4/11/2020
Καλό Μήνα!

Μάθημα 11ο

(Α) Εφαπτομένη ευθεία και Εφαπτόμενο επίπεδο

(Ι) Εφ. ευθεία σε καμπύλη Γ ← παραμετρημένη

Θεωρούμε Γ, $\vec{r}(t)=(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$, $t\in I$ (=διάστημα του $\mathbb{R}$)

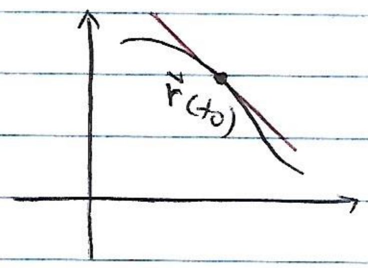
C^1. $n\geq 2$.

Τότε $\vec{r}\,'(t)=(r_1'(t), r_2'(t), \dots, r_n'(t))$

Έστω $t_0\in I$. εφ. ευθεία της Γ, την ευθεία $\vec{l}(t)=\vec{r}(t_0)+\vec{r}\,'(t_0)(t-t_0)$, $t\in\mathbb{R}$
εφόσον $\vec{r}\,'(t_0)\neq 0$.

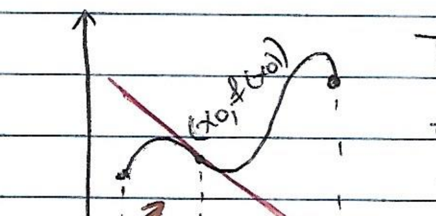
Η ευθεία που περνάει από το $\vec{r}(t_0)$, κλίσης $\vec{r}\,'(t_0)$.

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$



α) $\vec{r}(t)=(x(t), y(t))$, $t\in I$ ($\underline{C^1}$)
$\vec{l}(t)=\vec{r}(t_0)+\vec{r}\,'(t_0)(t-t_0)$, $t\in\mathbb{R}$
Παραμετρημένη καμπύλη $\vec{r}\,'(t_0)\neq\vec{0}$

β) Γ είναι το γράφημα, $f: A(\subseteq\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$, C^1
$G_f=\{(x,y): y=f(x)\}$



Τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη ευθεία της f (του G_f) στο x_0 ($(x_0, f(x_0))$) την $\boxed{y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$, $x\in\mathbb{R}$

$y_0=f(x_0)$

Τότε: $\cancel{(f'(x_0)(x-x_0)-(y-f(x_0)))}$
$f'(x_0)(x-x_0)+(-1)\cdot(y-y_0)=0$

Άρα, $(f'(x_0),-1)$ είναι $\perp$ στην εφ. ευθεία στο (x_0, y_0).

• Ορίζουμε ως Κάθετο Διάνυσμα στην f (G_f) στο x_0 ((x_0, y_0)) το $\underline{(f'(x_0),-1)}$

γ) $\Gamma: \Sigma_0 = \{(x,y): F(x,y)=0\}$, $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1

ως Σύνολο Στάθμης F.

Έστω $(x_0, y_0) \in \Sigma_0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Από Θ. Πεπλ. Σ. υπάρχει $f: (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $f(x_0)=y_0$ και $F(x,f(x))=0$. μοναδική και f C^1

Τότε η f έχει εφ. ευθεία (από το β) την

$y = y_0 + f'(x_0)(x-x_0)$

$$f'(x_0) = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right|_{(x_0,y_0)} \quad ①$$

$f'(x_0)(x-x_0) - (y-y_0) = 0$.

$① \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0. \to$ Εφαπτ. ευθεία της f στο (x_0,y_0)

Το κάθετο διάνυσμα της f, αν δίνεται ως $F(x,f(x))=0$, $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, είναι το $\nabla F(x_0,y_0)$.

(II) Εφ. Επίπεδο σε Επιφάνεια (2-Επιφ.)

S επιφάνεια του $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ έχει παρ. Εξίσωση

$\vec{r}(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), \dots, r_n(u,v))$, C^1

$(u,v) \in I \times J$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτά διαστήματα

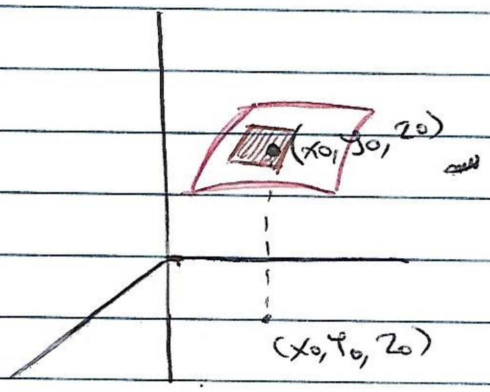
$\boxed{S \text{ επιφάνεια (2-επιφ) στον } \mathbb{R}^3}$

α) $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ όπου $(u,v) \in I \times J$ ($\subseteq \mathbb{R}$ διαστήματα)

Παραμετρική εξίσωση (επιφανειακά ολοκ)

β) S Γράφημα $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1

$S: \{(x,y,z): z=f(x,y)\}$, θεωρούμε $(x_0, y_0, z_0=f(x_0,y_0))$



Ορίζουμε ως Εφ. επίπεδο της f (του G_f) στο (x_0,y_0) $((x_0,y_0,z_0))$ το

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right]}$$

Άρα το Εφ. επίπεδο της f στο (x_0,y_0) είναι το επίπεδο που διέρχεται από το (x_0,y_0,z_0) και έχει κλίση ως πρός τον άξονα των x, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ και έχει κλίση ως πρός τον άξονα των y, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

γ) S δίνεται ως γράφημα f, με $F(x,y,f(x,y))=0$

όπου $F(x_0,y_0,z_0)=0$, (τοπικά) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

δηλ. ως Σύνολο Στάθμης $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1,
διέρχεται από $F(x_0,y_0,z_0)=0$.

2

$$z = z_0 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right] \rightsquigarrow$$ Εφ. επίπεδο της f στο (x_0,y_0)

Όμως $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

2 $$\Rightarrow \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

Άρα Συνολικά $\rightsquigarrow$

εφ. επίπεδο στην $f : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$
στο (x_0, y_0)

↝ S επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$

G_f, $z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$

κάθετο διάνυσμα στο εφ. επίπεδο, κάθετο στο G_f στο (x_0,y_0,z_0) είναι το

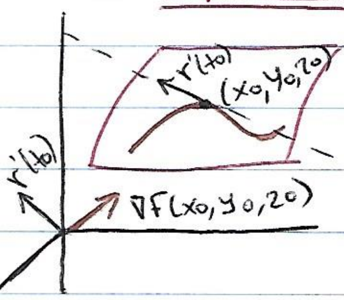
$$\boxed{\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, -1\right)}$$

$F(x,y,f(x,y)) = 0$ (τοπικά στο (x_0,y_0))

κάθετο διάνυσμα στο εφ. επίπεδο, κάθετο στο G_f στο (x_0,y_0,z_0) είναι το $\boxed{\nabla F(x_0,y_0,z_0)}$

Πρόταση: Έστω $F(x,y,f(x,y)) = 0$.

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, C^1 και $z_0 = f(x_0,y_0)$



Καμπύλη $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$, C^1, $\vec{r}(t_0) = (x_0,y_0,z_0)$

$\vec{r}'(t_0) \neq 0$ (λεία στο t_0) με $F(\vec{r}(t)) = 0$, $t \in I$

Τότε $\vec{r}'(t_0) \perp \nabla F(x_0,y_0,z_0)$

Αποδ. $F \circ \vec{r}(t) = 0$, $t \in I$

$(F \circ \vec{r})'(t) = 0$

$\nabla F(\vec{r}(t)) \circ \vec{r}'(t)$

$t = t_0$

$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \perp \vec{r}'(t_0)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Γ $\{(x,y) : x^3 + y^3 = 3xy\}$ και $a, b \in \Gamma$ με $a^2 \neq b^2$

i) Ν.δ.ο. $\exists!$ $f : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $f(a) = b$ και $F(x, f(x)) = 0$, $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Να βρεθεί η $f'(a)$

ii) Για το $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \in \Gamma$ Να βρεθεί η εφ. ευθεία

Λύση i) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad C^1$

$F(a,b) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 3y^2 - 3x \Big|_{(a,b)} = 3(b^2 - a) \neq 0$

Άρα $\exists$ περιοχή $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, C^1

$f(a) = b$ (θεώρ. πεπλ.)

$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Τότε $x^3 + f^3(x) - 3x f(x) = 0$

$x = a$, $f(a) = b$: $\quad 3a^2 + 3b^2 f'(a) - 3f(a) - 3af'(a) = 0$

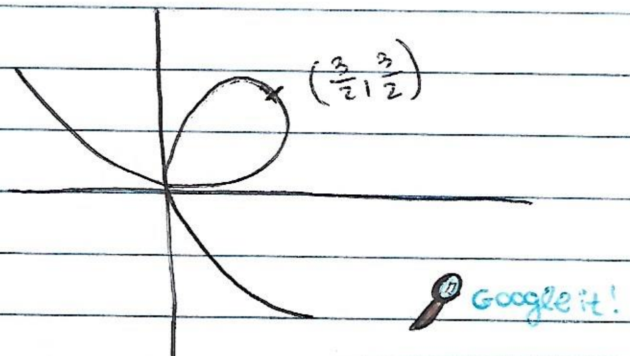
$f'(a) = \frac{a^2 - b}{a - b^2}$

ii) Εφ. ευθ. της f στο a είναι

$y = b + \frac{a^2 - b}{a - b^2}(x - a)$

$a = \frac{3}{2} = b$ (... πράξεις ...) $\boxed{x + y = 3}$

Folium (φύλλο) του De Cart (1638)



Παραμέτρηση

$\vec{r}(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$

$t \in \mathbb{R}$ και $t \neq -1$

$\left(-\frac{y}{x} = t\right)$

2) $S_1: \ x^2 + y^2 + z^2 - 20 = 0$

$S_2: \ x + y + z - 6 = 0$

$(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, 2)$

$F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 20$,

$F_1(0,4,2) = 0 = F_2(0,4,2)$

i) Ν.Δ.Ο. ορίζεται $\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$ που περνά από το $(0,4,2)$ και είναι η τομή των S_1, S_2

ii) Να βρεθεί η εφ. ευθεία της $\vec{r}$ στο $x_0 = 0$.

Λύση α' τρόπος: Λύνουμε $y=y(x)$, $z=z(x)$ σε περιοχή του $(0,4,2)$

β' τρόπος:

$$\det\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(4,2)} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Άρα (πεπλ. Συνάρτηση) $\exists\ y,z:(-\varepsilon,+\varepsilon)\to\mathbb{R}$, C^1 με

$F_1(x,y(x),z(x))=0 \qquad x\in(-\varepsilon,+\varepsilon)$

$F_2(x,y(x),z(x))=0$

$y(0)=0 \qquad \vec{\ell}(t)=(0,4,2)+\vec{r}\,'(0)\cdot t$

$z(0)=2 \qquad \vec{r}\,''(0)$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2(x)+z^2(x)-20=0 \\ x+y(x)+z(x)-6=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ παραγωγίζω ως προς x θέτω $x_0=0$

$$\left.\begin{aligned} 2\cdot 4y'(0)+2\cdot 2z'(0)=0 \\ 1+y'(0)+z'(0)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y'(0)=1 \\ z'(0)=-2 \end{aligned}$$

Άρα $\vec{\ell}(t)=(0,4,2)+t\cdot(1,1,-2) \qquad t\in\mathbb{R}$

(3) $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ $(a\neq 0)$, $(x,y)\neq(0,0)$ (C^1)

Να δ.ο. η κάθετος ευθεία του γραφήματος της $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ σε σημείο (x_0,y_0) $(\neq(0,0))$ τέμνει τον άξονα των z.

Λύση

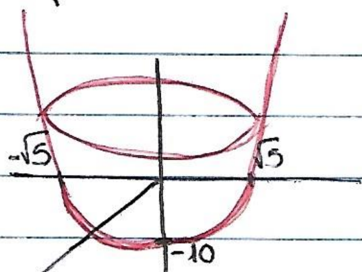
Κάθετο διάνυσμα του G_f στο $(x_0,y_0,z_0=a\sqrt{x_0^2+y_0^2})$ είναι το $\vec{n}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)(x_0,y_0)$

δηλ. $\left(\frac{a x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{a y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},-1\right)$ ευθεία που διέρχεται από το (x_0,y_0,z_0) και είναι $\perp G_f$

$$\vec{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot \left(\frac{a x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{a y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, -1 \right)$$

Ζητάμε $t_0 \in \mathbb{R}$: $x_0 + t \frac{a^2 x_0}{z_0} = 0$, $y_0 + t \frac{a^2 y_0}{z_0} = 0$ $\Big|$ $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, $t_0 = -\frac{z_0}{a^2}$

(4) $x^2 + y^2 - z = 10$, εξ. εφαπτομένου επιπέδου και του μοναδιαίου καθέτου $\vec{n}$ στην επιφάνεια στο $(1, 1, -8)$



Λύση

$z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 10$

Εφ. Επίπεδο

$$z = -8 + \left[\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1) \right] =$$

$$= -8 + 2(x-1) + 2(y-1) =$$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - z = 12$ άρα $\vec{v} = (2, 2, -1)$ κάθετο στο $(2,2,1)$

και $\vec{n} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$

(5) $f(x,y) = \sqrt{3 - (x^2 + y^2)}$ $(x^2 + y^2 < 3)$

$x_0 = (1, 1, 1)$. Να ευρεθεί το εφ. επίπεδο της f στο $\vec{x_0}$

(6) $\eta\mu(x+y) + \varepsilon\varphi(y+z) = 1$

$P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ εφ. επίπεδο στο P;

Υπό πεπλ. μορφή

Λύση

$F(x,y,z) = \eta\mu(x+y) + \varepsilon\varphi(y+z) - 1$. C^1

$$\begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\pi}{4}, \pi/4, -\pi/4\right) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(y+z)} \Big|_{(P)} = 1 \neq 0 \end{cases}$$

Από Θ. πεπ. $\exists!$ (μοναδική) $f: C^1$, σε περιοχή του $(\pi/4, \pi/4)$ με $\eta\mu(x+y) + \varepsilon\varphi(y + f(x,y)) - 1 = 0$, κοντά στο $(\pi/4, \pi/4)$ και $f(\pi/4, \pi/4) = -\pi/4$.

εφ. επίπεδο $\nabla F(\pi/4, \pi/4, \pi/4)(x-\pi/4, y-\pi/4, z+\pi/4)=0$

δηλ. $z+y=0$

$(\nabla F(p) = (0,1,1))$

$\boxed{\text{7) } z^3+(x^2+y^2)z+1=0 \text{ Να ευρεθεί το εφ. επίπεδο στο } (0,0,-1)}$