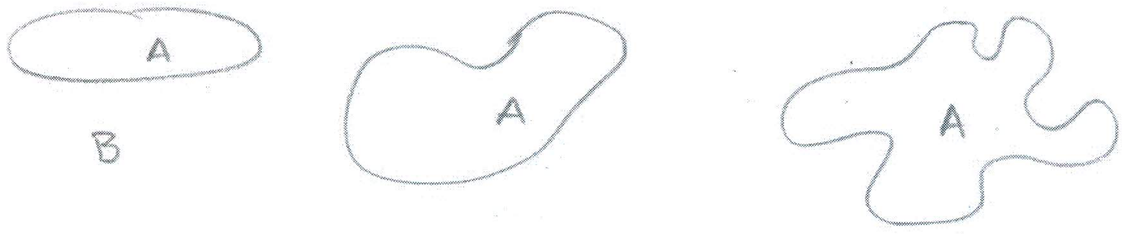
απλές καμπύλες



όχι απλές καμπύλες

3) $\mathbb{R}^2$

Γ κλειστή + απλή, Καμπύλη του Jordan



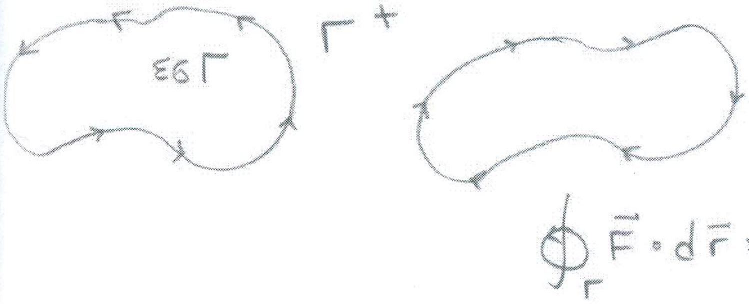
Θεώρημα Jordan

$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = A \cup B$

A = φραγμένο, B = μη φραγμ.

A καλείται εσΓ

B » εξΓ



Γ^- $\int_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\Gamma^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

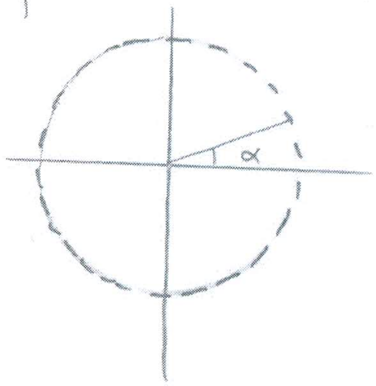
$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ασκήσεις

(I) Μήκος καμπύλης (C^1)

1) Να ευρεθεί το μήκος της καμπύλης Γ, $x^2+y^2=a^2$
$\vec{r}(t)=(\alpha\,\text{συν}\,t, a\,\text{ημ}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$

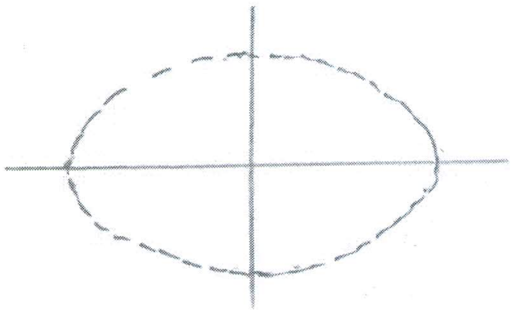
Λύση $\vec{r}\,'(t)=(-a\,\text{ημ}\,t, a\,\text{συν}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$



$$\ell(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt=2\pi\alpha$$

2) Γ $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=1$

$(\alpha>\beta>0)$, $\vec{r}(t)=(\alpha\,\text{συν}\,t, \beta\,\text{ημ}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$



$$\|\vec{r}\,'(t)\|=\sqrt{a^2\,\text{ημ}^2t+\beta^2\,\text{συν}^2t}$$

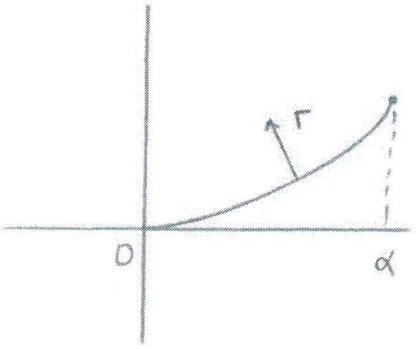
$\int_0^{2\pi}\|r'(t)\|\,dt$ ανάγεται σε πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα

$\int\sqrt{1-k^2\,\text{συν}^2t}\,dt$, $(0<k<1)$

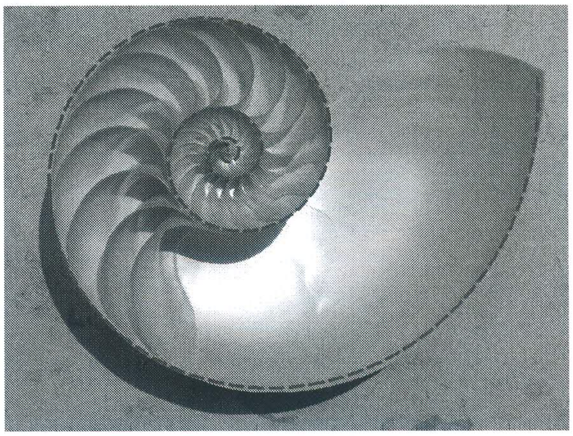
$$\ell(\Gamma)=\pi(\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{a-\beta}{a+\beta}\right)^{2n}$$

3) $\ell(\Gamma)$ Γ γράφημα της $y=\frac{x^2}{2}$, $x\in[0,\alpha]$, $\alpha>0$

Λύση $\vec r(x)=\left(x,\frac{x^2}{2}\right)$, $\vec r\,'(x)=(1,x)$ $\|\vec r\,'(x)\|=\sqrt{1+x^2}$



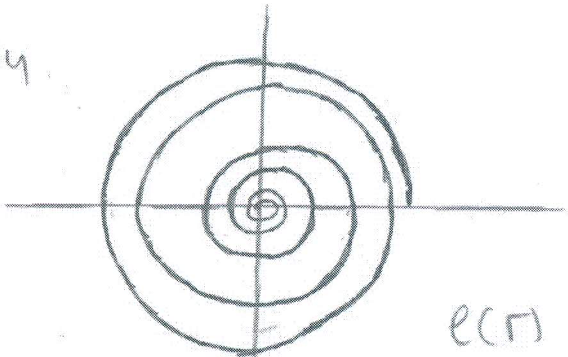
$$\ell(\Gamma)=\int_0^\alpha\sqrt{1+x^2}\,dx \overset{\text{Απ II}}{=} \frac{1}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+1}+\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)\right)$$



4) Γ, $r=e^{-\theta}$ $\theta\in[\gamma,+\infty)$

$\vec r(\theta)=(e^{-\theta}\sigma\upsilon\nu\theta,\ e^{-\theta}\eta\mu\theta)$

Λύση



$(\theta=-\log r,\ r>0)$

$\|\vec r\,'(\theta)\|=\sqrt{2}\,e^{-\theta}$

$$\ell(\Gamma)=\int_\gamma^{+\infty}\sqrt{2}\,e^{-\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\left(-e^{-\theta}\right)\Big|_{\theta=\gamma}^{+\infty}$$

$$=\sqrt{2}\,e^{-\gamma}$$

<u>Σημείωση</u>: Γενικότερα, $r=ac^\theta$ $(a,c>0,\ c\neq 1)$ είναι η γενική εξίσωση λογαριθμικής έλικας.

Τότε, $\theta=\dfrac{\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\ln c}$

Εάν θ_0 είναι η γωνία μεταξύ $\vec r(\theta)$ και $\vec r\,'(\theta)$, τότε $\varepsilon\varphi\theta_0=\dfrac{1}{\ln c}$

δηλαδή είναι σταθερή $\forall\theta$.

<u>Στην Ασκ. 4</u> $c=e^{-1}$, άρα $\theta_0=\frac{3\pi}{4}$

<u>Χρυσή Σπείρα</u>: Για $c=\varphi^{\frac{1}{\pi/2}}$ όπου φ ο λόγος της χρυσής τομής, τότε $r=a\,e^{\left(\frac{\ln\varphi}{\pi/2}\right)\theta}$ και καλείται Χρυσή Σπείρα.

Προσεγγίζεται «καλά» με τη <u>Σπείρα Fibonacci</u>.

(II) Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Βαθμωτού Πεδίου.

1) Γ σύρμα, $\vec{r}(t) = (\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, t)$, $t \in [0, \pi]$

$\delta(x,y,z) = e^{z}$, $(x,y,z) \in \Gamma$

$m = \int_\Gamma \delta\, ds$, οι ροπές $M_{yz} = \int_\Gamma x\delta\, ds$

$M_{xy} = \int_\Gamma z\delta\, ds$, $M_{xz} = \int_\Gamma y\delta\, ds$

Κέντρο Βάρους $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := \frac{1}{m}(M_{yz}, M_{xz}, M_{xy})$

- Λύση $m = \int_0^\pi e^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$

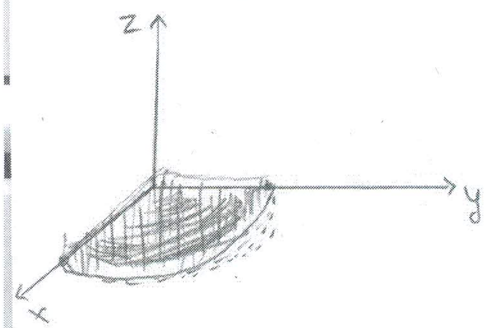
$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{2}$

$M_{yz} = \int_0^\pi \eta\mu t \cdot e^t \sqrt{2}\, dt = \frac{e^\pi + 1}{\sqrt{2}}$

$M_{xy} = (e^\pi(\pi - 1) + 1)\sqrt{2}$

$M_{xz} = -\frac{e^\pi + 1}{\sqrt{2}}$

2) Κυλινδρική Επιφάνεια με βάση $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \geq 0$ και ύψος $f(x,y) = xy$ / Εμβαδόν?



Λύση $E = \int_\Gamma f\, ds$

$\vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t)$

$t \in [0, \pi/2]$

$= \int_0^{\pi/2} (\eta\mu t\ \sigma\upsilon\nu t) \|\vec{r}'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi/2} \eta\mu t\, \sigma\upsilon\nu t\, dt$

$= \frac{1}{2}$

(III) Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Διανυσματικού Πεδίου

1) $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$\vec{F}(x,y,z)=(\eta\mu z,\ \sigma\upsilon\nu z,\ \sqrt[3]{xy})$

Γ, $\vec{r}(t)=(\sigma\upsilon\nu^3 t,\ \eta\mu^3 t,\ t)$, $t\in[0,\frac{3\pi}{2}]$

Λύση $W=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt=$

$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\eta\mu t,\ \sigma\upsilon\nu t,\ \eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t)\cdot(3\sigma\upsilon\nu^2 t\,\eta\mu t,\ 3\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu t,\ 1)\,dt$

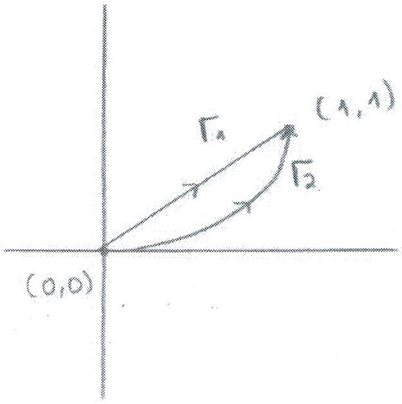
$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t\,dt=\frac{1}{2}$

2) $W_i=\int_{\Gamma_i}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\vec{F}(x,y)=(y,-x)$ Γ_1: $[(0,0),(1,1)]$

Γ_2: $\vec{r}_2(t)=(t,t^2)$, $t\in[0,1]$

Γ_3: $\vec{r}(t)=(\sigma\upsilon\nu t,\ \eta\mu t)$, $t\in[0,2\pi]$

Τι παρατηρείτε;



Γ_1, $\vec{r}(t)=(t,t)$, $t\in[0,1]$

$W_1=\int_0^1(t,-t)\cdot(1,1)\,dt=\int_0^1(t-t)\,dt=0$

$W_2=\int_0^1(t^2,-t)\cdot(1,2t)\,dt=\int_0^1(t^2-2t^2)\,dt=-\frac{1}{3}$

$W_3=\int_0^{2\pi}(\eta\mu t,-\sigma\upsilon\nu t)\cdot(-\eta\mu t,\sigma\upsilon\nu t)\,dt=-2\pi$ //

3) $\vec{F}(x,y) = (2xy,\ x^2+3y^2)$. Να υπολογιστούν τα W_i της $\vec{F}$ για τις καμπύλες της άσκ. 2. Τι Παρατηρείτε;

W_i

Λύση $\vec{r}(t) = (t,t)$

$$W_1 = \int_0^1 (2t^2, t^2+3t^2)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 6t^2\,dt = 2$$

$$W_2 = \int_0^1 (2t\cdot t^2, t^2+3t^4)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1 (2t^3+2t^3+6t^5)\,dt$$

$$= \int_0^1 (4t^3+6t^5)\,dt = t^4\Big|_0^1 + t^6\Big|_0^1 = 2$$

$W_3 = 0$

Θεώρημα

Έστω $\vec{F}: A\ (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$\vec{F} = C^2\ /\ \vec{F} = \nabla f$ (Πεδίο κλίσεων/Συντηρητικό)

$\Gamma,\ \vec{r}: [\alpha, \beta] \to \underline{A},\ \vec{r} = C^1$

Τότε $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(\beta)) - f(\vec{r}(\alpha))$

Ιδιαιτέρως Εάν Γ = κλειστή, $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

Απόδειξη

$$g = f\circ\vec{r} : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g = C^1$$

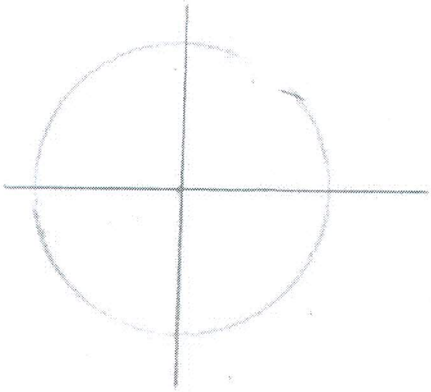
$$g' = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t), \quad t\in[\alpha,\beta]$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \nabla f(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta g'(t)\,dt \overset{\Theta.\Theta.\text{Α.Π}}{=\!=} g(\beta)-g(\alpha)$$

$$= f(\vec{r}(\beta)) - f(\vec{r}(\alpha))$$

Πόρισμα Το αστρόβιλο, C^∞ Δ.Π $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ δεν είναι συντηρητικό /Π. Κλίσεων.

Απόδειξη $\vec{r}(t) = (\alpha\,\text{συν}t, \alpha\,\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi]$



Εάν $\exists f: \vec{F} = \nabla f$, θα πρέπει $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\alpha\,\text{ημ}t}{\alpha^2}, \frac{-\alpha\,\text{συν}t}{\alpha^2}\right)\cdot(-\alpha\,\text{ημ}t, \alpha\,\text{συν}t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} 1\,dt = -2\pi \neq 0$$ Άρα δεν είναι συντηρητικό από το προηγούμενο Θεώρημα

Ασκήσεις

1) $\vec{F}(x,y) = (y-x^2, x+y^2)$ $W = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\Gamma: \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1$ $(\alpha,\beta>0)$

Λύση $f(x,y) = xy - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$

$\vec{F} = \nabla f$ Άρα $W = 0$

2) Να υπολογιστεί το $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + (x+e^z)\vec{j} + ye^z\vec{k}$

Γ, $\vec{r}(t) = (t, \text{τοξεφ}\,t, \text{ημ}(t^3+\frac{\pi}{2}))$, $t\in[0,1]$

Λύση $f(x,y,z) = xy + ye^z$, $\nabla f = \vec{F}$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}e^{\text{ημ}(1+\frac{\pi}{2})}$$

Θέμα Ιούνιος 2020

Ερώτημα. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης γ η οποία είναι η τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = \frac{1}{5}x^2 + y^2$ και του επιπέδου $z = 3 - 2y$.

Λύση. Η προβολή της καμπύλης στο (x, y)-επίπεδο έχει εξίσωση

$$\frac{1}{5}x^2 + y^2 = 3 - 2y \ ,$$

ισοδύναμα

$$\frac{x^2}{20} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \, .$$

Αυτή είναι έλλειψη και μία παραμέτρησή της είναι η

$$x(t) = 2\sqrt{5}\cos t \ , \qquad y(t) = -1 + 2\sin t \ , \qquad 0 \le t \le 2\pi \, .$$

Μία παραμέτρηση της γ είναι η

$$\big(x(t), y(t), 3 - 2y(t)\big) = \big(2\sqrt{5}\cos t, -1 + 2\sin t, 5 - 4\sin t\big) \ , \qquad 0 \le t \le 2\pi \, .$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{20\sin^2 t + 4\cos^2 t + 16\cos^2 t}dt \\ &= 4\pi\sqrt{5} \, . \end{aligned}$$