Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
2015-16

Περιεχόμενα

Μέρος I

Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το αντικείμενο του Απειροστικού Λογισμού ΙΙΙ είναι η μελέτη συναρτήσεων της μορφής

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

ή γενικότερα συναρτήσεων της μορφής

$$f : A \to \mathbb{R}^m$$

όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq 1$. Επομένως, το βασικό σύνολο στο οποίο θα δουλέψουμε είναι το $\mathbb{R}^n$. Το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο περιέχει κάποια βασικά στοιχεία για τη δομή του $\mathbb{R}^n$.

1.1 Ο $\mathbb{R}^n$ ως διανυσματικός χώρος

Καταρχάς, για $n = 1$ έχουμε $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό έχει οριστεί στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι και είναι πλήρες και ολικά διατεταγμένο σώμα.

Για $n \geq 2$, το $\mathbb{R}^n$ έχει ως στοιχεία όλες τις n-άδες πραγματικών αριθμών, δηλαδή

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα λέμε διανύσματα και τα συμβολίζουμε $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Η ισότητα μεταξύ δύο διανυσμάτων ορίζεται κατά συντεταγμένη, δηλαδή αν $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \text{ για κάθε } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Πράξεις στον $\mathbb{R}^n$
Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε δύο πράξεις: την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Οι

πράξεις ορίζονται κατά συντεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι αν $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε το άθροισμά τους είναι εξ' ορισμού

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \big(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\big) \in \mathbb{R}^n.$$

Επίσης, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζεται ως ακολούθως. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\lambda \overrightarrow{x} = \big(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\big) \in \mathbb{R}^n.$$

Το $\mathbb{R}^n$ με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό όπως ορίστηκαν προηγουμένως αποκτά τη δομή διανυσματικού χώρου. Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το $\overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Αν $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε το αντίθετο του $\overrightarrow{x}$ είναι το διάνυσμα $-\overrightarrow{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Διάσταση του $\mathbb{R}^n$
Στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \overrightarrow{e_1} &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

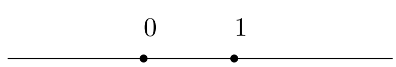
Είναι εύκολο να δούμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επιπλέον, παράγουν ολόκληρο τον χώρο. Πράγματι, αν $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, τότε το $\overrightarrow{x}$ γράφεται

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η διάσταση του $\mathbb{R}^n$ είναι ίση με n.

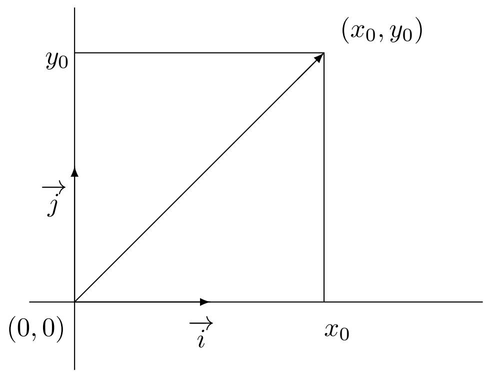
Γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathbb{R}^n$ για $n = 1, 2, 3$.

• Για $n = 1$, γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ παριστάνεται γεωμετρικά με τα σημεία μιας ευθείας. Η αντιστοιχία μεταξύ του $\mathbb{R}$ και των σημείων της ευθείας είναι 1-1 και επί και γίνεται επιλέγοντας δύο σημεία πάνω στον άξονα, στο ένα αντιστοιχούμε το 0 και στο άλλο το 1.

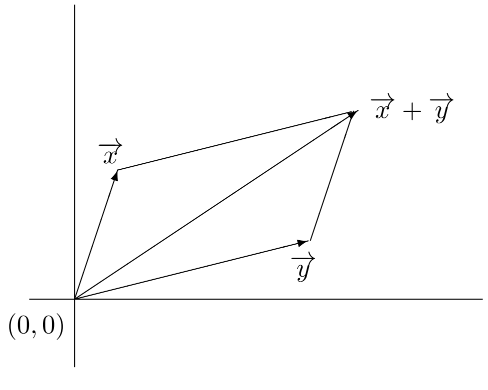


• Για $n = 2$, το $\mathbb{R}^2$ παριστάνεται γεωμετρικά με τα σημεία ενός επιπέδου. Η αντιστοιχία αυτή επιτυγχάνεται σχεδιάζοντας στο επίπεδο ένα σύστημα αξόνων, το οποίο συνήθως επιλέγουμε ορθοκανονικό (δηλαδή οι άξονες τέμνονται κάθετα και η μονάδα μήκους είναι ίδια και στους δύο άξονες). Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$, τα διανύσματα $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ τα συμβολίζουμε ως εξής

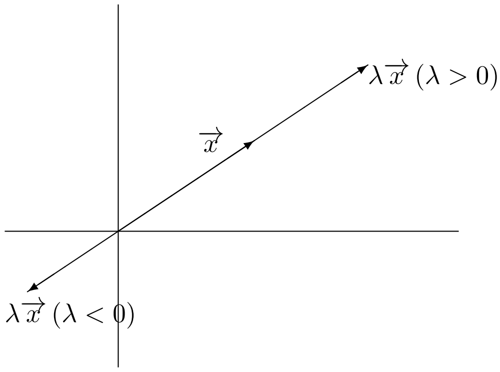
$$\overrightarrow{e_1} = (1,0) = \overrightarrow{i} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{e_2} = (0,1) = \overrightarrow{j}.$$



Γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης: Το άθροισμα δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ μπορεί να βρεθεί με τον κανόνα του παραλληλογράμμου:



Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού:



• Για $n = 3$, ο $\mathbb{R}^3$ παριστάνεται γεωμετρικά με τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου. Η αντιστοιχία αυτή επιτυγχάνεται σχεδιάζοντας ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ τα συμβολίζουμε ως εξής

$$\vec{e_1} = (1,0,0) = \vec{i} \qquad \vec{e_2} = (0,1,0) = \vec{j} \qquad \vec{e_3} = (0,0,1) = \vec{k}.$$

1.2 Εσωτερικό Γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, Ευκλείδεια νόρμα, Μετρική

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Το *εσωτερικό γινόμενο των* $\vec{x}, \vec{y}$ συμβολίζεται με $\vec{x} \cdot \vec{y}$ και ορίζεται ως εξής:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Για το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων χρησιμοποιούνται ακόμη οι συμβολισμοί $(\vec{x}, \vec{y})$ ή $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. Τονίζουμε σε αυτό το σημείο ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πραγματικός αριθμός (και όχι διάνυσμα). Επομένως έχουμε ορίσει στην ουσία μία απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Η επόμενη πρόταση περιέχει τις βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

Πρόταση 1.2.1. *Για το εσωτερικό γινόμενο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ *για κάθε διάνυσμα* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$*. Επιπλέον, ισχύει ότι* $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$.
2. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ *για κάθε* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$*. (μεταθετική ιδιότητα)*

3. $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z}$ *για κάθε* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$.

4. $(\lambda \overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \lambda(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})$ *για κάθε* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ *και κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$

Σχόλιο. Μια οποιαδήποτε συνάρτηση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες της προηγούμενης πρότασης λέμε ότι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

Ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου είναι η ανισότητα Cauchy-Schwarz, η οποία περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.2. *Για κάθε* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει η ανισότητα*

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}\sqrt{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}}.$$

Η ισότητα στην παραπάνω ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{x}$ *και* $\overrightarrow{y}$ *είναι συγγραμικά.*

Απόδειξη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda) = (\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (βλ. προηγούμενη πρόταση), έχουμε ότι $g(\lambda) \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Από την άλλη, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} g(\lambda) =& (\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \\ =& \lambda^2 \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \lambda \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} \\ =& \lambda^2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}) + 2\lambda(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}. \end{aligned}$$

Αν $\overrightarrow{x} = 0$, τότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει, αφού και τα δύο μέλη είναι ίσα με 0. Αν $\overrightarrow{x} \neq 0$, τότε παρατηρούμε ότι $g(\lambda)$ είναι ένα τριώνυμο το οποίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0 για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως, η διακρίνουσα του τριωνύμου πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση του 0. Δηλαδή, έχουμε

$$4(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2 - 4(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x})(\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}) \leq 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2 \leq (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x})(\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}) \Leftrightarrow$$

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}| \leq \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}\sqrt{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}}.$$

Θα εξετάσουμε τώρα πότε ισχύει το = στην ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αν $\overrightarrow{x} = 0$ ή $\overrightarrow{y} = 0$, τότε έχουμε ισότητα, αφού και τα δύο μέλη είναι 0. Έστω τώρα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \neq 0$. Αν ισχύει η ισότητα $|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}\sqrt{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}}$, τότε η διακρίνουσα του τριωνύμου $g(\lambda)$ είναι ίση με 0. Συνεπώς, το τριώνυμο έχει μια (διπλή) πραγματική ρίζα. Δηλαδή, υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(\lambda_0) = 0$. Τότε έχουμε

$$g(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_0 \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\lambda_0 \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{y} = (-\lambda_0)\overrightarrow{x}.$$

Αντίστροφα, αν $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ είναι συγγραμικά, τότε εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η ισότητα στην ανίσωση Cauchy-Schwarz. Τελικά, η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ είναι συγγραμικά. ■

Παρατήρηση. Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ μη μηδενικά διανύσματα. Αν θέσουμε

$$t = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}\sqrt{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}}},$$

τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι $|t| \leq 1$. Αν $|t| = 1$, τότε τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ είναι συγγραμικά. Ειδικότερα, αν $t = 1$, τότε $\overrightarrow{y} = \lambda_0 \overrightarrow{x}$ για κάποιο $\lambda_0 > 0$. Αν $t = -1$, τότε $\overrightarrow{y} = \lambda_0 \overrightarrow{x}$ για κάποιο $\lambda_0 < 0$.

Ευκλείδεια Νόρμα

Για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, θέτουμε

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Η $\|\overrightarrow{x}\|$ ονομάζεται *Ευκλείδεια νόρμα του* $\overrightarrow{x}$. Στη βιβλιογραφία συμβολίζεται συχνά με $\|\overrightarrow{x}\|_2$. Τονίζουμε και εδώ ότι η Ευκλείδεια νόρμα ενός διανύσματος είναι αριθμός, και μάλιστα μη αρνητικός. Συνεπώς, έχουμε ουσιαστικά μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\overrightarrow{x} \mapsto \|\overrightarrow{x}\|.$$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει τις βασικές ιδιότητες της νόρμας.

Πρόταση 1.2.3. *Για την νόρμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ *για κάθε* $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. *Επιπλέον, ισχύει η ισοδυναμία* $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0$.
2. $\|\lambda\overrightarrow{x}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{x}\|$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και* $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. *(Αναφερόμαστε σε αυτήν την ιδιότητα λέγοντας ότι η* $\|\cdot\|$ *είναι θετικά ομογενής).*
3. $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ *για κάθε* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. *(Η ιδιότητα αυτή καλείται τριγωνική ιδιότητα.)*

Απόδειξη.

Οι ιδιότητες 1. και 2. είναι απλές και αφήνονται ως άσκηση. Θα αποδείξουμε την τρίτη ιδιότητα. Υπενθυμίζουμε ότι από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε ότι για κάθε $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}\sqrt{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}}.$$

Με βάση τον ορισμό της Ευκλείδειας νόρμας, η ανισότητα γράφεται

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|.$$

Τώρα, από τον ορισμό της Ευκλείδειας νόρμας, έχουμε

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2 &= (\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\cdot(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}+\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{y}\\ &= \|\overrightarrow{x}\|^2+2(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y})+\|\overrightarrow{y}\|^2\\ &\le \|\overrightarrow{x}\|^2+2(\|\overrightarrow{x}\|\cdot\|\overrightarrow{y}\|)+\|\overrightarrow{y}\|^2\\ &= (\|\overrightarrow{x}\|+\|\overrightarrow{y}\|)^2\,.\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο $\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|\le\|\overrightarrow{x}\|+\|\overrightarrow{y}\|$. ■

Απόσταση-Μετρική

Αν $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}$ είναι δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε ορίζουμε τη μεταξύ τους απόσταση ως εξής

$$\mathrm{d}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|.$$

Οι βασικές ιδιότητες της απόστασης στον $\mathbb{R}^n$ περιγράφονται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.4. *Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\mathrm{d}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\ge 0$ *για κάθε* $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^n$. *Επιπλέον,* $\mathrm{d}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y}$.
2. $\mathrm{d}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\mathrm{d}(\overrightarrow{y},\overrightarrow{x})$ *για κάθε* $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^n$.
3. $\mathrm{d}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\le\mathrm{d}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z})+\mathrm{d}(\overrightarrow{z},\overrightarrow{y})$ *για κάθε* $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\in\mathbb{R}^n$

Σχόλιο. Ας συνοψίσουμε την προηγούμενη διαδικασία. Είδαμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι ένας διανυσματικός χώρος, ο οποίος εφοδιάζεται με εσωτερικό γινόμενο, και επομένως έχουμε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle$. Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο, ορίζουμε μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και έτσι έχουμε ένα χώρο με νόρμα $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|$. Τέλος, η νόρμα ορίζει σε αυτόν τον χώρο μια απόσταση (μετρική) και έτσι ο $(\mathbb{R}^n,\mathrm{d})$ γίνεται μετρικός χώρος. Η διαδικασία που περιγράψαμε είναι όμοια οποτεδήποτε έχουμε έναν διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Σημαντική ιδιότητα. Απομονώνουμε σε αυτό το σημείο μια παρατήρηση, η οποία θα μας είναι ιδιατέρως χρήσιμη σε επόμενα κεφάλαια. Για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, η απόλυτη τιμή κάθε συντεταγμένης $|x_i|$ είναι μικρότερη ή ίση της νόρμας του $oarx$. Δηλαδή,

$$|x_i|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}=\|x\|\quad\text{για κάθε } i=1,2,\ldots,n.$$

Γεωμετρική αναπαράσταση της $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$, $n=1,2,\ldots$

1.3 Γωνία δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Θεωρούμε δύο *μη μηδενικά* διανύσματα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ του $\mathbb{R}^n$. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε τα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ ορίζουν ένα διανυσματικό υπόχωρο X του $\mathbb{R}^n$ διάστασης 2. Ειδικότερα, $X = \mathrm{span}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\} = \{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Γεωμετρικά, ο υπόχωρος X παριστάνεται με ένα επίπεδο Π το οποίο διέρχεται από το σημείο $\overrightarrow{0}$. Ορίζουμε *γωνία των διανυσμάτων* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ και τη συμβολίζουμε με $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ως εξής

$$\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \mid \lambda, \mu \geq 0\}.$$

Αν τώρα με κέντρο το $\overrightarrow{0}$ και ακτίνα 1 γράψουμε κύκλο στο επίπεδο Π, τότε αυτός ο κύκλος τέμνει την $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ στο τόξο $\hat{AB}$. Ορίζουμε ως μέτρο της $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ το μήκος του παραπάνω τόξου. Συνεπώς, το μέτρο της γωνίας είναι ένας αριθμός θ με $0 < \theta < \pi$.

Αν τώρα τα διανύσματα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$. Επίσης, ισχύει ότι $\lambda \neq 0$, αφού τα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.
Περίπτωση 1. Ισχύει $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ με $\lambda > 0$. Τότε η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ έχει μέτρο 0.
Περίπτωση 2. Ισχύει $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ με $\lambda < 0$. Τότε η γωνία θ των διανυσμάτων $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ έχει μέτρο π.

Το συνημίτονο της γωνίας $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ συνδέεται με το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων αυτών. Η μεταξύ τους σχέση αποκδεικνύεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.3.1. *Έστω $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ και $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ η γωνία που σχηματίζουν. Τότε ισχύει ότι*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta.$$

1.4 Ορθογώνια διανύσματα, Ορθοκανονική βάση στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 1.4.1. *Δύο διανύσματα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ του $\mathbb{R}^n$ λέγονται κάθετα αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με 0. Όταν δύο διανύσματα είναι κάθετα, συμβολίζουμε $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Συνεπώς, έχουμε*

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ είναι μη μηδενικά, τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.3.1, βρίσκουμε ότι

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

όπου θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$.

Ορισμός 1.4.2. *Μια n-άδα διανυσμάτων $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ λέμε ότι αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ αν ισχύουν τα ακόλουθα*

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{για κάθε } 1 \leq i, j \leq n \quad \text{με } i \neq j$$

$$\|v_j\| = 1 \quad \text{για κάθε } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Συνεπώς, τα διανύσματα $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν (εξ' ορισμού) είναι κάθετα ανά δύο και επιπλέον καθένα από τα διανύσματα έχει μήκος ίσο με 1.

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

μπορούμε να γράψουμε εν συντομία ότι $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = \delta_{ij}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

1.5 Εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$, Γεωμετρικές Εφαρμογές

Θεωρούμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^n$. Το *εξωτερικό γινόμενο των* $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$, το οποίο συμβολίζουμε με $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$, και ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \\ &= \big(x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + y_1 x_3, x_1 y_2 - y_1 x_2\big) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει τις βασικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

Πρόταση 1.5.1. *Για το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.*

1. $(\lambda \overrightarrow{y}) \times \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z} = -\overrightarrow{z} \times \overrightarrow{y}$
3. $(\lambda \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{y} = \lambda(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y})$
4. $\overrightarrow{x} \times (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{z}$
5. $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z}$
6. $\overrightarrow{x} \times (\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z})\overrightarrow{y} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})\overrightarrow{z}$

1.6 Δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Έστω $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Εφόσον η διάσταση του $\mathbb{R}^n$ είναι ίση με n, τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, κάθε $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{v_n},$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Για το λόγο αυτό, τα διανύσματα $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ λέμε ότι αποτελούν ένα **σύστημα συντεταγμένων** στον $\mathbb{R}^n$. Οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{x}$ ως προς αυτό το σύστημα είναι ακριβώς οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Ορισμός 1.6.1. *Έστω $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ είναι* **δεξιόστροφο** *σύστημα συντεταγμένων αν ισχύει ότι*

$$\det\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\} > 0.$$

Με $\det\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\} > 0$ συμβολίζουμε την ορίζουσα (determinant) των διανυσμάτων $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$. Ειδικότερα, αν οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{v_i}$ είναι $\overrightarrow{v_i} = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$, τότε

$$\det\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών, γνωρίζουμε ότι αν αλλάξουμε θέση σε δύο γραμμές μιας ορίζουσας, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι όταν λέμε ότι το σύστημα συντεταγμένων $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ είναι δεξιόστροφο, παίζει μεγάλο ρόλο η σειρά με την οποία είναι γραμμένα τα διανύσματα.

1.7 Ασκήσεις

Άσκηση 1.7.1. *Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.*

Άσκηση 1.7.2 (Πυθαγόρειο Θεώρημα). *Έστω $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ αν και μόνο αν ισχύει $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.*

Άσκηση 1.7.3 (Νόμος του παραλληλογράμμου). *Έστω $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι ισχύει*

$$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = 2\|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\|\overrightarrow{y}\|^2.$$

Άσκηση 1.7.4. *Έστω $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\overrightarrow{x}$ και $\overrightarrow{y}$.*

Άσκηση 1.7.5. *Αν $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, αποδείξτε ότι*

$$\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2.$$

Άσκηση 1.7.6. *Έστω $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι*

$$\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| \sin\theta,$$

όπου θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{x}$ και $\overrightarrow{y}$.
Συμπεράνατε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{x}$ και $\overrightarrow{y}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = 0$.

Άσκηση 1.7.7. *(i) Αποδείξτε ότι το σύστημα συντεταγμένων $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι δεξιόστροφο.*

(ii) Αποδείξτε ότι το σύστημα συντεταγμένων $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι δεξιόστροφο.

Άσκηση 1.7.8. *Έστω $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι το σύστημα συντεταγμένων $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\}$ είναι δεξιόστροφο.*

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Τοπολογίας και ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$

2.1 Τοπολογία στον $\mathbb{R}^d$

Ορισμός 2.1.1. *Έστω* $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ *και* r *θετικός πραγματικός αριθμός. Η* ανοικτή σφαίρα κέντρου $\overrightarrow{a}$ και ακτίνας r *είναι το σύνολο*

$$S(\overrightarrow{a}, r) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| < r\}.$$

Η κλειστή σφαίρα κέντρου $\overrightarrow{a}$ και ακτίνας r *είναι το σύνολο*

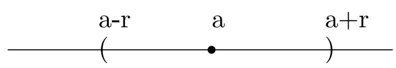
$$B(\overrightarrow{a}, r) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| \leq r\}.$$

Γεωμετρική αναπαράσταση των σφαιρών για $d = 1, 2, 3$.

• Όταν $d = 1$ είμαστε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Τότε, αν $a \in \mathbb{R}$ και $r > 0$ έχουμε

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r).$$

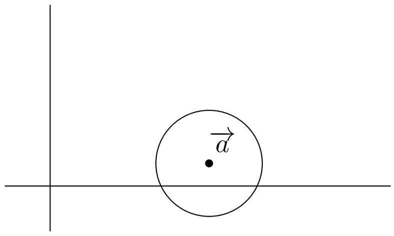
Δηλαδή, η ανοικτή σφαίρα κέντρου a και ακτίνας $r > 0$ είναι το ανοικτό διάστημα $(a - r, a + r)$. Ομοίως η κλειστή σφαίρα κέντρου a ακτίνας $r > 0$ είναι το κλειστό διάστημα $[a - r, a + r]$.



• Για $d = 2$ είμαστε στο $\mathbb{R}^2$. Αν $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $r > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} S(\overrightarrow{a}, r) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η ανοικτή σφαίρα κέντρου $\overrightarrow{a}$ και ακτίνας $r > 0$ είναι ο δίσκος κέντρου $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0)$ και ακτίνας $r > 0$ χωρίς να περιλαμβάνονται τα σημεία της περιφέρειας. Ομοίως, η κλειστή σφαίρα $B(\overrightarrow{a}, r)$ είναι ο δίσκος μαζί με τα σημεία της περιφέρειας.



• Όταν $d = 3$ είμαστε στο $\mathbb{R}^3$. Αν $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και $r > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} S(\overrightarrow{a}, r) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)\| < r\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < r\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r^2\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η ανοικτή σφαίρα κέντρου $\overrightarrow{a}$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το εσωτερικό της σφαίρας κέντρου $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνας $r > 0$ χωρίς να περιλαμβάνονται τα σημεία της επιφάνειας. Ομοίως, η κλειστή σφαίρα $B(\overrightarrow{a}, r)$ είναι το εσωτερικό της σφαίρας μαζί με τα σημεία της επιφάνειας.

Ορισμός 2.1.2. *Έστω A, B, Γ υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.*

1. *Το σύνολο A λέγεται* ανοικτό *στον $\mathbb{R}^d$ αν για κάθε $\overrightarrow{a} \in A$ υπάρχει $r > 0$, ώστε η ανοικτή σφαίρα $S(\overrightarrow{a}, r)$ να περιέχεται στο A.*

2. *Το σύνολο B λέγεται* κλειστό *στον $\mathbb{R}^d$ αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{R}^d \setminus B$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^d$.*

3. *Το σύνολο Γ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|\overrightarrow{x}\| < M$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in \Gamma$. Ισοδύναμα, το Γ είναι φραγμένο αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\Gamma \subseteq B(\overrightarrow{0}, M)$.*

Σημείωση. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ το οποίο είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^d$, τότε δεν συνεπάγεται εν γένει ότι το A είναι ανοικτό όταν το δούμε ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$. Για παράδειγμα, ας πάρουμε ένα ανοικτό διάστημα $A = (\alpha, \beta)$ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Τότε το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμως, το A δεν είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 2.1.3. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$.*

1. *Ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η σφαίρα $S(\overrightarrow{a}, r)$ να περιέχεται στο A. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A συμβολίζεται με A° και καλείται εσωτερικό του συνόλου. Παρατηρούμε ότι $A^\circ \subseteq A$.*

2. *Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^d$. Το $\overrightarrow{x_0}$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι*
$$(S(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \setminus \{\overrightarrow{x_0}\}) \cap A \neq \emptyset.$$
Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A το συμβολίζουμε με A'.
Αν το σημείο $\overrightarrow{a}$ ανήκει στο σύνολο A αλλά δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή $\overrightarrow{a} \in A$ και $\overrightarrow{a} \notin A'$, τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{a}$ είναι μεμονωμένο σημείο του A.

3. *Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^d$. Το $\overrightarrow{x_0}$ λέγεται σημείο επαφής του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $S(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Το σύνολο των σημείων επαφής του A συμβολίζεται με $\overline{A}$. Αποδεικνύεται ότι $\bar{A} = A' \cup A$.*

4. *Το $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^d$ λέγεται συνοριακό σημείο του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν τα παρακάτω*
$$S(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$
$$S(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^d \setminus A) \neq \emptyset.$$
Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$, η ανοικτή σφαίρα $S(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon)$ τέμνει και το σύνολο A και το συμπλήρωμά του. Το σύνολο των συνοριακών σημείων συμβολίζεται με ∂A ή με $\mathrm{bd}A$ και καλείται σύνορο του A. Αποδεικνύεται ότι $\partial A = \bar{A} \cap (\overline{\mathbb{R}^d \setminus A})$.

Σχετικά με τις έννοιες των ανοικτών και κλειστών συνόλων αναφέρουμε την επόμενη πρόταση (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Πρόταση 2.1.4.

1. *Η ανοιχτή σφαίρα $S(\overrightarrow{a}, r)$ ($\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^d, r > 0$) είναι ανοιχτό σύνολο.*

2. *Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$, ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες: A είναι κλειστό $\Leftrightarrow A' \subseteq A \Leftrightarrow A = \overline{A}$.*

3. *Η κλειστή σφαίρα $B((\overrightarrow{a}, r)$ ($\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^d, r \geq 0$) είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, ισχύει ότι $\overline{S(\overrightarrow{a}, r)} = B(\overrightarrow{a}, r)$ για κάθε $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^d$ και $r > 0$.*

4. *Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς $a_i \leq b_i$ για $i = 1, 2, \ldots, d$. Τότε ορίζουμε το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$:*
$$\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d.$$
Το σύνολο Π λέμε ότι είναι ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$. Το σύνολο αυτό είναι κλειστό.

2.2 Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^d$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$. Οι τιμές αυτής της συνάρτησης είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^d$ και τα συμβολίζουμε

$$f(n) = \overrightarrow{a}(n) = \overrightarrow{a_n} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και τιμές στο $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται *ακολουθία στον* $\mathbb{R}^d$. Στη συνέχεια για τις ακολουθίες δεν ακολουθούμε το συμβολισμό των συναρτήσεων. Λέμε για παράδειγμα, ότι έχουμε την ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^d$ ή γράφουμε $(\overrightarrow{a_n})_{n=1}^{\infty}$ ή γράφουμε απλώς $(\overrightarrow{a_n})$.

Κάθε όρος της ακολουθίας $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^d$. Επομένως, είναι μια d-άδα πραγματικών αριθμών. Δηλαδή θα έχει τη μορφή

$$\overrightarrow{a_n} = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d), \quad \text{όπου } a_n^i \in \mathbb{R} \quad \text{για κάθε } i$$

ή εναλλακτικά μπορούμε να συμβολίσουμε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{a_n}$ ως εξής

$$\overrightarrow{a_n} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{dn}), \quad \text{όπου } a_{in} \in \mathbb{R} \quad \text{για κάθε } i.$$

Ας γράψουμε τώρα αναλυτικά τους όρους της ακολουθίας $(\overrightarrow{a_n})$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_1} &= \quad (a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^d) \\
\overrightarrow{a_2} &= \quad (a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^d) \\
\overrightarrow{a_3} &= \quad (a_3^1, a_3^2, \ldots, a_3^d) \\
&\vdots \\
\overrightarrow{a_n} &= \quad (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι προκύπτουν d ακολουθίες πραγματικών αριθμών, ειδικότερα οι ακολουθίες $(a_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_n^d)_{n\in\mathbb{N}}$. Η ακολουθία $(a_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2, \ldots, d$, ονομάζεται η i-οστή συντεταγμένη ακολουθία της $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Υπακολουθίες

Θεωρούμε μια ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^d$ και μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Συμβολίζουμε τις τιμές της συνάρτησης ϕ ως εξής

$$\phi(1) = k_1, \ \phi(2) = k_2 \ \ldots \phi(n) = k_n \,\text{κοκ.}$$

Επειδή η ϕ είναι γνησίως αύξουσα, προκύπτει ότι $k_1 < k_2 < \ldots$. Θεωρούμε τώρα τους παρακάτω όρους της ακολουθίας $(\overrightarrow{a_n})$:

$$\overrightarrow{a_{k_1}}, \ \overrightarrow{a_{k_2}}, \ldots, \overrightarrow{a_{k_n}}, \ldots$$

Με αυτήν τη διαδικασία, προκύπτει από την αρχική ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ μια νέα ακολουθία, η $(\overrightarrow{a_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}} = (\overrightarrow{a_{k_1}}, \overrightarrow{a_{k_2}}, \ldots, \overrightarrow{a_{k_n}}, \ldots)$. Η νέα ακολουθία $(\overrightarrow{a_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ λέμε ότι είναι μια υπακολουθία της $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Σύγκλιση ακολουθιών

Θεωρούμε μια ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $\overrightarrow{a}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι η ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\overrightarrow{a}$ και γράφουμε $\overrightarrow{a_n} \to \overrightarrow{a}$ ή $\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{a}$ αν και μόνο αν η ακολουθία των πραγμτικών αριθμών $(\|\overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0.

Αν θυμηθούμε τον ορισμό της σύγκλισης για ακολουθίες πραγματικών αριθμών, μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_n} \to \overrightarrow{a} &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a}\| \to 0 \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } \|\overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a}\| < \epsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0 \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } \overrightarrow{a_n} \in S(\overrightarrow{a}, \epsilon) \text{ για κάθε } n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Η επόμενη πρόταση συνδέει τη σύγκλιση μιας ακολουθίας του $\mathbb{R}^n$ με τη σύγκλιση των συνταταγμένων ακολουθιών.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$, με $\overrightarrow{a_n} = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και έστω $\overrightarrow{a} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^d$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. $\lim_n \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{a}$

2. *Ισχύει $\lim_n a_n^j = b_j$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, d$.*

Απόδειξη.
1. $\Rightarrow$ *2.* Παρατηρούμε ότι για κάθε $j = 1, 2, \ldots, d$ ισχύει ότι

$$0 \leq |a_n^j - b_j| \leq \|\overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a}\|.$$

Από υπόθεση $\|\overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a}\| \to 0$. Άρα, από κριτήριο παρεμβολής, $|a_n^j - b_j| \to 0$. Συνεπώς, $\lim_n a_n^j = b_j$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, d$.
2. $\Rightarrow$ *1.* Παρατηρούμε ότι

$$\|\overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a}\| = \left[(a_n^1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n^d - b_d)^2\right]^{1/2}.$$

Από υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $|a_n^j - b_j| \to 0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, d$. Συνεπώς,

$$\left[(a_n^1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n^d - b_d)^2\right]^{1/2} \to 0,$$

δηλαδή

$$\|\overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a}\| \to 0$$

.

Σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση, η μελέτη της σύγκλισης μιας ακολουθίας στον $\mathbb{R}^d$ ανάγεται στη σύγκλιση d το πλήθος ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Δίνουμε δύο παραδείγματα.

Παραδείγματα.

1. Θεωρούμε την ακολουθία του $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{a_n} = (\sqrt[n]{n}, \frac{n}{2n+1}, n^2 \log(1 + \frac{1}{n^2})).$$

Έχουμε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$ και $n^2 \log(1+\frac{1}{n^2}) \to 1$ (γιατί·). Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$\overrightarrow{a_n} \to (1, \frac{1}{2}, 1).$$

2. Θεωρούμε την ακολουθία του $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{a_n} = (n^2, \sqrt[n]{2}).$$

Παρατηρούμε ότι $n^2 \to \infty$. Συνεπώς, η ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

Επιπλέον χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.2.1, μπορούμε να αποδείξουμε ότι πολλές από τις ιδιότητες που γνωρίσουμε για ακολουθίες πραγματικών αριθμών ισχύουν και στην περίπτωση των ακολουθιών του $\mathbb{R}^d$. Έτσι, ισχύει η επόμενη πρόταση η οποία συνδέει τη σύγκλιση ακολουθιών με τις πράξεις στον $\mathbb{R}^d$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Πρόταση 2.2.2. *Έστω $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overrightarrow{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες του $\mathbb{R}^d$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\overrightarrow{a_n} \to \overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{n} \to \overrightarrow{b}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα*

1. $\overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{b_n} \to \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$
2. $\lambda\overrightarrow{a_n} \to \lambda\overrightarrow{a}$.

Παρατήρηση. Δεν ορίζεται διαίρεση μεταξύ διανυσμάτων. Έτσι η γνωστή ιδιότητα για το πηλίκο δύο ακολουθιών πραγματικών αριθμών (αν $a_n \to a$ και $b_n \to b \neq 0$, τότε $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$) δεν έχει κάποια αντίστοιχη ιδιότητα στον $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$).

Επιπλέον, ισχύει η επόμενη πρόταση. (Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2.2.1 και την αντίστοιχη ιδιότητα για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.)

Πρόταση 2.2.3. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ είναι φραγμένη.*

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες στον $\mathbb{R}^d$.

Θεώρημα 2.2.4. *Κάθε φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^d$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη.
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στη διάσταση d.
Βάση της επαγωγής $d = 1$. Από το λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής, γνωρίζουμε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα, το θεώρημα ισχύει για $d = 1$.
Επαγωγικό Βήμα. Δεχόμαστε ότι ισχύει το αποτέλεσμα για κάποιο $d \geq 1$, δηλαδή κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ έχει συγκλίουσα υπακολουθία. Θα δείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και στον $\mathbb{R}^{d+1}$.
Έστω, λοιπόν, $(\overrightarrow{a_n})_n$ μια φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^{d+1}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γράφουμε ως συνήθως $\overrightarrow{a_n} = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d, a_n^{d+1})$. Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γράφουμε το $\overrightarrow{a_n}$ ως εξής:

$$\overrightarrow{a_n} = (\overrightarrow{b_n}, a_n^{d+1}),$$

όπου $\overrightarrow{b_n} = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d) \in \mathbb{R}^d$. Η ακολουθία $(\overrightarrow{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο είναι μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ η οποία είναι φραγμένη (αφού η $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη). Από την επαγωγική υπόθεση, έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $\overrightarrow{b_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(\overrightarrow{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^d$. Άρα, $(\overrightarrow{b_{k_n}} \to \overrightarrow{b}$.
Παίρνουμε τώρα την υπακολουθία $(a_{k_n}^{d+1})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n^{d+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Η $(a_{k_n}^{d+1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Γνωρίζουμε επομένως, ότι υπάρχει μια υπακολουθία $(a_{k_{N_n}}^{d+1})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_{k_n}^{d+1})_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$.
Επειδή $\overrightarrow{b_{k_n}} \to \overrightarrow{b}$, αν πάρουμε την υπακολουθία $(\overrightarrow{b_{k_{N_n}}})_n$ έχουμε ότι συγκλίνει και αυτήν στο ίδιο όριο. Συνεπώς,

$$\overrightarrow{b_{k_{N_n}}} \to \overrightarrow{b} \quad \text{και} \quad a_{k_n}^{d+1} \to a.$$

Θεωρούμε την υπακολουθία $(\overrightarrow{a_{k_{N_n}}})_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε:

$$\overrightarrow{a_{k_{N_n}}} = (\overrightarrow{b_{k_{N_n}}}, a_{k_{N_n}}^{d+1}) \to (\overrightarrow{b}.a) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Επομένως, η $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη του θεωρήματος.

Τέλος, αναφέρουμε την παρακάτω πρόταση η οποία μας δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων και των σημείων συσσώρευσης με ακολουθίες.

Πρόταση 2.2.5. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Το σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $\overrightarrow{a_n} \to \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^d$, έχουμε ότι $\overrightarrow{a} \in A$.*

2. *Ένα σημείο $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^d$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A με $\overrightarrow{a_n} \neq \overrightarrow{x_0}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{a_n} \to \overrightarrow{x_0}$.*

2.3 Συμπαγή σύνολα

Ορισμός 2.3.1. *Έστω K υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Το K λέγεται* **συμπαγές** *αν για κάθε ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ του K υπάρχει υπακολουθία $(\overrightarrow{a_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ και στοιχείο $\overrightarrow{a}$ του K, ώστε $\overrightarrow{a_{k_n}} \to \overrightarrow{a}$.*

Παρατήρηση. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται ένα σημείο του παραπάνω ορισμού. Για να είναι το σύνολο K συμπαγές δεν αρκεί κάθε ακολουθία του K να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Πρέπει επιπλέον το όριο της υπακολουθίας να ανήκει στο σύνολο K.

Θεώρημα 2.3.2. *Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^d$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη.
($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το K είναι συμπαγές και θα δείξουμε ότι είναι κλειστό και φραγμένο.

Καταρχάς, για να δείξουμε ότι είναι κλειστό, χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό (2) της Πρότασης 2.2.5: αρκεί να πάρουμε μια ακολουθία $(\overrightarrow{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ του K η οποία συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^d$ και να δείξουμε ότι $\overrightarrow{b} \in K$. Πράγματι, αφού $(\overrightarrow{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο K και το K είναι συμπαγές, έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(\overrightarrow{b_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(\overrightarrow{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και στοιχείο $\overrightarrow{a}$ του K ώστε $\overrightarrow{b_{k_n}} \to \overrightarrow{a}$. Όμως η $(\overrightarrow{b_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(\overrightarrow{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και άρα $\overrightarrow{b_{k_n}} \to \overrightarrow{b}$. Συνεπώς, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \in K$. Άρα, το K είναι κλειστό.

Θα δείξουμε τώρα ότι το K είναι φραγμένο. Πράγματι, αν το K δεν είναι φραγμένο, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διάνυσμα $\overrightarrow{a_n} \in K$ ώστε $\|\overrightarrow{a_n}\| \geq n$. Όμως το K είναι συμπαγές. Άρα, για την ακολουθία $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπάρχει υπακολουθία $(\overrightarrow{a_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ του K. Ειδικότερα, η $(\overrightarrow{a_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη (ως συγκλίνουσα). Συνεπώς, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|\overrightarrow{a_{k_n}}\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$n \leq k_n \leq \|\overrightarrow{a_{k_n}}\| \leq M \quad \text{για κάθε} n \in \mathbb{N}.$$

Καταλήξαμε συνεπώς σε άτοπο. Άρα, το K είναι φραγμένο.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο και θα δείξουμε ότι είναι συμπαγές.

Έστω $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο σύνολο K. Εφόσον το K είναι φραγμένο, έπεται ότι η $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, προκύπτει ότι η $(\overrightarrow{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επομένως υπάρχουν υπακολουθία $(\overrightarrow{a_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ και $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^d$ ώστε $\overrightarrow{a_{k_n}} \to \overrightarrow{a}$. Έχουμε όμως επιπλέον ότι το K είναι κλειστό σύνολο. Η $(\overrightarrow{a_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο K και συγκλίνει στο διάνυσμα $\overrightarrow{a}$. Από την Πρόταση 2.2.5, έπεται ότι $\overrightarrow{a} \in K$. Άρα, κάθε ακολουθία του K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K. Συνεπώς, το K είναι συμπαγές.

Κεφάλαιο 3

Συναρτήσεις μεταξύ Ευκλείδειων χώρων, Καμπύλες και επιφάνειες στον $\mathbb{R}^n$

3.1 Συναρτήσεις μεταξύ Ευκλείδειων χώρων

Βασικό αντικείμενο της μελέτης μας είναι οι συναρτήσεις μεταξύ Ευκλειδείων χώρων, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ή γενικότερα της μορφής $\overrightarrow{f} : A \to \mathbb{R}^m$ όπου A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Σε αυτήν την ενότητα θα αναφέρουμε κάποια εισαγωγικά στοιχεία για συναρτήσεις και η συστηματική μελέτη τους θα ξεκινήσει στο επόμενο κεφάλαιο.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $\overrightarrow{f} : A \to \mathbb{R}^m$ ($A \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό), τότε κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{x}$ του A απεικονίζεται μέσω της $\overrightarrow{f}$ σε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ του $\mathbb{R}^m$. Εφόσον $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}^m$, έχουμε ότι το $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ είναι ένα διάνυσμα με m συντεταγμένες οι οποίες εξαρτώνται από το $\overrightarrow{x}$ και επομένως μπορούμε να γράφουμε

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = (f_1(\overrightarrow{x}), f_2(\overrightarrow{x}), \ldots, f_m(\overrightarrow{x})).$$

Παρατηρούμε ότι ορίζονται με αυτόν τον τρόπο m το πλήθος συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο $\mathbb{R}$:

$$f_1, 2_2, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}.$$

Όπως είναι αναμενόμενο (και θα φανεί στα επόμενα κεφάλαια) οι ιδιότητες της $\overrightarrow{f}$ καθορίζονται από τις ιδιότητες αυτών των *συντεταγμένων συναρτήσεων* $f_1, f_2, \ldots, f_m$

Θα δούμε τώρα κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

Για $n = 1$ και $m = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μια πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής $f\colon A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Για $n = 1$ και $m \geq 2$. Σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε συνήθως τη συνάρτηση με $\overrightarrow{r}\colon A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ και λέμε ότι είναι μια διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής (όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν είναι συνεχής λέμε ότι είναι μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^m$). Η συνάρτηση $\overrightarrow{r}$ 'αποτελείται' από m το πλήθος συντεταγμένες συναρτήσεις

$$\overrightarrow{r}\colon A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$$

$$t \mapsto \overrightarrow{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_m(t)$$

όπου $r_1, r_2, \ldots, r_m\colon A \to \mathbb{R}$.

Στην ειδική περίπτωση $m = 2$ συνήθως συμβολίζουμε $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, ενώ στην ειδική περίπτωση $m = 3$ συμβολίζουμε $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Για $n \geq 2$ και $m = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μια συνάρτηση $f\colon A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ η οποία παίρνει κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ και το απεικονίζει σε έναν πραγματικό αριθμό $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$:

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση f σε αυτήν την περίπτωση είναι μια πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Πολλές φορές την ονομάζουμε **βαθμωτό πεδίο**.

Για $n, m \geq 2$. Αυτή είναι η πιο γενική περίπτωση. Εδώ έχουμε μια συνάρτηση $\overrightarrow{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση παίρνει κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ και το απεικονίζει σε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}^m$, όπου

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών ή **διανυσματικό πεδίο**.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f\colon A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τιμές στο $\mathbb{R}$. Το* **γράφημα** *της f είναι το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:*

$$G_f = \{(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) \ : \ \overrightarrow{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Για παράδειγμα, αν $n = 1$, τότε έχουμε μια συνάρτηση $f\colon A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Το γράφημα της συνάρτησης είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$:

$$G_f \, \{(x, f(x)) \ : \ x \in A\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Επίσης, για $n = 2$, έχουμε μια συνάρτηση

$$f\colon A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y).$$

Το γράφημα της συνάρτησης είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$:

$$G_f \, \{(x, y, f(x, y)) \; : \; (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Ορισμός 3.1.2. *Έστω $f\colon A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών και έστω $c \in \mathbb{R}$. Τότε το σύνολο*

$$\Sigma_c = \{\overrightarrow{x} \in A \; : \; f(\overrightarrow{x}) = c\}$$

ονομάζεται **σύνολο στάθμης της συνάρτησης** f.

Παραδείγματα.
(1) Για $n = 1$**.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Αν $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο στάθμης της f είναι $\Sigma_c = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = c\}$. Παρατηρούμε ότι αν $|c| > 1$, τότε $\Sigma_c = \emptyset$. Αν $|c| \leq 1$, τότε Σ_c είναι ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, που περιεχει τις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = c$. Για παράδειγμα

$$\Sigma_0 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} = \{k\pi \, : \, k \in \mathbb{Z}\}.$$

(2) Για $n = 2$**.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = -x - y$. Αν $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο στάθμης της f είναι $\Sigma_c = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -x - y = c\big\}$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο στάθμης είναι μια ευθεία στο επίπεδο. (Για παράδειγμα, για $c = 1$, έχουμε την ευθεία $y = -x - 1$.)
(3) Για $n = 2$**.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 - y^2$. Αν $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο στάθμης της f είναι $\Sigma_c = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - y^2 = c\big\}$. Παρατηρούμε ότι για $c = 0$ το σύνολο στάθμης Σ_0 αποτελείται από δύο ευθείες στο επίπεδο

$$\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x = y \text{ ή } x = -y\}.$$

Αν $c \neq 0$, τότε το σύνολο στάθμης $\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - y^2 = c\}$ αποτελείται από τους δύο κλάδους μιας ισοσκελούς υπερβολής. Ειδικότερα, αν $c > 0$ οι δύο κλάδοι της υπερβολής τέμνουν τον άξονα των x (π.χ. για $c = 1$ έχουμε $x^2 - y^2 = 1$), ενώ για $c < 0$ οι κλάδοι της υπερβολής τέμνουν τον άξονα των y (π.χ. για $c = -1$, έχουμε $y^2 - x^2 = 1$).
(4) Για $n = 3$**.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Το σύνολο στάθμης της f είναι $\Sigma_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c\}$. Παρατηρούμε ότι αν $c < 0$, τότε το αντίστοιχο σύνολο στάθμης Σ_c είναι κενό. Αν $c = 0$, τότε το σύνολο στάθμης είναι ένα μονοσύνολο, $\Sigma_0 = \{(0, 0, 0)\}$. Τέλος, αν $c > 0$, τότε το σύνολο στάθμης είναι η επιφάνεια της σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα c, $\Sigma_c = \{(x, y, z) \, : \, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c\}$.

3.2 Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 3.2.1. *Μια* **παραμετρική καμπύλη στον** $\mathbb{R}^n$ *είναι μια συνάρτηση*

$$\overrightarrow{r}\colon I \to \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \overrightarrow{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$$

όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ *είναι διάστημα στο* $\mathbb{R}$ *και οι συντεταγμένες συναρτήσεις* $r_i\colon I \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχείς για* $i = 1, 2, \ldots, n$.
Η εικόνα αυτής της συνάρτησης $\Gamma = \overrightarrow{r}(I) \subset \mathbb{R}^n$ *ονομάζεται* **ίχνος της καμπύλης**.

Στην ειδική περίπτωση $n = 2$ έχουμε μια καμπύλη στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και συνήθως συμβολίζουμε $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Σε κάποιες περιπτώσεις, το ίχνος μιας καμπύλη Γ στο επίπεδο μπορεί να είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $f\colon I \to \mathbb{R}$ ή η καμπύλη στάθμης μιας συνάρτησης $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Στην ειδική περίπτωση $n = 3$, έχουμε μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$, την οποία συνήθως συμβολίζουμε με $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$. Σε κάποιες περιπτώσεις, το ίχνος της καμπύλη μπορεί να είναι η τομή δύο επιφανειών (για παράδειγμα ενός επιπέδου με μια σφαίρα).

Σημείωση. Υπάρχουν καμπύλες $\overrightarrow{r}\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ οι οποίες είναι επί του $[0,1]^2$. Δηλαδή με μια καμπύλη μπορούμε να περάσουμε από όλα τα σημεία του τετραγώνου $[0,1]^2$. Ομοίως υπάρχουν καμπύλες $\overrightarrow{r}\colon [0,1] \to [0,1]^3$ που είναι επί του $[0,1]^3$, δηλαδή με μια καμπύλη περνάμε από όλα τα σημεία του κύβου $[0,1]^3$. Για $n = 2$ η κατασκευή έγινε από τον Peano ενώ για $n = 3$ η κατασκευή έγινε από τον Hilbert.

Το ίχνος μιας καμπύλης μπορεί να περιγράφεται με διάφορους τρόπους. Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να βρούμε μια κατάλληλη συνάρτηση $\overrightarrow{r}$ η οποία να δίνει το ζητούμενο ίχνος. Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα (1) Θεωρούμε δύο σημεία $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$ του $\mathbb{R}^n$ με $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$ και παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $\overrightarrow{a}$ και πέρας το $\overrightarrow{b}$, το οποίο συμβολίζουμε με $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$. Μια παραμέτρηση αυτής της καμπύλης είναι η εξής:

$$\overrightarrow{r}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{a} + t(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}).$$

Το ίχνος της καμπύλης $\overrightarrow{r}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα.

Παράδειγμα (2) Στο επίπεδο δίνεται ο κύκλος $\Gamma\{(x,y \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = a^2\}$ με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα $a > 0$. Παρατηρούμε ότι ο κύκλος δεν είναι γράφημα κάποιας συνάρτησης $f\colon I \to \mathbb{R}$. Ωστόσο ο κύκλος είναι η καμπύλη στάθμης μιας συνάρτησης $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Πράγματι, αρκεί να πάρουμε $F(x,y) = x^2 + y^2$. Τότε ο κύκλος Γ είναι το σύνολο στάθμης $\Gamma = \Sigma_{a^2}$.

Για να βρούμε μια παραμέτρηση του κύκλου (δηλαδή για να βρούμε μια συνάρτηση $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^2$ που να περιγράφει το ζητούμενο ίχνος) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως παράμετρο τη γωνία t που σχηματίζει η ακτίνα του κύκλου με τον θετικό ημιάξονα των x. Τότε παίρνουμε

$$\vec{r}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t).$$

Για την παραπάνω καμπύλη $\vec{r}$ το ίχνος της είναι ακριβώς ο ζητούμενος κύκλος Γ. Άρα, έχουμε μια παραμέτρηση του κύκλου.

Επιπλέον, αν πάρουμε στη συνάρτηση

$$\vec{r_1}: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (a\cos 2t, a\sin 2t)$$

τότε παρατηρούμε ότι η εικόνα της $\vec{r_1}$ είναι πάλι ο κύκλος Γ. Έτσι λοιπόν, έχουμε την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση. Αν μας δίνεται το ίχνος μιας καμπύλης Γ, τότε μπορούμε συνήθως να το παραμετρικοποιήσουμε με πολλούς τρόπους.

Παράδειγμα (3) Δίνεται στο xy-επίπεδο το ημικύκλιο $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = a^2$ και $y \geq 0\}$. Παρατηρούμε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, ότι το ημικύκλιο είναι το σύνολο στάθμης μιας συνάρτησης F. Πράγματι, αρκεί να πάρουμε $F: \{(x,y) : y \geq 0\} \to \mathbb{R}^2\}$ με $F(x,y) = x^2 + y^2$. Τότε το σύνολο στάθμης Σ_{a^2} της F είναι το ημικύκλιο Γ.

Σε αυτήν όμως την περίπτωση έχουμε ότι το ημικύκλιο Γ είναι και γράφημα μιας συνάρτησης. Αρκεί να πάρουμε την $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Τότε το γράφημα G_f της f είναι ακριβώς το ημικύκλιο Γ.

Για να πάρουμε μια παραμέτρηση του ημικυκλίου Γ, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καμπύλη $\vec{r}$ του προηγούμενου παραδείγματος, την οποία τώρα θα περιορίσουμε στο διάστημα $[0, \pi]$:

$$\vec{r}: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t).$$

Το ίχνος της καμπύλης $\vec{r}$ είναι το ημικύκλιο Γ. Ωστόσο σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να βρούμε και μια ακόμη παραμέτρηση του Γ ως εξής:

$$\vec{r_1}: [-a, a] \to \mathbb{R}^2$$

$$q \mapsto \vec{r_1}(x) = (x, \sqrt{a^2 - x^2}).$$

Το ίχνος της καμπύλης $\vec{r_1}$ είναι ακριβώς το ημικύκλιο Γ. Παρατηρούμε και πάλι ότι το ίχνος Γ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί με πολλούς τρόπους.

Παράδειγμα (4) Γενικότερα, αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon I \to \mathbb{R}$ όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, τότε το γράφημα της συνάρτησης $G_f = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως εξής:

$$\vec{r}\colon I \to \mathbb{R}^2$$

$$q \mapsto \vec{r}(x) = (x, f(x)).$$

Το ίχνος της καμπύλης $\vec{r}$ είναι το γράφημα της f.

Παράδειγμα (5) Στο xy-επίπεδο δίνεται η έλλειψη $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{+}b^2 = 1\}$, όπου $a > 0$ και $b > 0$. Η έλλειψη Γ δεν είναι γράφημα κάποιας συνάρτησης $f\colon I \to \mathbb{R}$. Ωστόσο είναι το σύνολο στάθμης μιας συνάρτησης F. Πράγματι, αρκεί να πάρουμε $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{+}b^2$. Τότε έχουμε ότι $\Gamma = \Sigma_1$.

Μια παραμέτρηση της έλλειψης Γ είναι η εξής:

$$\vec{r}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Παράδειγμα (6) Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$, συνεπώς η παραμέτρηση θα έχει τη μορφή $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Θεωρούμε, λοιπόν, στον $\mathbb{R}^3$ την σφαίρα $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα $a > 0$ και παίρνουμε την τομή της με το επίπεδο $z = b$ $(0 < b < a)$. Η τομή είναι ένας κύκλος στον $\mathbb{R}^3$ με κέντρο το σημείο $(0,0,b)$ και ακτίνα $\sqrt{a^2 - b^2}$. (Για να βρείτε την ακτίνα, πάρτε ένα σημείο B του παραπάνω κύκλου, για παράδειγμα το σημείο που έχει $x = 0$, $z = b$, και παρατηρείστε ότι τα σημεία $O(0,0,0)$, $A(0,0,b)$ και B σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.)

Μια παραμέτρηση αυτού του κύκλου είναι η ακόλουθη

$$\vec{r}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (\sqrt{a^2 - b^2}\cos t, \sqrt{a^2 - b^2}\sin t, b).$$

Το ίχνος της καμπύλης $\vec{r}$ είναι ο ζητούμενος κύκλος.

3.3 Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 3.3.1. *Μια 2-διάστατη παραμετρική επιφάνεια στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια συνάρτηση*

$$\vec{r}\colon I \times J \to \mathbb{R}^n$$

$$\vec{r}(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), \dots, r_n(u,v))$$

όπου $I, J \subseteq \mathbb{R}$ είναι διαστήματα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και οι συντεταγμένες συναρτήσεις $r_k\colon I \times J \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$.

Λόγω εποπτείας θα ασχοληθούμε κυρίως με επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$. Σε αυτήν την περίπτωση η επιφάνεια μπορεί να είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ή το σύνολο στάθμης μιας συνάρτησης $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Δίνουμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα (1) Θεωρούμε το άνω ημισφαίριο $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0\}$, όπου $a > 0$. Το άνω ημισφαίριο είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $f\colon D \to \mathbb{R}$, όπου D είναι ο δίσκος $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ στο $\mathbb{R}^2$ και

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Προκειμένου να βρούμε μια παραμέτρηση αυτής της επιφάνειας, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι είναι γράφημα συνάρτησης. Έτσι έχουμε την ακόλουθη παραμέτρηση

$$\overrightarrow{r} : D \to \mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}).$$

(Παρατηρήστε ότι στην παραπάνω παραμέτρηση το πεδίο ορισμού είναι ο δίσκος D και όχι το γινόμενο δύο διαστημάτων. Γενικά, ο ορισμός είναι ελαστικός σε αυτό το σημείο. Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, θα αναφέρουμε μόνο ότι το πεδίο ορισμού της παραμέτρησης $\overrightarrow{r}$ μπορεί να είναι ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο ή η κλειστή θήκη ενός ανοικτού και συνεκτικού συνόλου.)

Μια δεύτερη παραμέτρηση του ημισφαιρίου είναι η ακόλουθη:

$$\overrightarrow{r} : [0, 2\pi] \times [0, a] \to \mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{r}(\theta, z) = (\sqrt{a^2 - z^2 \cos\theta}, \sqrt{a^2 - z^2 \sin\theta}, z).$$

Η εικόνα της παραπάνω απεικόνισης $\overrightarrow{r}$ είναι ακριβώς το ημικύκλιο S.

Τέλος, να παρατηρήσουμε ότι το ημικύκλιο S είναι και το σύνολο στάθμης μιας συνάρτησης. Συγκεκριμένα, αν πάρουμε $F\colon \{(x, y, z) : z \geq 0\} \to \mathbb{R}$ με $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, τότε $S = \Sigma_{a^2}$.

Παράδειγμα (2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x, y, z) = x^2 + y^2$ όπου $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, b]$. Για κάποιο $a > 0$, παίρνουμε το σύνολο στάθμης της F

$$\Sigma_{a^2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, b] : F(x, y, z) = a^2\}.$$

Το σύνολο στάθμης Σ_{a^2} είναι ένας κύλινδρος, του οποίου η μία βάση βρίσκεται στο xy-επίπεδο, η άλλη βάση στο επίπεδο $z = b$ και η ακτίνα βάσης είναι ίση με a.

Μια παραμέτρηση του παραπάνω κυλίνδρου είναι η:

$$\overrightarrow{r} : [0, 2\pi] \times [0, b] \to \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{r}(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z).$$

Σημείωση: Γενικά, ας θεωρήσουμε μια επιφάνεια S η οποία είναι το σύνολο στάθμης μιας συνάρτησης $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$F(x, y, z) = g(x, y)$$

(δηλαδή οι τιμές της F είναι συνάρτηση μόνο των x και y, όπως η συνάρτηση F του προηγούμενου παραδείγματος), ή μιας συνάρτησης

$$F(x, y, z) = h(y, z) \quad \text{ή } F(x, y, z) = \phi(x, z)$$

ή ακόμη και μιας συνάρτησης που οι τιμές της καθορίζονται από μια μόνο μεταβλητή, δηλαδή

$$F(x, y, z) = g_1(x) \quad \text{ή } F(x, y, z) = g_2(y) \quad \text{ή } F(x, y, z) = g_3(z).$$

Τότε, η επιφάνεια S καλείται *κυλινδρική*.

3.4 Ευθείες και υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$

Ευθείες στον $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{b}$ του $\mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{b}$ παράγει έναν υπόχωρο X του $\mathbb{R}^n$ διάστασης 1:

$$X = \{t\overrightarrow{b} \, : \, t \in \mathbb{R}\}.$$

Αυτόν τον διανυσματικό υπόχωρο τον ονομάζουμε **ευθεία που περνά από το $\overrightarrow{0}$ και $\overrightarrow{b}$**.

Παίρνουμε τώρα και ένα διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ του $\mathbb{R}^n$ και σχηματίζουμε το εξής σύνολο:

$$H = \overrightarrow{a} + X = \{\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \, : \, t \in \mathbb{R}\}.$$

Το σύνολο H καλείται η ευθεία που περιέχει το $\overrightarrow{a}$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{b}$. Το H δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Παρόλα αυτά ορίζουμε διάσταση του H: $\dim H := \dim X = 1$.

Παράδειγμα. Θα δούμε την περίπτωση $n = 2$. Παίρνουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ του $\mathbb{R}^2$. Αφού $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, έχουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα b_1, b_2 είναι διάφορο του μηδενός. Έστω $b_1 \neq 0$. Παίρνουμε και ένα διάνυσμα $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0)$. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η ευθεία που περιέχει το $\overrightarrow{a}$ και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{b}$ είναι το σύνολο

$$\{\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \, : \, t \in \mathbb{R}\}$$

το οποίο γράφεται και ως εξής

$$\{(x_0 + tb_1, y_o + tb_2) \, : \, t \in \mathbb{R}\}.$$

Αν (x, y) είναι τυχαίο σημείο του παραπάνω συνόλου, υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + tb_1 \\ y = y_0 + tb_2 \end{array} \right\}$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς t βρίσκουμε $t = \frac{x-x_0}{b_1}$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση, βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου (x, y) της ευθείας συνδέονται μεταξύ τους με την ακόλουθη σχέση:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{b_1} b_2$$

Η τελευταία σχέση μετά από πράξεις γράφεται

$$y - y_0 = \frac{b_2}{b_1}(x - x_0)$$

που είναι η γνωστή εξίσωση της ευθείας στο επίπεδο που περνά από το σημείο (x_0, y_0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ (άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{b_2}{b_1}$).

Υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$
Στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρήσαμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$ διάστασης 1 και με τη βοήθεια αυτών ορίσαμε τις ευθείες στον $\mathbb{R}^n$. Τώρα θα πάρουμε το άλλο άκρο, δηλαδή θα δούμε τι συμβαίνει με τους υπόχωρους διάστασης $n - 1$.
Θεωρούμε, λοιπόν, $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_{n-1}}$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και παίρνουμε τον υπόχωρο που παράγουν, δηλαδή:

$$X = \{t_1\overrightarrow{b_1} + t_2\overrightarrow{b_2} + \ldots + t_{n-1}\overrightarrow{b_{n-1}} \,:\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Ο X είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n - 1$ και καλείται **υπερεπίπεδο** που περνά από τα $\overrightarrow{0}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n - 1}$.
Παίρνουμε τώρα και ένα διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ του $\mathbb{R}^n$ και θεωρούμε τη μεταφορά του υπερεπιπέδου X κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$, δηλαδή έχουμε το σύνολο

$$Y = \overrightarrow{a} + X = \{\overrightarrow{a} + t_1\overrightarrow{b_1} + t_2\overrightarrow{b_2} + \ldots + t_{n-1}\overrightarrow{b_{n-1}} \,:\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Το Y είναι το **υπερεπίπεδο** που περνά από το $\overrightarrow{a}$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_{n-1}}$. Τέλος, ορίζουμε

$$\dim Y = \mathrm{X} = n - 1.$$

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα (1) Στην ειδική περίπτωση $n = 2$, έχουμε ότι ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^2$ προέρχεται από μεταφορά ενός υποχώρου διάστασης $n - 1 = 1$. Συνεπώς, τα υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^2$ συμπίπτουν με τις ευθείες του επιπέδου.

Παράδειγμα (2) Θεωρούμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ και $\overrightarrow{\gamma} = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ του $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Παίρνουμε και ένα ακόμη διάνυσμα $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0, z_0)$ του $\mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το υπερεπίπδεο που περνά από το $\overrightarrow{a}$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{\gamma}$ είναι το

$$Y = \{\overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b} + \mu \overrightarrow{\gamma} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

το οποίο γράφεται και ως εξής

$$Y = \{(x_0 + \lambda b_1 + \mu\gamma_1, y_0 + \lambda b_2 + \mu\gamma_2 + z_0 + \lambda b_3 + \mu\gamma_3\}.$$

Αν (x, y, z) είναι τυχαίο σημείο του υπερεπιπέδου, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ, μ τέτοιοι ώστε

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x_0 + \lambda b_1 + \mu\gamma_1 \\ y = y_0 + \lambda b_2 + \mu\gamma_2 \\ z = z_0 + \lambda b_3 + \mu\gamma_3 \end{array} \right\}$$

Ξέρουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό συνεπάγεται ότι μία τουλάχιστον από τις ακόλουθες ορίζουσες είναι μη μηδενική:

$$\begin{vmatrix} b_1 & \gamma_1 \\ b_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_2 & \gamma_2 \\ b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & \gamma_1 \\ b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Έστω ότι $\begin{vmatrix} b_1 & \gamma_1 \\ b_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$, τότε στο παραπάνω σύστημα μπορούμε τις δύο πρώτες εξισώσεις να τις λύσουμε ως προς λ και μ. Για παράδειγμα έχουμε

$$\lambda = \frac{D_\lambda}{D} \quad \mu = \frac{D_\mu}{D}$$

όπου

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & \gamma_1 \\ b_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \quad D_\lambda = \begin{vmatrix} x - x_0 & \gamma_1 \\ y - y_0 & \gamma_2 \end{vmatrix} \quad D_\mu = \begin{vmatrix} b_1 & x - x_0 \\ b_2 & z - z_0 \end{vmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου (x, y, z) του υπερεπιπέδου ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

όπου A, B είναι πραγματικοί αριθμοί.

Εξίσωση υπερεπιπέδου συναρτήσει κάθετου διανύσματος

Έστω X ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-1$, δηλαδή ένα υπερεπίπεδο που περνά από το $oar0$. Από τη γραμμική άλγεβρα, γνωρίζουμε ότι αν πάρουμε ένα διάνυσμα $oarv$ του $\mathbb{R}^n$ που δεν ανήκει στον υπόχωρο X, τότε ο $\mathbb{R}^n$ είναι το ευθύ άθροισμα

$$\mathbb{R}^n = X \oplus \langle \overrightarrow{v} \rangle.$$

Επιπλέον, το διάνυσμα *oarv* μπορούμε να το επιλέξουμε κάθετο στον υπόχωρο Q. Τότε ισχύει ότι

$$X = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{v} = 0\}.$$

Συνεπώς, αν πάρουμε ένα διάνυσμα $oara \in \mathbb{R}^n$, τότε για το υπερεπίπεδο $Y = \overrightarrow{a} + X$ ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} Y &= \overrightarrow{a} + X = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{x} \,:\, \overrightarrow{x} \in X\} \\ &= \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{x} \,:\, \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{v} = 0\} \quad (\text{θέτουμε } \overrightarrow{a} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}) \\ &= \{\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \,:\, (\overrightarrow{y} - \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v} = 0\} \\ &= \{\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \,:\, \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v}\} \quad (\text{θέτουμε } \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} = c \in \mathbb{R}) \\ &= \{\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \,:\, \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{v} = c\} \end{aligned}$$

Καταλήξαμε λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι τα σημεία $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ του υπερεπιπέδου Y, που περνά από το $\overrightarrow{a}$ και είναι κάθετο στο $\overrightarrow{v}$, είναι τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots + y_n v_n = c,$$

όπου $c = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$.

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε επιπλέον ότι ένα υπερεπίπεδο Y είναι το σύνολο στάθμης μιας μη μηδενικής γραμμικής συνάρτησης. Πράγματι, αν πάρουμε $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots + y_n v_n = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{v}$, τότε η F είναι γραμμική, F δεν είναι ταυτοτικά μηδέν (αφού $\overrightarrow{v} \neq 0$) και ισχύει ότι $\Sigma_c = \{\overrightarrow{y} \,:\, \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{v} = c\} = Y$.

Θα δούμε τώρα κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

Η περίπτωση $n = 2$**.** Όπως είπαμε προηγουμένως, τα υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^2$ συμπίπτουν με τις ευθείες του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε τώρα ένα διάνυσμα $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0)$ του $\mathbb{R}^2$ και ένα διάνυσμα $\overrightarrow{v} = (a, b) \neq (0, 0)$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση της ευθείας που περνά από το $\overrightarrow{a}$ και είναι κάθετη στο $\overrightarrow{v}$ είναι

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} \qquad &\text{θέτουμε } \overrightarrow{y} = (x, y) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \cdot (a, b) = c \\ &\Leftrightarrow ax + by = c, \end{aligned}$$

όπου $c = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} = ax_0 + by_0$.

Η περίπτωση $n = 3$**.** Έστω $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. Το υπερεπίπεδο Y που περνά από το $\overrightarrow{a}$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{v}$ έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} \qquad &\text{θέτουμε } \overrightarrow{y} = (x, y, z) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = c \\ &\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = c, \end{aligned}$$

όπου $c = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$.

Παρατήρηση. Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι αν έχουμε ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ και μας δίνεται η εξίσωσή του στη μορφή

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = c$$

με $\overrightarrow{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \neq \overrightarrow{0}$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{A}$ είναι κάθετο στο υπερεπίπεδο.

3.5 Τετραγωνικές επιφάνειες. Κωνικές τομές

Έστω $n \geq 2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|.$$

Το γράφημα της f είναι το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$G_f = \{(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) \,:\, \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Επίσης, το γράφημα της $-f$ είναι το σύνολο

$$G_{-f} = \{(\overrightarrow{x}, -f(\overrightarrow{x})) \,:\, \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Το σύνολο G_f ονομάζεται **κώνος** στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. Το σύνολο $K = G_f \cup G_{-f}$ ονομάζεται διπλός κώνος στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση $n = 2$, έχουμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(\overrightarrow{x}) = f(x, y) = \|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Το γράφημα της f είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} G_f &= \left\{(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) \,:\, \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Το γράφημα της $-f$ είναι το σύνολο

$$G_{-f} = \left\{\left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right) \,:\, x, y, \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Συνεπώς, ο κώνος K στον $\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} K = G_f \cup G_{-f} &= \left\{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \mathbb{R},\, z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } z = -\sqrt{x^2 + y^2}\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \mathbb{R},\, z^2 = x^2 + y^2\right\}. \end{aligned}$$

Επομένως, ο κώνος K στον $\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ για τα οποία ισχύει $z^2 = x^2 + y^2$ και άρα το K είναι ένας δίχωνος κώνος, όπως τον ξέρουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία.

Στη γενική περίπτωση έχουμε $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|$, δηλαδή

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Το γράφημα της f είναι

$$\begin{aligned} G_f &= \{(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) \,:\, \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \left\{ \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \right) \,:\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Ακόμη,

$$G_{-f} = \left\{ \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, -\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \right) \,:\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Συνεπώς, ο κώνος $K = G_f \cup G_{-f}$ είναι το σύνολο των σημείων $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ για τα οποία ισχύει $x_{n+1}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

Έστω τώρα Y ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Αποδεικνύεται ότι η τομή του κώνου K με το υπερεπίπεδο Y έχει εξίσωση

$$\overrightarrow{x}\Pi x^{\perp} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} + c = 0, \qquad (*)$$

όπου $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, Π είναι συμμετρικός πίνακας μη μηδενικός και

$$x^{\perp} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Η τομή αυτή καλείται **κωνική τομή με εξίσωση δευτέρου βαθμού την** $(*)$.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε τον κώνο στον $\mathbb{R}^3$ που όπως είδαμε παραπάνω είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν την εξίσωση $z^2 = x^2 + y^2$. Θεωρούμε ακόμη ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^3$, η εξίσωση του οποίου έχει τη μορφή $\alpha x + \beta y + \gamma z = c$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν και $c \in \mathbb{R}$. Η τομή του κώνου K με το επίπεδο είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\left\{ \begin{array}{c} z^2 = x^2 + y^2 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = c \end{array} \right\}$$

Από τη δεύτερη εξίσώση προκύπτει ότι

$$\gamma z = c - \alpha x + \beta y \Rightarrow \gamma^2 z^2 = (c - \alpha x - \beta y)^2.$$

Αντικαθιστώντας από την πρώτη εξίσωση και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\gamma^2-\alpha^2)x^2+(\gamma^2-\beta^2)y^2-2\alpha\beta xy+2\alpha cx+2\beta cy=c^2$$

την οποία μπορούμε να ξαναγράψουμε ως

$$(x,y)\begin{pmatrix}\gamma^2-\alpha^2 & -\alpha\beta\\ -\alpha\beta & \gamma^2-\beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(2\alpha c,2\beta c)\cdot(x,y)=c^2$$

δηλαδή

$$\overrightarrow{x}\Pi x^{\perp}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}+c=0$$

όπου $\overrightarrow{x}=(x,y)$, Π είναι συμμετρικός πίνακας, $\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^2$ και $c\in\mathbb{R}$. Άρα, πράγματι η τομή του κώνου με ένα επίπεδο έχει εξίσωση της μορφής $(*)$.

Στην παραπάνω περίπτωση, όπου έχουμε κώνο στον $\mathbb{R}^3$ και παίρνουμε την τομή του με ένα υπερεπίπεδο, η καμπύλη που προκύπτει, μετά από κατάλληλες στροφές και μεταφορές, παίρνει τελικά μία από τις ακόλουθες μορφές:

Έλλειψη με εξίσωση $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=1$, όπου $\alpha,\beta>0$. Στην περίπτωση $\alpha=\beta$ η καμπύλη είναι κύκλος.
Παραβολή με εξίσωση $y=cx^2$, όπου $c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.
Υπερβολή με εξίσωση $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=c$, όπου $\alpha,\beta>0$ και $c\neq 0$. (Για $c>0$ οι δύο κλάδοι της υπερβολής τέμνουν τον άξονα $x'x$, ενώ για $c<0$ τέμνουν τον άξονα $y'y$.)
Η μορφή την οποία έχει η καμπύλη εξαρτάται κάθε φορά από τις ιδιοτιμές του πίνακα Π.

Παίρνουμε τώρα τον κώνο K στον $\mathbb{R}^4$ καθώς και ένα υπερεπίπεδο Y στον $\mathbb{R}^4$. Η τομή $K\cap Y$ (εκτός από τετριμμένες περιπτώσεις, όπου μπορεί για παράδειγμα να είναι μονοσύνολο) μας δίνει μια επιφάνεια. Η επιφάνεια αυτή μετά από κατάλληλους μετασχηματισμούς, παίρνει μια από τις παρακάτω μορφές:

Ελλειψοειδές με εξίσωση $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2=1$, όπου $\alpha,\beta,\gamma>0$. Στην περίπτωση $\alpha=\beta=\gamma$ η επιφάνεια είναι μια σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$.
Υπερβολικό παραβολοειδές με εξίσωση $\frac{z}{\gamma}=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2$, όπου $\alpha,\beta>0$ και $\gamma\neq 0$. Το σχήμα αυτής της επιφάνειας μοιάζει με σέλα. Η τομή αυτής της επιφάνειας με ένα επίπεδο της μορφής $x=c$ ή της μορφής $y=c$ μας δίνει μια κωνική τομή και συγκεκριμένα μια παραβολή. Επίσης, η τομή με ένα επίπεδο της μορφής $z=c\neq 0$ μας δίνει μια υπερβολή.
Ελλειπτικό παραβολοειδές με εξίσωση $\frac{z}{\gamma}=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2$, όπου $\alpha,\beta>0$ και $\gamma/neq0$. Η τομή αυτής της επιφάνειας με ένα επίπεδο της μορφής $z=c$ (με c,γ ομόσημοι) είναι μια έλλειψη.
Ελλειπτικός Κώνος με εξίσωση $\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2$, όπου $\alpha,\beta,\gamma>0$.

Μονόχωρο υπερβολοειδές με εξίσωση $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1.$

Δίχωρο υπερβολοειδές με εξίσωση $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = -1.$

Η μορφή την οποία θα έχει κάθε φορά η επιφάνεια εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα Π.

3.6 Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^2$

Καρτεσιανές συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^2$

Ως γνωστόν, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ είναι όλα τα (διατεταγμένα) ζεύγη πραγματικών αριθμών

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Αν πάρουμε ένα σημείο $\overrightarrow{x} = (x, y)$ του $\mathbb{R}^2$, τότε οι αριθμοί x, y ονομάζονται **καρτεσιανές συντεταγμένες** του $\overrightarrow{x}$.

Οι καρτεσιανές καμπύλες $x = x_0$ και $y = y_0$. Το σύνολο των σημείων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ για τα οποία ισχύει $x = x_0$ είναι μια ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα στο σημείο $(x_0, 0)$.

Το σύνολο των σημείων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ για τα οποία ισχύει $y = y_0$ είναι μια ευθεία κάθετη στον άξονα $y'y$ που τέμνει τον άξονα στο σημείο $(0, y_0)$.

Το σημείο τομής των δύο αυτών ευθειών είναι το σημείο (x_0, y_0).

Πολικές συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^2$

Έστω $\overrightarrow{x} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Η απόσταση του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων είναι $r = \|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Προφανώς $r \in (0, \infty)$ ($r \neq 0$ διότι $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$).

Θεωρούμε τώρα την ημιευθεία με αρχή το $(0, 0)$ η οποία περνά από το σημείο (x, y) και έστω θ η θετικά προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία με τον ημιάξονα Ox. Θετικά προσανατολισμένη σημαίνει ότι μετράμε τη γωνία με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, συνεπώς $\theta \in [0, 2\pi)$.

Παρατηρούμε ότι για τις συντεταγμένες του σημείου (x, y) ισχύουν οι σχέσεις

$$\left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\}$$

Επιπλέον, καθώς το ζεύγος (r, θ) διατρέχει το σύνολο $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$, το σημείο (x, y) με $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ διατρέχει ακριβώς μία φορά το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Συνεπώς, ο μεταχσηματισμός

$$T\colon (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$(r, \theta) \mapsto T(r, \theta) = (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$$

είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ο μετασχηματισμός T καλείται **πολικός μετασχηματισμός** και το ζεύγος $(r, theta)$ είναι οι **πολικές συντεταγμένες** του σημείου (x, y).

Παρατήρηση: Δεν ορίζονται πολικές συντεταγμένες για το σημείο $(0,0)$.

Σχέση μεταξύ καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων. Αν έχουμε ένα σημείο $(x, y) \neq (0,0)$ του $\mathbb{R}^2$ και (r, θ) είναι οι πολικές του συντεταγμένες, τότε μεταξύ των συντεταγμένων αυτών ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ (όταν } x \neq 0) \end{array} \right\}$$

Αν $x = 0$ και $y > 0$, τότε $\theta = \frac{\pi}{2}$. Αν $x = 0$ και $y < 0$, τότε $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Οι καμπύλες $r = r_0$ και $\theta = \theta_0$ στο καρτεσιανό επίπεδο.
Σταθεροποιούμε ένα $r_0 \in (0, \infty)$. Τα σημεία (x, y) του καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία ισχύει $r = r_0$ είναι ακριβώς τα σημεία εκείνα που η απόστασή τους από την αρχή των αξόνων είναι σταθερή και ίση με r_0. Επομένως, είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα r_0.
Σταθεροποιούμε ένα $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Τα σημεία (x, y) του καρτεσιανού επιπέδου που ικανοποιούν την σχέση $\theta = \theta_0$ είναι τα σημεία της ημιευθείας που έχει αρχή το $(0,0)$ και σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία θ_0.
Επομένως, αν θέλουμε στο xy-επίπεδο να εντοπίσουμε το σημείο με πολικές συντεταγμένες (r_0, θ_0), τότε σχεδιάζουμε τον κύκλο $r = r_0$ και την ημιευθεία $\theta = \theta_0$. Το σημείο τομής των δύο αυτών καμπυλών είναι το σημείο με πολικές συντεταγμένες (r_0, θ_0)

Κεφάλαιο 4

Όρια, Συνέχεια

4.1 Όρια, Συνέχεια, Ομοιόμορφη συνέχεια

Στα επόμενα θεωρούμε μια συνάρτηση $\overrightarrow{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$ $(d, m \geq 1)$, η οποία έχει συντεταγμένες συναρτήσεις $\overrightarrow{f} = (f_1, ..., f_m)$. Επίσης, σταθεροποιούμε ένα σημείο $\overrightarrow{b} = (b_1, ..., b_m)$ του $\mathbb{R}^m$.

Ορισμοί 4.1.1. *(i) Έστω $\overrightarrow{a} \in A'$ ένα σημείο συσσώρευσης του συνόλου A. Λέμε ότι* **το όριο της $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ καθώς το $\overrightarrow{x}$ τείνει στο $\overrightarrow{a}$ υπάρχει και είναι ίσο με $\overrightarrow{b}$** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, \overrightarrow{a}) > 0$, ώστε για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$ με $0 < \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| < \delta$, να ισχύει $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{b}\| < \epsilon$. Σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε*

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}.$$

(ii) Έστω $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε είτε το $\overrightarrow{a}$ είναι μεμονωμένο σημείο ή είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Αν το $\overrightarrow{a}$ είναι μεμονωμένο σημείο, τότε λέμε ότι η $\overrightarrow{f}$ είναι ***συνεχής στο*** *$\overrightarrow{a}$.*
Αν $\overrightarrow{a} \in A'$, τότε λέμε ότι η $\overrightarrow{f}$ είναι ***συνεχής στο*** *$\overrightarrow{a}$ αν ισχύει*

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}).$$

(iii) Λέμε ότι η $\overrightarrow{f}$ είναι ***συνεχής στο*** *A αν η $\overrightarrow{f}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\overrightarrow{a} \in A$.*

(iv) Η $\overrightarrow{f}$ είναι ***ομοιόμορφα συνεχής*** *στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε για κάθε $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in A$ με $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| < \delta$ να ισχύει $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})\| < \epsilon$.*

Η Αρχή της Μεταφοράς (ΑΜ).
Η Αρχή της Μεταφοράς συνδέει τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας μιας συνάρτησης με την σύγκλιση ακολουθιών. Σε αρκετές περιπτώσεις είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για να εξετάσουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 4.1.2 (Αρχή της Μεταφοράς). *1. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(a) Το $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$ υπάρχει και είναι ίσο με $\vec{b}$.

(b) Για κάθε ακολουθία $(\vec{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στο A τέτοια ώστε $\vec{x_n} \neq \vec{a}$ για κάθε n και $\lim_n \vec{x_n} = \vec{a}$ ισχύει ότι $\lim_n \vec{f}(\vec{x_n}) = \vec{b}$.

2. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(a) Η συνάρτηση $\vec{f}$ είναι ***συνεχής στο σημείο*** *$\vec{a} \in A$.*

(b) Για κάθε ακολουθία $(\vec{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στο A τέτοια ώστε $\lim_n \vec{x_n} = \vec{a}$ ισχύει ότι $\lim_n \vec{f}(\vec{x_n}) = \vec{f}(\vec{a})$.

3. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(a) Η συνάρτηση $\vec{f}$ είναι ***ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο*** *A.*

(b) Για οποιεσδήποτε ακολουθίες $(\vec{x_n})_{n\in\mathbb{N}}, (\vec{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στο A τέτοιες ώστε $\lim_n(\vec{x_n} - \vec{y_n}) = \vec{0}$ ισχύει ότι $\lim_n(\vec{f}(\vec{x_n}) - \vec{f}(\vec{y_n})) = \vec{0}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και αφήνεται ως άσκηση. (Μπορείτε να συμβουλευτείτε ένα βιβλίο Απειροστικού Λογισμού.) □

Αναγωγή στις συντεταγμένες συναρτήσεις.
Η παρακάτω πρόταση, που είναι ανάλογη της Πρότασης 2.2.1 για ακολουθίες, μας δείχνει ότι για να μελετήσουμε το όριο ή τη συνέχεια μιας συνάρτησης $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ αρκεί να μελετήσουμε τα όρια και τη συνέχεια των συντεταγμένων συναρτήσεων $f_j\colon A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Πρόταση 4.1.3. *Έστω $\vec{f}\colon A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση με συντεταγμένες συναρτήσεις $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.*

(i) Αν $\vec{a}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ αν και μόνο αν $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j$ για κάθε $j = 1, 2, ..., m$.

(ii) Αν $\vec{a} \in A$, τότε η συνάρτηση $\vec{f}$ είναι συνεχής στο σημείο $\vec{a}$ αν και μόνο αν η f_j είναι συνεχής στο $\vec{a}$, για κάθε $j = 1, 2, ..., m$.

(iii) *Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν η f_j είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A για κάθε $j = 1, 2, ..., m$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης γίνεται όπως για τις συντεταγμένες ακολουθίες μιας ακολουθίας και αφήνεται ως άσκηση. (Θυμηθείτε την Πρόταση 2.2.1.) □

Άλγεβρα ορίων/συνέχειας. Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύουν ανάλογες ιδιότητες για την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, όπως στο $\mathbb{R}$.
Ειδικά, εάν $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, $\overrightarrow{a} \in A'$,
$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \neq 0$, $\overrightarrow{x} \in A$ και $\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = b (\neq 0)$, τότε $\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{1}{f(\overrightarrow{x})} = \frac{1}{b}$.
Επίσης, η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.

Lipschitz-συνεχής συνάρτηση.

Ορισμός 4.1.4. *Η συνάρτηση $\overrightarrow{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$ λέγεται **Lipschitz-συνεχής** (ή, για συντομία, L-συνεχής) αν υπάρχει θετική σταθερά $M > 0$ ώστε να ισχύει*

$$\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})\| \leq M \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|,$$

για κάθε $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in A$.

Η επόμενη πρόταση είναι ανάλογη της Πρότασης 4.1.3. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 4.1.5. *Η συνάρτηση $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ είναι Lipschitz-συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $f_j \colon A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι Lipsschitz-συνεχείς για κάθε $j = 1, 2, \ldots, m$.*

Παρατήρηση. Αν η συνάρτηση $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ είναι Lipschitz-συνεχής στο A, τότε η $\overrightarrow{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A (γιατί;). **ΔΕΝ** ισχύει όμως το αντίστροφο. Δηλαδή, αν η $\overrightarrow{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε δεν είναι κατ΄ ανάγκη Lipschitz-συνεχής στο A. Μπορείτε να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα; (Αρκεί να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα στο $\mathbb{R}$, δηλαδή να βρείτε μια συνάρτηση $f \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι ομοιόμορφα συνεχής, όχι όμως Lipschitz-συνεχής. Συμβουλευτείτε ένα βιβλίο Απειροστικού Λογισμού.)

4.2 Γραμμικές Συναρτήσεις

Μια σημαντική κατηγορία συναρτήσεων είναι οι γραμμικές συναρτήσεις. Σε αυτήν την ενότητα, θα θυμηθούμε μερικά βασικά στοιχεία σχετικά με γραμμικές συναρτήσεις. Στα επόμενα, σταθεροποιούμε μια συνάρτηση $\overrightarrow{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_m) \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. (Προσοχή, το πεδίο ορισμού πρέπει να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^d$, ή, γενικότερα, ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$.)

Ορισμός 4.2.1. *Η συνάρτηση $\overrightarrow{T}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ καλείται γραμμική αν για κάθε $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^d$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν:*

$$\overrightarrow{T}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{y}) \tag{4.1}$$

$$\overrightarrow{T}(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{T}(\overrightarrow{x}). \tag{4.2}$$

Παρατήρηση. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι ισότητες (4.1) και (4.2) μπορούν να γραφτούν σε μία, ως εξής: Η συνάρτηση $\overrightarrow{T}$ είναι γραμμική αν και μόνο αν ισχύει

$$\overrightarrow{T}(\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \overrightarrow{T}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{y}), \tag{4.3}$$

για κάθε $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^d$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύεται εύκολα και αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 4.2.2. *Η συνάρτηση $\overrightarrow{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_m)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική αν και μόνο αν οι συντεταγμένες συναρτήσεις $T_j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικές για κάθε $j = 1, 2, \ldots, m$.*

Αντιστοιχία Γραμμικής Συνάρτησης $\overrightarrow{T}$ με πίνακα Π.

Γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι σε κάθε γραμμική απεικόνιση $\overrightarrow{T}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί ένας $m \times d$ πίνακας Π. Αλλά και αντίστροφα, κάθε $m \times d$ πίνακας Π ορίζει μια γραμμική απεικόνιση $\overrightarrow{T}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. Μάλιστα, η αντιστοιχία αυτή μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων είναι ένα προς ένα. Υπενθυμίζουμε τώρα, εν συντομία, πώς γίνεται η εν λόγω αντιστοιχία.

• Ξεκινάμε με την απλή περίπτωση $d = m = 1$. Τότε έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Λόγω της γραμμικότητας, παίρνουμε ότι:

$$T(x) = T(x \cdot 1) = x \cdot T(1).$$

Επομένως, ισχύει $T(x) = x \cdot T(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, η γραμμική απεικόνιση T καθορίζεται αποκλειστικά από τον αριθμό $T(1)$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση T είναι ο 1×1 πίνακας $\Pi = (T(1))$.

• Θεωρούμε τώρα την περίπτωση $d \geq 2$ και $m = 1$, δηλαδή την περίπτωση που έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ στο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^d$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + \ldots + x_d \overrightarrow{e_d}.$$

Επομένως, λόγω της γραμμικότητας της T παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{x}) &= T\left(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_d\overrightarrow{e_d}\right) = x_1T(\overrightarrow{e_1}) + \ldots + x_dT(\overrightarrow{e_d}) \\ &= \left(T(\overrightarrow{e_1}), \ldots, T(\overrightarrow{e_d})\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση T σε αυτήν την περίπτωση είναι ο $1 \times d$ πίνακας

$$\Pi = \left(T(\overrightarrow{e_1}), T(\overrightarrow{e_2}), \ldots, T(\overrightarrow{e_d})\right).$$

Μια ακόμη χρήσιμη παρατήρηση που προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση της T είναι ότι αν πάρουμε το διάνυσμα

$$\overrightarrow{a} = \left(T(\overrightarrow{e_1}), T(\overrightarrow{e_2}), \ldots, T(\overrightarrow{e_d})\right),$$

τότε για κάθε $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^d$ ισχύει:

$$T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x}.$$

Με άλλα λόγια, η γραμμική απεικόνιση $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο του $\overrightarrow{x}$ με το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$. Αυτή η παρατήρηση θα μας χρειαστεί στα επόμενα.

• Παίρνουμε τώρα την πιο γενική περίπτωση, όπου έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $\overrightarrow{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_m)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ με $d, m \geq 2$. Από την Πρόταση 4.2.2 γνωρίζουμε ότι κάθε συντεταγμένη συνάρτηση $T_j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική. Επομένως, από την προηγούμενη περίπτωση, έχουμε ότι για κάθε $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ότι:

$$T_j(\overrightarrow{x}) = x_1T_j(\overrightarrow{e_1}) + \ldots + x_dT_j(\overrightarrow{e_d}).$$

Επομένως, για την απεικόνιση $\overrightarrow{T}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}(\overrightarrow{x}) &= (T_1(\overrightarrow{x}), \ldots, T_m(\overrightarrow{x})) \\ &= (x_1T_1(\overrightarrow{e_1}) + \ldots + x_dT_1(\overrightarrow{e_d}), \ldots, x_1T_m(\overrightarrow{e_1}) + \ldots + x_dT_m(\overrightarrow{e_d})) \\ &= \begin{pmatrix} T_1(\overrightarrow{e_1}) & T_1(\overrightarrow{e_2}) & \ldots & T_1(\overrightarrow{e_d}) \\ T_2(\overrightarrow{e_1}) & T_2(\overrightarrow{e_2}) & \ldots & T_2(\overrightarrow{e_d}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_m(\overrightarrow{e_1}) & T_m(\overrightarrow{e_2}) & \ldots & T_m(\overrightarrow{e_d}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^d$ έχουμε $\overrightarrow{T}(\overrightarrow{x}) = \Pi \cdot \overrightarrow{x}$, όπου Π είναι ο $m \times d$ πίνακας:

$$\Pi = \begin{pmatrix} T_1(\overrightarrow{e_1}) & T_1(\overrightarrow{e_2}) & \ldots & T_1(\overrightarrow{e_d}) \\ T_2(\overrightarrow{e_1}) & T_2(\overrightarrow{e_2}) & \ldots & T_2(\overrightarrow{e_d}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_m(\overrightarrow{e_1}) & T_m(\overrightarrow{e_2}) & \ldots & T_m(\overrightarrow{e_d}) \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας Π είναι ο $m \times d$ πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση $\overrightarrow{T}$.

Παρατήρηση. Αξίζει να θυμόμαστε ότι ο πίνακας Π που περιγράψαμε προηγουμένως είναι για την ακρίβεια ο πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση $\overrightarrow{T}$ **ως προς τη συνήθη βάση του** $\mathbb{R}^d$ **και** $\mathbb{R}^m$. Αν σε κάποιον από τους δύο χώρους ($\mathbb{R}^d$ ή $\mathbb{R}^m$) πάρουμε μια άλλη βάση, τότε μπορούμε μέσω μιας ανάλογης διδικασίας να αντιστοιχήσουμε στην απεικόνιση $\overrightarrow{T}$ έναν $m \times d$ πίνακα, ο οποίος θα είναι διαφορετικός από τον πίνακα Π. Με άλλα λόγια, ο πίνακας εξαρτάται από την επιλογή της βάσης. Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος δεν θα χρησιμοποιήσουμε άλλες βάσεις στον χώρο $\mathbb{R}^n$, οπότε δεν θα επιμείνουμε περαιτέρω σε αυτό το σημείο.

Γεωμετρική Ερμηνεία του πίνακα Π για ειδικές περιπτώσεις.

• Αν $d = m = 1$, τότε $T(x) = ax$, δηλαδή $y = ax$, $x \in \mathbb{R}$,
όπου $a = T(1)$ είναι η κλίση της $y = ax$.

• Αν $d \geq 2$ και $m = 1$, τότε $T(x, y) = a \cdot x + b \cdot y$, όπου $a = T(1, 0)$ και $b = T(0, 1)$.
Η τομή του γραφήματος της $z = a \cdot x + b \cdot y$ με το επίπεδο $y = 0$, δίνει ευθεία στο $y = 0$ με κλίση a(Ανάλογα και για την τομή με το επίπεδο $x = 0$).
Αν $(a, b) \neq (0, 0)$ και $c \in \mathbb{R}$ τότε $\Sigma_c = \{(x, y) : a \cdot x + b \cdot y = c\}$,
όπου $(x_0, y_0) \in \Sigma_c$ και $(a, b) \perp \Sigma_c$.

Συνέχεια Γραμμικής Συνάρτησης.
Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι κάθε γραμμική συνάρτηση είναι συνεχής, και μάλιστα έχει την πιο ισχυρή ιδιότητα να είναι Lipschitz-συνεχής.

Πρόταση 4.2.3. *Η γραμμική συνάρτηση* $\overrightarrow{T} = (T_1, T_2, ..., T_m) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *είναι Lipschitz-συνεχής (επομένως είναι και ομοιόμορφα συνεχής).*

Απόδειξη. Αρκεί να το αποδείξουμε για $m = 1$.
Έστω $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ γραμμική, τότε $\exists\ \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^d : T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^d$.
Επειδή η T είναι γραμμική και από Ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ έχουμε :
$|T(\overrightarrow{x_1}) - T(\overrightarrow{x_2})| = |T(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2})| = |\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2})| \leq \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}\|$. □

4.3 Ασκήσεις

Άσκηση 4.3.1. *Να δείξετε ότι η συνάρτηση* ϕ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, *με* $\phi(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|$, *είναι L-συνεχής.*

Λύση. Πράγματι, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|\phi(\overrightarrow{x}) - \phi(\overrightarrow{y})| = \left| \|\overrightarrow{x}\| - \|\overrightarrow{y}\| \right| \leq \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|.$$

Άρα, η ϕ είναι Lipschitz-συνεχής με σταθερά $M = 1$. ■

Άσκηση 4.3.2. *Να δείξετε ότι η* $pr_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, *με* $pr_i(x_1, x_2, ..., x_d) = x_i$, *για κάθε* $i = 1, 2, ..., d$, *είναι* L*-συνεχής.*

Λύση. Πράγματι ισχύει $|pr_i(\overrightarrow{x}) - pr_i(\overrightarrow{y})| = |x_i - y_i| \leq \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$,
ή διαφορετικά, η συνάρτηση $pr_i(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{x}$ είναι γραμμική
$\Rightarrow$ η συνάρτηση $pr_i(\overrightarrow{x})$ είναι L-συνεχής (από προηγούμενη Άσκηση).

Άσκηση 4.3.3. *Η* $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (\sin(e^{x^2} + 10 + z^5), \log(x^4 + y^6 + 1) + \tau o\xi\epsilon\phi(e^x + z))$ *είναι συνεχής στον* $\mathbb{R}^3$.

Λύση. Επειδή $x = pr_1((x, y, z))$, $y = pr_2((x, y, z))$ και $z = pr_3((x, y, z))$, έχουμε ότι :
$\sin(e^{x^2} + 10 + z^5) = \sin(e^{{pr_1}^2((x,y,z))} + 10 + (pr_3((x, y, z)))^5)$. κ.ο.κ. ■

Άσκηση 4.3.4. *Δίνεται η συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{(x^2+y^2)}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & \text{αν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε η συνάρτηση* f *να είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}^2$.

Λύση. Αρκεί να υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2 + y^2)^{(x^2+y^2)}$ και να ισούται με a.
Έχουμε ότι : $(x, y) \to (0, 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \to 0 \Leftrightarrow t = x^2 + y^2 \to 0^+$.
Επειδή $\lim_{t\to0^+} t^t = 1$, έχουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2 + y^2)^{(x^2+y^2)} = 1$. Άρα $a = 1$.

Άσκηση 4.3.5. *Δίνεται η συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & \text{αν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε η συνάρτηση* f *να είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}^2$.

Λύση. Αρκεί το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}$ να ισούται με a.
(α' τρόπος) $|\frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}| = \frac{|x|^2 \cdot |y|}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{\|(x,y)\|^2 \cdot \|(x,y)\|}{\|(x,y)\|^2} = \|(x, y)\| \to 0$ (όταν $(x, y) \to (0, 0)$).
(β' τρόπος) $|\frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |y| \leq 1 \cdot |y| \cdot \leq \|(x, y)\| \to 0$.
Άρα $a = 0$.

Άσκηση 4.3.6. *Δίνεται η συνάρτηση* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

(i) *Η f είναι φραγμένη.*

(ii) *Δεν υπάρχει το* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Λύση. $i)$ $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$(διότι $|x|^2 - 2|x|\cdot|y| + |y|^2 = (|x|-|y|)^2 \geq 0$).
$ii)$ (α' τρόπος) Προσέγγιση με ακολουθίες.
Για την ακολουθία $\overrightarrow{x_n} = (\frac{1}{n}, 0) \to (0,0)$ προκύπτει $f(\overrightarrow{x_n}) \to 0$,
ενώ για την ακολουθία $\overrightarrow{y_n} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ προκύπτει $f(\overrightarrow{y_n}) \to \frac{1}{2}$.
Άρα, από Αρχή Μεταφοράς, Δεν υπάρχει το όριο στο $(0,0)$.
(β' τρόπος) Προσέγγιση με ευθείες.
Για την ευθεία $y = \lambda\cdot x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x, \lambda\cdot x) = \frac{\lambda\cdot x^2}{x^2+\lambda^2\cdot x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$
και άρα $\lim_{x\to 0} f(x, \lambda\cdot x) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$.
Επομένως για διαφορετικά λ έχουμε και διαφορετικό όριο.
(γ' τρόπος) Προσέγγιση με κύκλους.
Θέτουμε $x = r\cdot cos\theta$ και $y = r\cdot sin\theta$ (όπου $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$).
Έχουμε $f(r\cdot cos\theta, r\cdot sin\theta) = cos\theta\cdot sin\theta \to cos\theta\cdot sin\theta$.
Επομένως για διαφορετικές τιμές του θ έχουμε διαφορετικά όρια.

Άσκηση 4.3.7. *Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία η συνάρτηση*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\cdot y}{(x^2+y^2)^\lambda}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση. Διακρίνουμε περιπτώσεις.
• Αν $\lambda \leq 0$, τότε $\lambda = -\mu$ (όπου $\mu \geq 0$), και η $f(x,y) = xy(x^2+y^2)^\mu$ είναι συνεχής.
• Αν $0 < \lambda < 1$, τότε $|f(x,y)| = \frac{xy}{\|(x,y)\|^{2\lambda}} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^{2\lambda}} = \|(x,y)\|^{2(1-\lambda)} \to 0$.
Άρα η f είναι συνεχής.
• Αν $\lambda = 1$, τότε, από προηγούμενη Άσκηση, δεν υπάρχει το όριο της f στο $(0,0)$
και άρα η f παρουσιάζει ασυνέχεια στο $(0,0)$.
• Αν $\lambda > 1$ και $y = x$, τότε $f(x,x) = \frac{x^2}{2^\lambda\cdot x^{2\lambda}} = \frac{1}{2^\lambda}\cdot\frac{1}{x^{2(\lambda-1)}} \to +\infty$.
Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο $(0,0)$ και η f παρουσιάζει ασυνέχεια στο $(0,0)$.

Άσκηση 4.3.8. *Έστω η συνάρτηση :*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ a, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής και φραγμένη (από το $\frac{1}{2}$) ;

Λύση. (α' τρόπος) Προσέγγιση με ακολουθίες.
Για την ακολουθία $\overrightarrow{x_n}=(\frac{1}{n},0)\to(0,0)$ προκύπτει $f(\overrightarrow{x_n})=0\to 0$, ενώ για την ακολουθία $\overrightarrow{y_n}=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$ προκύπτει $f(\overrightarrow{y_n})=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$.
Άρα δεν υπάρχει το όριο στο $(0,0)$.
(β' τρόπος) Προσέγγιση με καμπύλες.
Για την παραβολή $y=\lambda\cdot x^2$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) ισχύει $f(x,\lambda\cdot x^2)=\frac{\lambda\cdot x^4}{x^4+\lambda^2x^4}=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$
και άρα $\lim_{x\to 0}f(x,\lambda\cdot x^2)=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$.
Επομένως για διαφορετικά λ έχουμε και διαφορετικό όριο.

Σημαντικές Παρατηρήσεις.

1) **Χωριστά συνεχής συνάρτηση.**
Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, και στοιχείο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
Εάν οι $g(x)=f(x,x_0)$ και $h(y)=f(x_0,y)$ είναι συνεχείς $\nRightarrow$ f συνεχής.
π.χ. Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ a, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$
αν και οι συναρτήσεις $g(x)=f(x,0)$ και $h(y)=f(0,y)$ είναι συνεχείς.

2) **Διαδοχικά Όρια.**
Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\backslash\{x_0,y_0\}\to\mathbb{R}$
και $\exists\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0}f(x,y))=\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0}f(x,y))$
$\nRightarrow\exists\lim_{(x_0,y_0)}f(x,y)$.
π.χ. Βλέπε την συνάρτηση :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\cdot y}{x+y}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

3) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και στοιχείο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
Εάν ο περιορισμός της f σε κάθε ευθεία που περνά από το (x_0,y_0) είναι συνεχής συνάρτηση $\nRightarrow$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,0)$.
π.χ. Βλέπε την συνάρτηση :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

4.4 Τα βασικά Θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 4.4.1 (Θεώρημα Φράγματος, Μεγίστου-Ελαχίστου)**.** *Έστω συνάρτηση* $\overrightarrow{f}$: $K(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$, *συνεχής στο* K *και* K *συμπαγές.*
Τότε ισχύουν τα παρακάτω :
i) Το σύνολο $\overrightarrow{f}(K) \subseteq \mathbb{R}^m$ *είναι συμπαγές. Ιδιαιτέρως, η* $\overrightarrow{f}$ *είναι φραγμένη στο* K.
ii) Αν $m = 1$ *και* $f : K \to \mathbb{R}$, *τότε* $\exists\ \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in K$ *έτσι ώστε*
$f(\overrightarrow{x_1}) = min\{f(\overrightarrow{x}) : x \in K\}$ *και* $f(\overrightarrow{x_2}) = max\{f(\overrightarrow{x}) : x \in K\}$.

Απόδειξη. i) Έστω $\overrightarrow{y_n} \in \overrightarrow{f}(K)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\exists\ \overrightarrow{x_n} \in K : \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_n}) = \overrightarrow{y_n}$.
Επειδή $(\overrightarrow{x_n})_n$ ακολουθία του K (= συμπαγές) $\Rightarrow \exists\ \overrightarrow{x_{k_n}} \to \overrightarrow{x_0} \in K$.
Έχουμε $\overrightarrow{f}$ συνεχής στο $K \Rightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_{k_n}}) \to \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})$, δηλαδή $\overrightarrow{y_{k_n}} \to \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) \in \overrightarrow{f}(K)$.
Άρα το $\overrightarrow{f}(K)$ είναι συμπαγές.
ii) Το $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα $\exists\ supf(K), inff(K) \in \mathbb{R}$.
Αφού $f(K) =$ κλειστό, τότε $supf(K) \in f(K)$ και $inff(K) \in f(K)$,
δηλαδή $\exists\ \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in K$ έτσι ώστε $f(\overrightarrow{x_1}) = minf(K)$ και $f(\overrightarrow{x_2}) = maxf(K)$. □

Θεώρημα 4.4.2 (Θεμελιώδες Θεώρημα Συνέχειας)**.** *Έστω* K *συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$ *και* $f : K \to \mathbb{R}^m$ *συνεχής συνάρτηση. Τότε η* f *είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* K.

Απόδειξη. Ανάλογη με την Απόδειξη για $d = m = 1$. □

4.5 Ασκήσεις

Άσκηση 4.5.1. *Εξετάστε ως προς την ύπαρξη ορίου στο* $(0, 0)$ *τις συναρτήσεις:*

(i) $f_1(x, y) = \frac{x^4 - 2y^4}{x^2 + y^2}$

(ii) $f_2(x, y) = x \log \sqrt{x^2 + y^2}$

(iii) $f_3(x, y) = \frac{xy}{x - y}$, $x \neq y$

(iv) $f_4(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{\sin^2(x^2 + y^2)}$

(v) $f_5(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^4}$.

Άσκηση 4.5.2. *Στις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν υπάρχει* $a_i \in \mathbb{R}$ *ώστε η συναρτήση* g_i *να είναι συνεχής:*

(i) $g_1(x, y) = \frac{xy}{\sin(x^2 + y^2)}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $g_1(0, 0) = a_1$

(ii) $g_2(x,y) = \frac{2x^2-x^2y^2+2y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $g_2(0,0) = a_2$

(iii) $g_3(x,y,z) = \frac{\sin(x^2+y^2+z^4)}{x^2+y^2+z^2}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $g_3(0,0,0) = a_3$.

Άσκηση 4.5.3. *(i) Να υπολογιστούν τα διαδοχικά όρια:*

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}) \quad \textit{και} \quad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}).$$

(ii) Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

(iii) Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 4.5.4. *Δίνεται η συνάρτηση:*

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \textit{αν } x \neq 0 \\ 0, & \textit{αν } y = 0. \end{cases}$$

(i) Να υπολογιστούν τα διαδοχικά όρια:

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \quad \textit{και} \quad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)).$$

(ii) Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

(iii) Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 4.5.5. *Δίνεται η συνάρτηση* $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0,y_0\} \to \mathbb{R}$, *όπου* $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Υποθέτουμε ότι:*

1. *Υπάρχει το* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
2. *Για κάθε* $y \in \mathbb{R}$ *υπάρχει το όριο* $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$.
3. *Για κάθε* $y \in \mathbb{R}$ *υπάρχει το όριο* $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) = \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Άσκηση 4.5.6. *Έστω σύνολο A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $\overrightarrow{f}: A \to \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση. Αν το σύνολο A είναι κατά τόξα συνεκτικό και η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι η εικόνα της $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{f}(A)$, είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό σύνολο.*

Ορισμός 4.5.7. *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται* **κατά τόξα συνεκτικό** *αν για κάθε $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in A$ με $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$ υπάρχει συνεχής καμπύλη $\overrightarrow{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ η οποία έχει αρχή το σημείο $\overrightarrow{u}$, πέρας το σημείο $\overrightarrow{v}$ και επιπλέον, η καμπύλη βρίσκεται* **μέσα στο A** *(δηλαδή $\overrightarrow{\gamma}(a) = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{\gamma}(b) = \overrightarrow{v}$ και $\overrightarrow{\gamma}(t) \in A$ για κάθε $t \in [a,b]$.)*

Κεφάλαιο 5

Διαφορικός Λογισμός

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και στοιχείο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες :
$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ (αν υπάρχει)
$\Leftrightarrow lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h} = 0 \Leftrightarrow lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{|h|}$
$\Leftrightarrow \exists$ γραμμική συνάρτηση $T_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$
και $lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T_{x_0}(h)}{|h|} = 0$
$\Leftrightarrow \exists$ γραμμική συνάρτηση $T_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ.ω.
$f(x_0+h) = f(x_0) + T_{x_0}(h) + |h| \cdot q(h)$ και $lim_{h \to 0} q(h) = q(0) = 0$.

Η ύπαρξη της $f'(x_0)$ λύνει 2 προβλήματα :
(i) Γραμμική προσέγγιση της f στο x_0, δηλαδή
$f(x_0+h) = f(x_0) + T_{x_0}(h) + |h| \cdot q(h)$ και $q(h) \to 0 = q(0)$,
επομένως για $h \cong 0$, $f(x_0+h) = f(x_0) + T_{x_0}(h)$.
Την συνάρτηση $T_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι γραμμική την ονομάζουμε **διαφορικό της f στο x_0** . Επομένως υπάρχει και ο αντίστοιχος Πίνακας $(f'(x_0))$.
Η T_{x_0} έχει γράφημα μια ευθεία με κλίση την κλίση της f στο x_0.

Ορισμός εφαπτόμενης ευθείας.
Ορίζουμε ως εφαπτόμενη ευθεία την εξής : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, όπου $x \in \mathbb{R}$.
Αυτή είναι ευθεία που περιέχει το $(x_0, f(x_0))$ με κλίση $(f'(x_0))$ και κάθετο διάνυσμα το $(f'(x_0), -1)$.

Τελικά, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \exists\, T_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική : $lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T_{x_0}(h)}{|h|} = 0$.
Η $T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, καλείται το **διαφορικό της f στο x_0**.
Συμβολίζουμε το διαφορικό με $df(x_0) = T_{x_0}$ και τον αντίστοιχο πίνακα με $(f'(x_0))(|x|)$.

Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ είναι **διαφορίσιμη στο** $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^d$
$\Leftrightarrow \exists\ \overrightarrow{T_{\overrightarrow{x_0}}}:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ γραμμική : $lim_{\overrightarrow{h}\to 0}\frac{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{h})-\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})-\overrightarrow{T}_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{h})}{||\overrightarrow{h}||}=\overrightarrow{0}$.
Το $\overrightarrow{T_{\overrightarrow{x_0}}}=d\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})$ είναι το **διαφορικό της** $\overrightarrow{f}$ **στο** $\overrightarrow{x_0}$, με αντίστοιχο πίνακα $(m\times d)$.
Να δούμε ποιος είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο $\overrightarrow{T_{\overrightarrow{x_0}}}$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, έστω ότι $\exists\ T_{(x_0,y_0)}(x,y)=\alpha x+\beta y$, $\alpha=\alpha(\overrightarrow{x_0})$, $\beta=\beta(\overrightarrow{y_0})$,
τ.ω. $lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+x,y_0+y)-f(x_0,y_0)-(\alpha x+\beta y)}{||(x,y)||}=0$.
Επειδή $(x,0)\to(0,0)$ έχουμε :
$lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x,y_0)-f(x_0,y_0)-\alpha x}{x}=0 \Rightarrow lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x}=\alpha$.
Δηλαδή, αν περιορίσουμε την f στην $(x_0,y_0)+t\cdot\overrightarrow{e_1}=(x_0+t\cdot y_0)$, $t\in\mathbb{R}$, η παράγωγος της είναι η κλίση της $T_{(x_0,y_0)}$ ως προς τον Ux $(T_{(x_0,y_0)}(\overrightarrow{e_1})=\alpha)$.
Ανάλογα, $lim_{y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+y)-f(x_0,y_0)}{y}=\beta$ και επομένως $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0,y_0)=\alpha$, $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0,y_0)=\beta$.
Άρα έχουμε την αντιστοιχία $T_{(x_0,y_0)}\longleftrightarrow(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0,y_0),\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0,y_0))$.

Εφαπτόμενο επίπεδο.
Ορίζουμε ως εφαπτόμενο επίπεδο το εξής :
$z=f(x_0,y_0)+\alpha\cdot(x-x_0)+\beta\cdot(y-y_0)T_{(x_0,y_0)}(e_1)=\alpha$,
το οποίο είναι κάθετο με το διάνυσμα $(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0,y_0),\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0,y_0),-1)$.
Έστω $S_c=\{(x,y):f(x,y)=c\}$ είναι μία ¨καλή' καμπύλη.
Το σύνολο στάθμης του εφαπτόμενου επιπέδου είναι το :
$E_c=\{(x,y):\alpha\cdot(x-x_0)+\beta\cdot(y-y_0)=0\}$.

Μερική Παράγωγος.
Έστω συνάρτηση $f:A(\subseteq\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$, στοιχείο $\overrightarrow{x_0}=(a_1,...,a_d)\in A$, όπου A ανοιχτό σύνολο.
Εάν $\exists$ το $lim_{t\to 0}\to\frac{f(\overrightarrow{x_0}+t\cdot\overrightarrow{e_1})-f(\overrightarrow{x_0})}{t}=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0})$, αυτό καλείται i- **μερική παράγωγος της** f **στο** $\overrightarrow{x_0}$. Συμβολίζεται ως εξής : $f_{x_i}(\overrightarrow{x_0})$, $D_{\overrightarrow{e_i}}f(\overrightarrow{x_0})$, $D_i f(\overrightarrow{x_0})$.
Δηλαδή έχουμε : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{x_0})=lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+t,a_2,...,a_d)-f(a_1,...,a_d)}{t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\overrightarrow{x_0})=lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2+t,...,a_d)-f(a_1,...,a_d)}{t}$
κ.ο.κ.

Ορισμός 5.0.8. : *Έστω συνάρτηση $f:A(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$, A ανοιχτό σύνολο και $(x_0,y_0)\in A$.* ***Μερική παράγωγος ως προς*** *x (αντ. ως προς y) στο σημείο (x_0,y_0) είναι η παράγωγος της f ως προς x στο x_0 (αντ. ως προς y στο y_0), όπου έχουμε κρατήσει το y σταθερό και ίσο με y_0 (αντ. το x σταθερό και ίσο με x_0).*
Δηλαδή : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$.

Τι σημαίνει όμως αυτό γεωμετρικά ;

Παράδειγμα 5.0.9. : *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) = \frac{sin(xy)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *και θέλουμε να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο της ως προς* x *στο σημείο* $(1,-2)$.
Δηλαδή : $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) =;$
Ο ορισμός λέει ότι κρατάμε το y *σταθερό (στην περίπτωση μας σταθερό και ίσο με* -2 *) και παραγωγίζουμε την* f *στο σημείο* $x = 1$.
Έχουμε τη συνάρτησή μας $f(x,y) = \frac{sin(xy)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in [-5,5] \times [-5,5] \setminus \{(0,0)\}$.
Παίρνουμε τον περιορισμό της για $y = -2$ *(δηλαδή το μέρος της συνάρτησης που αντιστοιχεί για* $y = -2$*).*
Απομονώνουμε τώρα αυτόν τον περιορισμό και για να τον δούμε καλύτερα τον παρουσιάζουμε στις 2 διαστάσεις.
Η μερική παράγωγος που αναζητούμε είναι η παράγωγος αυτής της συνάρτησης ως προς x *στο σημείο* $x = 1$.
Η κλίση της (ϵ) *μας δίνει το ζητούμενο* $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$.

Παραδείγματα 5.0.10. : 1. *Να ευρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης* $f(x,y) = xy^2 + \tau o\xi\epsilon\phi(x+1)$, *στο σημείο* $(1,2)$.
• *Επειδή* $f(x,2) = 4x + \tau o\xi\epsilon\phi(x+1)$, *έχουμε* $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(1,2) = 4 + \frac{1}{2^2+1}$.

• *Επειδή* $f(1,y) = y^2 + \tau o\xi\epsilon\phi(2)$, *έχουμε* $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(1,2) = 4$.

2. *Να ευρεθούν οι μερικές παράγωγοι στο* $(2,3,4)$ *της συνάρτησης* $f(x,y,z) = x^4z^2 + log(x^4+z^2+1) + e^{x+y^2} + sin(\frac{1}{x^2+1})$.

Σχέση Μερικής Παραγώγισης - Συνέχειας.

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, A ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^d$ και στοιχείο $\overrightarrow{x_0} \in A$.
Αν η f είναι συνεχής στο $\overrightarrow{x_0} \nRightarrow$ την ύπαρξη $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0})$, για κάθε $i = 1, ..., d$.
π.χ. 1. Η συνεχής συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο σημείο $x_0 = 0$,
2. Η συνεχής συνάρτηση $f(x,y) = |x| + |y|$ στο σημείο $(0,0)$.

Η ύπαρξη των $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) \nRightarrow$ την συνέχεια της f στο $\overrightarrow{x_0}$, για $d \geq 2$.
π.χ. 1. Η ασυνεχής συνάρτηση στο $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } xy = 0 \\ 0, & \text{αν } xy \neq 0, \end{cases}$$

όπου $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(0,0) = \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(0,0) = 0$.
2. Η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

.

Ορισμός Διαφορικού.

Έστω συνάρτηση $\overrightarrow{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$, στοιχείο $\overrightarrow{x_0} \in A$ και A ανοιχτό.
Η $\overrightarrow{f}$ είναι **διαφορίσιμη στο** $\overrightarrow{x_0}$
$\Leftrightarrow \exists\, \overrightarrow{T_{\overrightarrow{x_0}}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ γραμμική : $lim_{\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}} \frac{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{h})-\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})-\overrightarrow{T}_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{h})}{||\overrightarrow{h}||} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \exists\, \overrightarrow{T_{\overrightarrow{x_0}}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ και $\overrightarrow{q} : S(\overrightarrow{0}, \epsilon)(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$ τ.ω.
$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{h}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) + \overrightarrow{T}_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{h}) + ||\overrightarrow{h}|| \cdot \overrightarrow{q}(\overrightarrow{h})$,
όπου $lim_{\overrightarrow{h} \to_d \overrightarrow{0}} \overrightarrow{q}(\overrightarrow{h}) = \overrightarrow{q}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ $(\epsilon > 0 : \overrightarrow{x_0} + S(\overrightarrow{0}, \epsilon) = S(\overrightarrow{x_0}, \epsilon) \subseteq A)$.
Ισχύουν τα εξής : Αν η $\overrightarrow{f}$ διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{x_0}$, η $\overrightarrow{T}_{\overrightarrow{x_0}}$ είναι μοναδική.
Συμβολίζουμε $\overrightarrow{T_{\overrightarrow{x_0}}} = d\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})$ (ή $D_1\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})$) το **διαφορικό της** $\overrightarrow{f}$ **στο** $\overrightarrow{x_0}$.

- $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ **διαφορίσιμη στο** $\overrightarrow{x_0}$

$\Leftrightarrow f_i$ διαφορίσιμες στο $\overrightarrow{x_0}$, για κάθε $i = 1, ..., m$,
έχουμε ότι $d\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) = (df_1(\overrightarrow{x_0}), df_2(\overrightarrow{x_0}), ..., df_m(\overrightarrow{x_0})) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$.
Αν $d = m = 1$, τότε έχουμε $f : A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ανοιχτό, διαφορίσιμη στο x_0 με $df(x_0)(h) = f'(x_0)h$, $h \in \mathbb{R}$ και αντίστοιχο πίνακα $(|x|)(f'(x_0))$.
Αν $d = 1, m \geq 2$, τότε έχουμε $\overrightarrow{r}(t) = (\overrightarrow{r}_1(t), ..., \overrightarrow{r}_m(t))$, $t \in A$.
Η $\overrightarrow{r}$ είναι διαφορίσιμη στο $t_0 \Leftrightarrow$ οι r_i είναι διαφορίσιμες στο $t_0 \Leftrightarrow \exists\, \overrightarrow{r_i}'(t_0)$, $i = 1, ..., m$.

Ο αντίστοιχος $(m \times 1)$ πίνακας είναι ο : $\begin{pmatrix} {r_1}'(t_0) \\ {r_2}'(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ {r_m}'(t_0) \end{pmatrix}$.

Ορίζουμε $r'(t_0) = ({r_1}'(t_0), {r_2}'(t_0), ..., {r_m}'(t_0))$ ως παράγωγο της $\overrightarrow{r}$ στο x_0.

Σχέση Διαφορίσιμης συνάρτησης στο $\overrightarrow{x_0}$ με **Συνεχή συνάρτηση στο** $\overrightarrow{x_0}$.

Συνεχής συνάρτηση στο $\overrightarrow{x_0} \not\Rightarrow$ διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{x_0}$.
π.χ. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά όχι διαφορίσιμη.
Όμως ισχύει το αντίστροφο.

Πρόταση 5.0.11. *Έστω συνάρτηση* $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *διαφορίσιμη στο* $\overrightarrow{x_0}$.
Τότε η f *είναι συνεχής στο* $\overrightarrow{x_0}$.

Απόδειξη. Ισχύει $f(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{h}) = f(\overrightarrow{x_0}) + T_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{h}) + ||\overrightarrow{h}|| \cdot \overrightarrow{q}(\overrightarrow{h})$,
για $||\overrightarrow{h}|| < \epsilon$ και $lim_{\overrightarrow{h} \to 0} q(\overrightarrow{h}) = 0 = q(\overrightarrow{0})$.
Έχουμε $|f(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{h}) - f(\overrightarrow{x_0})| \leq |T_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{h}) + ||\overrightarrow{h}||q(\overrightarrow{h})| \leq (||\overrightarrow{a}_{\overrightarrow{x_0}}|| + 1) \cdot ||\overrightarrow{h}||$,

για $||\overrightarrow{h}|| < \delta$ ώστε $|q(\overrightarrow{h})| < 1$. Άρα η f είναι συνεχής στο $\overrightarrow{x_0}$. □

Σχέση Μερικής Παραγώγου-Διαφόρισης.

Έστω συνάρτηση $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, στοιχείο $x_0 \in A$ και A ανοιχτό ($d \geq 2$).
Η ύπαρξη των $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0})$, $i = 1, 2, ..., d \not\Rightarrow$ ότι η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{x_0}$.
π.χ. 1. Η μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ είναι ασυνεχής συνάρτηση στο $(0,0)$ και άρα μη διαφορίσιμη :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } xy = 0 \\ 0, & \text{αν } xy \neq 0. \end{cases}$$

2. Η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Πρόταση 5.0.12. *Έστω $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{x_0} \in A$ ανοιχτό, διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{x_0}$.
Τότε υπάρχουν οι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0})$, για κάθε $i = 1, ..., d$.
Έχουμε $df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{e_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0})$ και ισχύει
$df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{h}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{x_0}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(\overrightarrow{x_0})) \cdot (h_1, h_2, ..., h_d) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_i} \cdot h_i$.*

Απόδειξη. $lim_{\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}} \frac{f(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{h}) - f(\overrightarrow{x_0}) - df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{h})}{||\overrightarrow{h}||} = 0 \Rightarrow lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0}+t\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{x_0}) - tdf(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{e_i})}{t} = 0$
$\Rightarrow \exists\ lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0}+t\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{x_0})}{t} = df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{e_i}) = \frac{\vartheta f}{\vartheta x_i}(\overrightarrow{x_0})$. □

Πίνακας του διαφορικού / Πίνακας ***Jacobi*****.**

Έστω συνάρτηση $\overrightarrow{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$, διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{x_0} \in A$,
τότε η συνάρτηση $\overrightarrow{T_{\overrightarrow{x_0}}} = d\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική.
Αν $d = m = 1$ έχουμε $T_{x_0}(1) = f'(x_0)$ και $(f'(x_0))$ ο αντίστοιχος 1×1 πίνακας.

Αν $d = 1, m \geq 2$ έχουμε $\overrightarrow{r} : A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ και $\begin{pmatrix} {r_1}'(t_0) \\ {r_2}'(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ {r_m}'(t_0) \end{pmatrix}$ ο αντίστοιχος $m \times 1$ πίνακας.

Αν $d \geq 2, m = 1$, έχουμε $T_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{h}) = df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{h}) = (\frac{\vartheta f}{\vartheta x_1}(\overrightarrow{x_0}), ..., \frac{\vartheta f}{\vartheta x_d}(\overrightarrow{x_0})) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ . \\ h_d \end{pmatrix}$.

Ο αντίστοιχος $(1 \times d)$ πίνακας είναι το $\bigtriangledown f(\overrightarrow{x_0}) = (\frac{\vartheta f}{\vartheta x_1}(\overrightarrow{x_0}), ..., \frac{\vartheta f}{\vartheta x_d}(\overrightarrow{x_0}))$.

Το παραπάνω **Ανάδελτα** είναι η κλίση της f στο $\overrightarrow{x_0}$.
Αν $m, d \geq 2$, έχουμε $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ και ο αντίστοιχος πίνακας $d\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) = (df_1(\overrightarrow{x_0}), ..., df_m(\overrightarrow{x_0}))$ είναι ο **Πίνακας** *Jacobi* :

$$\mathcal{J}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\vartheta f_1}{\vartheta x_1}(\overrightarrow{x_0}), \frac{\vartheta f_1}{\vartheta x_2}(\overrightarrow{x_0}), ..., \frac{\vartheta f_1}{\vartheta x_d}(\overrightarrow{x_0}) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\vartheta f_m}{\vartheta x_1}(\overrightarrow{x_0}), \frac{\vartheta f_m}{\vartheta x_2}(\overrightarrow{x_0}), ..., \frac{\vartheta f_m}{\vartheta x_d}(\overrightarrow{x_0}) \end{pmatrix}.$$

<u>Υπενθύμιση</u> : Έστω $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{x_0} \in A$ (ανοιχτό).
Τότε $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) = lim_{t\to 0}\frac{f(\overrightarrow{x_0}+t\cdot\overrightarrow{e_i})-f(\overrightarrow{x_0})}{t} = \frac{df(\overrightarrow{x_0}+t\cdot\overrightarrow{e_i})}{dt}|_{t=0}$.
Επίσης η f είναι **διαφορίσιμη στο** $\overrightarrow{x_0}$
$\Leftrightarrow \exists\, T_{\overrightarrow{x_0}} = df(\overrightarrow{x_0}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ γραμμική τ.ω. $lim_{\overrightarrow{h}\to\overrightarrow{0}}\frac{f(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{h})-f(\overrightarrow{x_0})-T_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{h})}{||\overrightarrow{h}||} = 0$ ($T_{\overrightarrow{x_0}}$ είναι μοναδική).
Εάν $\exists\, df(\overrightarrow{x_0})$ τότε η f είναι συνεχής στο $\overrightarrow{x_0}$ και $\exists\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0})$, $df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{h}) = \nabla f(\overrightarrow{x_0})\cdot\overrightarrow{h}$, $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^d$.

Πρόταση 5.0.13. ***(Κριτήριο ύπαρξης διαφορικού*** $df(\overrightarrow{x_0})$*)*
Έστω ότι $\exists\, \nabla f(\overrightarrow{x_0})$ *και ισχύει* $\lim_{\overrightarrow{h}\to\overrightarrow{0}}\frac{f(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{h})-f(\overrightarrow{x_0})-\nabla f(\overrightarrow{x_0})\cdot\overrightarrow{h}}{||\overrightarrow{h}||} = 0$.
Τότε $\exists\, df(\overrightarrow{x_0})$ *και ισχύει* $df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{h}) = \nabla f(\overrightarrow{x_0})\cdot\overrightarrow{h}$.

Απόδειξη. Επειδή η $T_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{h}) = \nabla f(\overrightarrow{x_0})\cdot\overrightarrow{h}$ είναι γραμμική,ικανοποιείται ο ορισμός για την διαφορισιμότητα στο $\overrightarrow{x_0}$. Από την μοναδικότητα έχουμε ότι $\exists\, df(\overrightarrow{x_0})$. □

Σχέση διαφορισιμότητας - Συνέχεια Μερικών Παραγώγων.

Έστω $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{x_0} \in A$ και ότι $\exists\, df(\overrightarrow{x_0}) \not\Rightarrow$ οι $\frac{\vartheta f}{\vartheta x_i}$ είναι συνεχείς στο $\overrightarrow{x_0}$.
π.χ. Για την παρακάτω συνάρτηση,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

$\exists\, f'(0) = 0$ αλλά η παράγωγος δεν είναι συνεχής στο 0. Πράγματι, $f'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$, αλλά $\nexists\, \lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$.

Θεώρημα 5.0.14. *Έστω συνάρηση* $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, *στοιχείο* $\overrightarrow{x_0} \in A$
και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$ *για κάθε* $\overrightarrow{x} \in S(\overrightarrow{x_0}, \delta) \subseteq A$
και είναι συνεχείς στο $\overrightarrow{x_0}$, *για κάθε* $i = 1, 2, ..., d$.
Τότε $\exists$ *το διαφορικό* $df(\overrightarrow{x_0})$.

Απόδειξη. Για $d = 2$ έχουμε :
Έστω $h_1, h_2 \neq 0$ έτσι ώστε $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in S((x_0, y_0), \delta)$. Τότε ισχύουν :
$f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0 + \theta_1 \cdot h_1, y_0) \cdot h_1$, για κάποιο $\theta_1 = \theta_1(h_1) \in (0, 1)$.
$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0) = \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0 + h_1, y_0 \cdot \theta_2 \cdot h_2) \cdot h_2$,
για κάποιο $\theta_2 = \theta_2(h_1, h_2) \in (0, 1)$.
Τώρα έχουμε : $\frac{|f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-\frac{\vartheta f(x_0,y_0)}{\vartheta x}\cdot h_1-\frac{\vartheta f(x_0,y_0)}{\vartheta y}\cdot h_2|}{||\overrightarrow{h}||}$
$= \frac{|\frac{\vartheta f(x_0+\theta_1,y_0)}{\vartheta x}\cdot h_1+\frac{\vartheta f(x_0+h_1,y_0+\theta_2 h_2)}{\vartheta y}\cdot h_2-\frac{\vartheta f(x_0,y_0)}{\vartheta x}\cdot h_1-\frac{\vartheta f(x_0,y_0)}{\vartheta y}\cdot h_2|}{||\overrightarrow{h}||}$
$\leq \frac{|h_1|}{\|\overrightarrow{h}\|}[|\frac{\vartheta f(x_0+\theta_1,y_0)}{\vartheta x} - \frac{\vartheta f(x_0,y_0)}{\vartheta x}|] + \frac{|h_2|}{\|\overrightarrow{h}\|}[|\frac{\vartheta f(x_0+h_1,y_0+\theta_2 h_2)}{\vartheta x} - \frac{\vartheta f(x_0,y_0)}{\vartheta y}|]$.
Άρα από την υπόθεση για τη συνέχεια των Μερικών Παραγώγων στο $\overrightarrow{x_0}$, έπεται ότι το 2ο μέλος τείνει στο 0, όταν $(h, h_1) \to (0, 0)$, δηλαδή $\exists\, df(\overrightarrow{x_0})$. $\square$

Κατευθυνόμενη Παράγωγος ή Παράγωγος κατά Κατεύθυνση.

Έστω $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{x_0} \in A$, Τότε αν $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\overrightarrow{a}\| = 1$, ορίζουμε $D_{\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0}+t\overrightarrow{a})-f(\overrightarrow{x_0})}{t} = \frac{df(\overrightarrow{x_0}+t\overrightarrow{a})}{dt}|_{t=0}$.
Παράγωγος κατά κατεύθυνση $\overrightarrow{a}$ της f στο $\overrightarrow{x_0}$, με $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_i}$ είναι η $D_{\overrightarrow{e_i}} f(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_i}$.

Σχέση Παραγ. κατά Κατεύθυνση-Συνέχειας / Διαφορισιμότητας.

Έστω η συνάρτηση,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

τότε για το στοιχείο $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, με $\|\overrightarrow{a}\| = 1$, έχουμε

$$D_{\overrightarrow{a}} f(0,0) = \begin{cases} \frac{{a_1}^2}{a_2}, & \text{αν } a_2 \neq 0 \\ 0, & \text{αν } a_2 = 0. \end{cases}$$

Ταυτόχρονα η f είναι Ασυνεχής στο $(0,0)$, άρα μη διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Πρόταση 5.0.15. *Έστω ότι $\exists\, df(\overrightarrow{x_0})$. Τότε :*
i) $\exists\, D_{\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x_0})$, για κάθε $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^d$ με $\|a\| = 1$ και $D_{\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x_0}) = \nabla f(\overrightarrow{x_0}) = \overrightarrow{a}$.
ii) Έστω ότι $\nabla f(\overrightarrow{x_0}) \neq \overrightarrow{0}$. Τότε η μέγιστη μεταβολή της f στο $\overrightarrow{x_0}$, $max\{D_{\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x_0}) : \|a\| = 1\}$, λαμβάνει χώρα για $\overrightarrow{a} = \frac{\nabla f(\overrightarrow{x_0})}{\|\nabla f(\overrightarrow{x_0})\|}$.

Απόδειξη. *i)* Ανάλογη με αυτήν για $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_i}$.
ii) Έχουμε $D_{\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x_0}) = \nabla f(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{a} = \|\nabla f(\overrightarrow{x_0})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \|\nabla f(\overrightarrow{x_0})\| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$.
Τώρα $\theta = K(\nabla f(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{a}))$ και $max_{\|\overrightarrow{a}\|=1} D_{\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x_0}) = \|\nabla f(\overrightarrow{x_0})\|$,
για $\overrightarrow{a} = \frac{\nabla f(\overrightarrow{x_0})}{\|\nabla f(\overrightarrow{x_0})\|}$ (όπου $\sigma\upsilon\nu\theta = 1, \theta = 0, \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \nabla f(\overrightarrow{x_0})$, με $\lambda > 0$).

$\square$

Εφαπτόμενο Επίπεδο στη διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{x_0}$ Συνάρτηση.

Έστω διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{x_0}$ συνάρτηση $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$), έτσι ώστε $df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{h}) = h_1 \cdot \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_1} + ... + h_d \cdot \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_d}$. Ορίζουμε ως **Εφαπτόμενο επίπεδο** το εξής : $x_d + 1 = f(\overrightarrow{x_0}) + \nabla f(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})$, $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^d$.

Κατευθυνόμενη Παράγωγος.

Έστω $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, A ανοιχτό σύνολο, $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0) \in A$ και $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 5.0.16. ***Κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ προς την κατεύθυνση του $\overrightarrow{u}$*** *ονομάζεται ο ρυθμός μεταβολής της f κατά μήκος ευθείας που περνά από το $\overrightarrow{a}$ και είναι παράλληλη προς το $\overrightarrow{u}$. Δηλαδή:*
$D_{\overrightarrow{u}} f(\overrightarrow{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot u_1, y_0 + h \cdot u_2) - f(x_0, y_0)}{h}$.

Τι σημαίνει όμως αυτό γεωμετρικά ;

Στη μερική παράγωγο βρίσκουμε τον περιορισμό της f ως προς μία ευθεία παράλληλη στον άξονα y ή x (μερική ως προς x ή ως προς y αντίστοιχα) και στη συνέχεια παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που μας προκύπτει.
Η **μόνη διαφορά** της κατευθυνόμενης από της μερικής παραγώγου είναι ότι τώρα περιορίζουμε την f ως **προς μία ευθεία που περνά από ένα σημείο του πεδίου ορισμού της και είναι παράλληλη με ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα** u.
Έπειτα και πάλι παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που μας προκύπτει.
Η μερική παράγωγος δηλαδή είναι ειδική περίπτωση της κατευθυνόμενης.

Παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{sin(2x^2+3y^2)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, και θέλουμε να υπολογίσουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο ως προς το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ στο σημείο $(-1,-2)$. Δηλαδή : $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} f(-1,-2) =$;
Η καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας που περνά από το $(-1,-2)$ και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ είναι η : $y = x - 1$.
Ο ορισμός λέει ότι περιορίζουμε την f στην ευθεία $y = x - 1$ και παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που θα μας προκύψει στο σημείο $(-1,-2)$.

Έχουμε τη συνάρτησή μας :

$f(x,y) = \frac{sin(2x^2+3y^2)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in [-3,3] \times [-3,3] \setminus \{(0,0)\}$.

Παίρνουμε τον περιορισμό της για $y = x - 1$
(δηλαδή το μέρος της συνάρτησης που αντιστοιχεί για $y = x - 1$**).**

Απομονώνουμε τώρα αυτόν τον περιορισμό...

...και για να τον δούμε καλύτερα περιστρέφουμε λίγο τους άξονες.

Η κατευθυνόμενη παράγωγος που αναζητούμε είναι η παράγωγος αυτής της συνάρτησης ως προς x **στο σημείο** $x = -1$**.**

Σημείωση : Εφ' όσον $\exists\ df(\overrightarrow{x_0})$, $dg(\overrightarrow{x_0})$, ισχύουν τα εξής :
$d(f+g)(\overrightarrow{x_0}) = df(\overrightarrow{x_0}) + dg(\overrightarrow{x_0})$ και $d(\lambda f)(\overrightarrow{x_0}) = \lambda \cdot df(\overrightarrow{x_0})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Διαφορικό.

Έστω συνάρτηση $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, στοιχείο $\overrightarrow{x_0} \in A$ και A ανοιχτό σύνολο.

Ορισμός 5.0.17. *Η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{x_0}$*
$\Leftrightarrow \exists\ u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *γραμμική και* $q : S(\overrightarrow{0}, \epsilon) \to \mathbb{R}$, *με* $\lim_{\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}} q(\overrightarrow{h}) = 0$, *τέτοιες ώστε*
$f(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{h}) = f(\overrightarrow{x_0}) + u(\overrightarrow{h}) + \| \overrightarrow{h} \| \cdot q(\overrightarrow{h})$
$\Leftrightarrow \exists\ u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *γραμμική τέτοια ώστε* $\lim_{\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}} \frac{f(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{h}) - f(\overrightarrow{x_0}) - u(\overrightarrow{h})}{\| \overrightarrow{h} \|} = 0$.
*Τη **μοναδική** αυτή συνάρτηση u συμβολίζουμε με $df(\overrightarrow{x_0})$ και ονομάζουμε διαφορικό της f στο $\overrightarrow{x_0}$.*

$\boxed{\text{Για } d = 1 \text{ έχουμε :}}$

$f : A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A ανοιχτό σύνολο και $df(x_0)(h) = \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot h$, $h \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα :
Η $f(x) = sinx + |x|$, $x \in$ [-4π, 4π], έχει σε όλα τα σημεία της διαφορικό εκτός από το σημείο $x = 0$.

Ας δούμε για το σημείο $x = \frac{3\pi}{2}$. Έχουμε την **εφαπτόμενη ευθεία.**
Το **διαφορικό** είναι η ευθεία αυτή, αν την μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων...!
Αυτό γιατί το διαφορικό είναι εξ' ορισμού **γραμμική συνάρτηση** και **πρέπει** να περνά από την αρχή των αξόνων.

$\boxed{\text{Για } d = 2 \text{ έχουμε :}}$

$f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$, A ανοιχτό σύνολο,
$df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \cdot h_2$, $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα :

Η $f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} sin(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}})$, $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2] \setminus \{(0, 0)\}$, έχει διαφορικό σε όλα τα σημεία της.

Ας δούμε για το σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Έχουμε το **εφαπτόμενο επίπεδο.**
Το **διαφορικό** είναι το επίπεδο αυτό, αν το μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων...! Βλέπουμε ότι η **μόνη** σχέση που έχουν το διαφορικό και το εφαπτόμενο επίπεδο είναι ότι είναι παράλληλα!

Άσκηση 5.0.18. *i)* $f(\overrightarrow{x}) = c$, $\overrightarrow{x} \in A(\subseteq \mathbb{R}^d) \Rightarrow \exists\ df(\overrightarrow{x_0}) = 0$.
(Υπόδειξη : $df(\overrightarrow{x_0}) = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + ... + 0 \cdot h_d$*)*
ii) $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *γραμμική* $\Rightarrow dT(\overrightarrow{x_0}) = T$.
iii) $d(T + c)(\overrightarrow{x_0}) = T$, T *γραμμική.*

Άσκηση 5.0.19. *Να βρείτε το Διαφορικό και την Εφαπτόμενη ευθεία της* $f(x) = \eta\mu x$, *για* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$.

Λύση Έχουμε $df(x_0)(h) = f'(x_0)h$, δηλαδή $df(x_0)(h) = (\sigma\upsilon\nu x_0)h$, $h \in \mathbb{R}$.
Εφαπτόμενη ευθεία είναι η $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Τώρα $x_0 = 0 \Rightarrow df(0)(x) = x$, $x_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow df(\frac{\pi}{2})(x) = 0$.

Άσκηση 5.0.20. *Έστω η συνάρτηση* $f(x, y) = \frac{\eta\mu(2x^2+3y^2)}{x^2+y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,
Να βρείτε τα $df(-1. - 2)$, $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}(-1. - 2)$.

Λύση Έχουμε $(0, 0) \notin S((-1. - 2), \delta) = S$ και έστω $(x, y) \in S$, επίσης
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{4x\sigma\upsilon\nu(2x^2+3y^2)(x^2+y^2)-2x\eta\mu(2x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{6y\sigma\upsilon\nu(2x^2+3y^2)(x^2+y^2)-2y\eta\mu(2x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
Αυτές είναι Συνεχείς στο $S \Rightarrow \exists\ df(x, y)$, για κάθε $(x, y) \in S$.
Τώρα $df(-1, -2)(h_1, h_2) = \frac{-20\sigma\upsilon\nu(14)+2\eta\mu(14)}{25} \cdot h_1 + \frac{-60\sigma\upsilon\nu(14)+4\eta\mu(14)}{25} \cdot h_2$
και $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}(-1. - 2) = \bigtriangledown f((-1, -2))(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{6\eta\mu(14)-80\sigma\upsilon\nu(14)}{25\sqrt{2}}$.
Βλέπε σχήμα σελ. 75.

Άσκηση 5.0.21. *Έστω συνάρτηση* $f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \eta\mu(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Να βρεθούν το $df(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *και το Εφαπτόμενο επίπεδο.*

Λύση Εργαζόμαστε ανάλογα με την προηγούμενη Άσκηση και έχουμε :
$df(\frac{1}{2},\frac{1}{2})(h_1,h_2) = (2e^2\eta\mu(e^{-2}) + 2e^2\sigma\upsilon\nu(e^{-2}))h_1 + (2e^2\eta\mu(e^{-2}) + 2e^2\sigma\upsilon\nu(e^{-2}))h_2$.
Εφαπτόμενο επίπεδο : $z = e^2\eta\mu(e^{-2}) + \alpha(x-\frac{1}{2}) + \alpha(y-\frac{1}{2})$.
Βλέπε σχήμα σελ. 84.

Άσκηση 5.0.22. *Να βρεθεί το* $d\overrightarrow{f}(1,2,0)$ *για την συνάρτηση* $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (e^z, x^2+y^2)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Λύση Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι της μορφής $\overrightarrow{f} = (f_1,f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
Έχουμε για την $f_1(x,y,z) = e^z$ ότι
$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = e^z$.
Αυτές είναι Συνεχείς στο $\mathbb{R}^3$
$\Rightarrow \exists\ df_1(x_0.y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3) = 0h_1 + 0h_2 + e^{z_0}h_3$, $(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$.
Τώρα για την $f_2(x,y,z) = x^2+y^2$ έχουμε :
$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = 0$
$\Rightarrow \exists\ df_2(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3) = (2x_0)h_1 + (2y_0)h_2 + 0h_3$.
Τελικά ,

$$d\overrightarrow{f}(1,2,0)(h_1,h_2,h_3) = (0h_1 + 0h_2 + e^0h_3, 2h_1 + 4h_2 + 0h_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 5.0.23. *Έστω η συνάρτηση,*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Να βρεθούν το $df(0,0)$ *και το εφαπτόμενο επίπεδο στο* $(0,0)$.

Λύση Παρατηρούμε ότι $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(0,0) = 0 = \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(0,0)$. Έχουμε ότι
$T_{(0,0)}(h_1,h_2) = 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2 = \nabla f(0,0)(h_1,h_2)$
$= \frac{|f(0,0)+(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{1}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}(\frac{|h_1|{h_2}^2}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}) = \frac{|h_1|{h_2}^2}{{h_1}^2+{h_2}^2} \to 0$,
όταν $(h_1,h_2)\to(0,0)$. Άρα $\exists\ df(0,0)$ και $df(0,0)(h_1,h_2) = 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2$.
Εφαπτόμενο επίπεδο : $z = f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0) \Rightarrow z = 0$.

Άσκηση 5.0.24. *Έστω η συνάρτηση,*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Να βρεθούν το $df(0,0)$ *και το εφαπτόμενο επίπεδο στο* $(0,0)$.

Λύση Παρατηρούμε ότι $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(0,0)=1$, $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(0,0)=0$. Έχουμε
$T_{(0,0)}(h_1,h_2)=1\cdot h_1+0\cdot h_2=\nabla f(0,0)(h_1,h_2)$
$=\frac{|f(0,0)+(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|}=\frac{1}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}(\frac{{h_2}^3}{{h_1}^2+{h_2}^2}-h_1)=\frac{|h_1|{h_2}^2}{({h_1}^2+{h_2}^2)^{\frac{3}{2}}}\nrightarrow 0$,
όταν $(h_1,h_2)\to(0,0)$ (Γιατί ;).

Άσκηση 5.0.25. *i) Έστω ότι ισχύει $f(x,y)=g(x)+\phi(y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, όπου g, $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τ.ω. $\exists\ g'(x_0)$, $\phi'(x_0)$ για κάποια $x_0\in\mathbb{R}$, $y_0\in\mathbb{R}$.*
Να δείξετε ότι $\exists$ το $df(x_0,y_0)$.
ii) Έστω η συνάρτηση,

$$f(x,y)=\begin{cases}\eta\mu x+y^2\eta\mu\frac{1}{y}, & \alpha\nu\ y\neq 0\\ \eta\mu x & \alpha\nu\ y=0.\end{cases}$$

Να βρείτε το $df(0,0)$.
iii) Να βρείτε το Εφαπτόμενο επίπεδο της ii) στο $(0,0)$.

Λύση *i)* Από τις Υποθέσεις έχουμε :
$\exists\ g'(x_0)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0+h_1)-g(x_0)-g'(x_0)\cdot h_1}{h_1}=0.$
$\exists\ \phi'(x_0)\Leftrightarrow \lim_{y\to y_0}\frac{\phi(y_0+h_2)-\phi(y_0)-\phi'(y_0)\cdot h_2}{h_2}=0.$
Τώρα $\frac{|f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-g'(x_0)\cdot h_1-\phi'(y_0)\cdot h_2|}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}=$
$\frac{|g(x_0+h_1)-\phi(y_0+h_2)-(g(x_0)+\phi(y_0))-g'(x_0)\cdot h_1-\phi'(y_0)\cdot h_2|}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}\leq$
$|\frac{g(x_0+h_1)-g(x_0)-g'(x_0)\cdot h_1}{h_1}|\cdot\frac{|h_1|}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}+|\frac{\phi(y_0+h_2)-\phi(y_0)-\phi'(y_0)\cdot h_2}{h_2}|\cdot\frac{|h_2|}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}\to 0$,
όταν $(h_1,h_2)\to 0$. Άρα $\exists\ df(x_0,y_0)(h_1,h_2)=g'(x_0)\cdot h_1+\phi'(y_0)\cdot h_2$.
ii) Η $f(x,y)$ γράφεται ως $f(x,y)=g(x)+\phi(y)$, όπου $g(x)=\eta\mu x$, $g'(0)=1$ και

$$\phi(y)=\begin{cases}y^2\eta\mu\frac{1}{y}, & \text{αν } y\neq 0\\ 0, & \text{αν } y=0.\end{cases}$$

με $\phi'(0)=0$. Από το *i)* $\exists\ df(0,0)(h_1,h_2)=1\cdot h_1+0\cdot h_2$.
iii) $z=f(0,0)+\nabla f(0,0)(x-0,y-0)\Rightarrow z=x$.

Άσκηση 5.0.26. *Έστω η συνάρτηση,*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \alpha\nu\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \alpha\nu\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Να δείξετε ότι :
i) Οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στο $\mathbb{R}^2$, αλλά δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$
ii) Υπάρχει το $df(0,0)$.

Λύση $i)$ Έχουμε ότι η μερική παράγωγος

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

είναι Ασυνεχής στο $(0,0)$ (Γιατί ;). Ανάλογα η $\frac{\partial f}{\partial y}$ ασυνεχής στο $(0,0)$.
$ii)$ Παρατηρούμε ότι :
$\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-(0\cdot h_1+0\cdot h_2)|}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}=\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}\cdot\eta\mu\frac{1}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}}\to 0,$
όταν $(h_1,h_2)\to 0$.

Ασκήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=x^2+\tau o\xi\epsilon\phi y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Να βρείτε :
$i)$ Αν υπάρχει το $df(1,0)$.
$ii)$ Το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(1,0)$.
$iii)$ Το $maxD_{\overrightarrow{a}}f(1,0)$ ($\|\overrightarrow{a}\|=1$).

2. Έστω η συνάρτηση $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(\frac{x}{1+x+y+z},\frac{y}{1+x+y+z},\frac{z}{1+x+y+z})$,
με $(x,y,z)\in A=\{(x,y,z):x+y+z+1\neq 0\}$. Να βρείτε τα παρακάτω :
$i)$ Το $d\overrightarrow{F}(x_0,y_0,z_0)$, όπου $(x_0,y_0,z_0)\in A$.
$ii)$ Την ορίζουσα $det\mathcal{J}(x_0,y_0,z_0)$.

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\eta\mu(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

υπάρχει το $df(0,0)$;

4. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα $D_{\overrightarrow{a}}f_i(0,0)$ και $df_i(0,0)$ για τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

και

$$f_2(x,y)=\begin{cases}\frac{\eta\mu(x^3)}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

5. Έστω οι συναρτήσεις,

$$f_\lambda(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{(x^2+y^2)^\lambda}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Να δείξετε ότι ισχύει : $\exists\ df_\lambda(0,0) \Leftrightarrow \lambda < 1$.

6. Να υπολογιστούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\sigma\upsilon\nu y} - \alpha x - \beta y - \gamma}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

7. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Να βρεθεί ο περιορισμός της f στην ευθεία $y = \lambda x$: $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, με $g_\lambda(0) = D_a f(0,0) = 0$. Να δειχθεί ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Μερικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού.

Εφαρμογές

Μερικές παράγωγοι ανωτέρας ή υψηλοτέρας τάξης (C^k, $k \in \mathbb{N}$ ή $k = \infty$)

Έστω συνάρτηση $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ και A ανοιχτό σύνολο.
Έστω ότι $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}$, για κάθε $i = 1, ..., d$, στην $S(\overrightarrow{x_0}, \delta) \subseteq A$. Τότε ορίζουμε $g_i(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$, για κάθε $\overrightarrow{x} \in S(\overrightarrow{x_0}, \delta)$. Εάν $\exists\ \frac{\partial g_i}{\vartheta x_j}(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \mid_{\overrightarrow{x_0}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{x_0})$, θα λέγεται **2ης τάξης** $i-j$ **μερική παράγωγος**. Για την περίπτωση όπου $i = j$, θα συμβολίζεται $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(\overrightarrow{x_0})$ (Άλλοι συμβολισμοί f_{j-i}, $f_{x_j x_i}$).
Έστω $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ στο $S(\overrightarrow{y_0}, \delta) \subseteq A$. Εάν $\exists\ \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}) \mid_{\overrightarrow{y_0}} = \frac{\partial^3 f(\overrightarrow{y_0})}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$, θα λέγεται **3ης τάξης** $i-j-k$ **μερική παράγωγος** κ.ο.κ....

C^k-συναρτήσεις

Ορίζουμε την κατηγορία των C^k-συναρτήσεων ως εξής :
$f = C^1$ (δηλαδή θα λέμε ότι η f είναι C^1**-συνάρτηση** ή ανήκει στην κατηγορία των C^1-συναρτήσεων) $\Leftrightarrow \exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{x} \in A$, για κάθε $i = 1, 2, ..., d$ και είναι συνεχείς στο A.
$f = C^2 \Leftrightarrow f \in C^1$ και $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \vartheta x_i}(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{x} \in A$, $i, j = 1, ..., d$ και είναι συνεχείς στο A.
.
.
.
$f = C^\infty \Leftrightarrow \exists$ κάθε τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς στο A.
Τέλος θα λέμε για την συνάρτηση $\overrightarrow{F} = (F_1, ..., F_m) : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$ ότι
$\overrightarrow{F} = C^k \Leftrightarrow$ οι συναρτήσεις F_1, F_2, ..., F_m είναι C^k.

Ασκήσεις

1.) Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = xy^2 + e^{x^2+z} + \eta\mu(x+z^2)$.
Να ευρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, για $i = 1,2,3$.

Λύση : $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2xe^{x^2+z} + \sigma\upsilon\nu(x+z^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial z} = e^{x^2+z} + 2z\sigma\upsilon\nu(x+z^2)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2+z} + 4x^2e^{x^2+z} - \eta\mu(x+z^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} = 2xe^{x^2+z} - 2z\eta\mu(x+z^2)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{x^2+z} + 2\sigma\upsilon\nu(x+z^2) - 4z^2\eta\mu(x+z^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2y$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 2xe^{x^2+z} - 2z\eta\mu(x+z^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 0$.

<u>Παρατήρηση</u> : Έχουμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}$. Ισχύει όμως αυτό γενικά ; Η απάντηση είναι **ΟΧΙ**.

2.) Έστω συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Να δείξετε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Λύση : Έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ -1, & \text{αν } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y\ ,\ y\in\mathbb{R}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{-x(y^4-x^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & \text{αν } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ και οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$.

Θεώρημα 5.0.27. *(Clairant – Schwarz, Μεικτών Παραγώγων)*
Έστω συνάρτηση $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ *και στοιχείο* $\overrightarrow{x_0} \in A$ *τέτοια ώστε*
i) $\exists$ *οι μερικές παράγωγοι* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *σε κάθε στοιχείο του* $S(\overrightarrow{x_0}, \delta) \subseteq A$
και ii) Είναι οι μερικές παράγωγοι συνεχείς στο $\overrightarrow{x_0}$.
Τότε ισχύει ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overrightarrow{x_0})$.
Ιδιαιτέρως : *Εάν* $f = C^2$ *τότε* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *στο* A.

Απόδειξη. Για το στοιχείο $\overrightarrow{x_0} = (\alpha, \beta)$, υπάρχουν $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, $\xi \cdot \eta \neq 0$, τέτοια ώστε $(\alpha, \beta + \eta)$, $(\alpha + \xi, \beta + \eta)$, (α, β), $(\alpha + \xi, \beta) \in S((\alpha, \beta), \delta) \subseteq A$. Τότε έχουμε :
$F(\xi, \eta) = [f(\alpha + \xi, \beta + \eta) - f(\alpha + \xi, \beta)] - [f(\alpha, \beta + \eta) - f(\alpha, \beta)](1)$
$F(\xi, \eta) = [f(\alpha + \xi, \beta + \eta) - f(\alpha, \beta + \eta)] - [f(\alpha + \xi, \beta) - f(\alpha, \beta)](2)$
Ορίζουμε $g(x) = f(x, \beta + \eta) - f(x, \beta)$, για x τέτοιο ώστε $|x - \alpha| < \delta$, παραγωγίσιμη ως προς x. Τότε ισχύει $F(\xi, \eta) = g(\alpha + \xi) - g(\alpha)$.
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. Έχουμε ότι $\exists\ \theta_1(0.1)$, $\theta_2(0.1)$:
$g(\alpha + \theta_1, \xi) \cdot \xi = [\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha + \theta_1 \cdot \xi, \beta + \eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha + \theta_1 \cdot \xi, \beta)] \cdot \xi = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha + \theta_1 \cdot \xi, \beta + \theta_2 \cdot \eta) \cdot \eta \xi$.
Άρα $\lim_{(\xi,\eta) \to (0,0)} \frac{F(\xi,\eta)}{\xi \cdot \eta} = \lim_{(\xi,\eta) \to (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha + \theta_1 \cdot \xi, \beta + \theta_2 \cdot \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, \beta)$.
Έστω τώρα $\phi(y) = f(\alpha + \xi, y) - f(\alpha, y)$, για y τέτοιο ώστε $|y - \beta| < r$. Έχουμε $F(\xi, \eta) = \phi(\beta + \eta) - \phi(\beta) = \phi'(\beta + \theta_3 \cdot \eta) \cdot \eta = [\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha + \xi, \beta + \theta_3 \cdot \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta + \theta_3 \cdot \eta)] \cdot \eta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha + \theta_4 \cdot \xi, \beta + \theta_3 \cdot \eta) \cdot \xi \eta$ και επομένως $\lim_{(\xi,\eta) \to (0,0)} \frac{F(\xi,\eta)}{\xi \eta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, \beta)$.
Τελικά $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, \beta)$. □

Στροβιλισμός, Απόκλιση, Τελεστής *Laplace*, Αστρόβιλο Διανυσματικού Πεδίου, Διανυσματικό Πεδίο Κλίσεων / Συντηρητικό Διανυσματικό Πεδίο, Αρμονικές Συναρτήσεις.

Ορισμοί.

1) Έστω συνάρτηση $\overrightarrow{F} = (P, Q, R) : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ και $\exists$ οι μερικές παράγωγοι των P, Q, R. Τότε το διάνυσμα

$$curl\overrightarrow{F} = rot\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

$=: (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z})\overrightarrow{i} - (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k}$ λέγεται Στροβιλισμός.

• $curl\overrightarrow{F}(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, δηλαδή ο στροβιλισμός του $\overrightarrow{F}$ στο (x_0, y_0, z_0).
Εάν $curl\overrightarrow{F}(x, y, z) = \overrightarrow{0}$, για κάθε $(x, y, z) \in A$, τότε το $\overrightarrow{F}$ λέγεται **αστρόβιλο Διανυσματικό Πεδίο**. Εάν $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ τότε $curl\overrightarrow{F}(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k}$.

2) Έστω $\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^3$ Διανυσματικό Πεδίο. Εάν $\exists$ συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R} : \overrightarrow{F} = \nabla f$ στο A, τότε το $\overrightarrow{F}$ λέμε ότι είναι Δ. Π. κλίσεων / Συντηρητικό Διανυσματικό Πεδίο και το $V = -f$ λέμε ότι είναι το Δυναμικό του $\overrightarrow{F}$.

3) Έστω $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ τότε έχουμε
$div\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.
Το $div\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}$, ονομάζεται **βαθμωτό πεδίο**.

Τελεστής *Laplace*, **Αρμονική Συνάρτηση.**

Έστω συνάρτηση $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Έχουμε $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_d}^2}$.
Εάν $\Delta f = 0$ στο A, τότε η f λέγεται αρμονική συνάρτηση.

Ενημερωτικά :
Το σύμβολο ∇ διαβάζεται Ανάδελτα, *Del*, *Nabla*, *Cradient*.
Το ανάδελτα το συναντάμε και ως εξής :
$\nabla \to f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$
$\nabla\times \to \nabla \times \overrightarrow{F} = curl\overrightarrow{F}$
$\nabla\cdot \to \nabla \cdot \overrightarrow{F} =$ απόκλιση
$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ (Τελεστής *Laplace*).

Ασκήσεις :

1) Έστω $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$, ένα C^2-Διαν.Πεδίο.
Να δείξετε ότι $div(curl\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) = 0$.

Λύση : Έχουμε $\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$.
Άρα $div(curl\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial R}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial Q}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial P}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial R}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial Q}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial P}{\partial y}) = 0$.

2) (α) Έστω $\overrightarrow{F}$ ένα C^1-Διαν.Πεδίο, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{F} = \nabla f$ (συντηρητικό).
Τότε το $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλ. $curl\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.
(β) Έστω $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0)$, με $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \diagdown \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}\}$.
Να δείξετε ότι $i)$ $\overrightarrow{F} =$ αστρόβιλο και $ii)$ $\overrightarrow{F}$ δεν είναι συντηρητικό.

Λύση : (α) Επειδή $\overrightarrow{F} = \nabla f$, έχουμε $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \frac{\partial f}{\partial z}$,
επίσης $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ και από Θ.*Clairant* : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Ανάλογα $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$.

(β) i) Έχουμε $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0)$, άρα
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)^2 - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{(x^2+y^2)^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial z}$ και $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$.
Άρα $curl\overrightarrow{F}(x,y,z) = (0,0,0)$, για όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$.
ii) Το $\overrightarrow{F}$ δεν είναι συντηρητικό, δηλαδή $\nexists\ f : \nabla f = \overrightarrow{F}$,
(βλέπε $\rightarrow$ Μάθημα 8 (Θ.Μ.Τ. Δ.Λ.) ή $\rightarrow$ θεώρημα $Green$).

3) Έστω i) $\overrightarrow{F_1}(x,y,z) = (y,x,0)$, ii) $\overrightarrow{F_2}(x,y,z) = (3x^2y, x^3+y, 0)$ και
iii) $\overrightarrow{F_3}(x,y,z) = (2xy+z-1, x^2+2yz^2, x+2y^2z-2z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Να δείξετε ότι α) $\overrightarrow{F_k}$,για $k = 1,2,3$, είναι αστρόβιλα και
β) $\overrightarrow{F_k}$, για $k = 1,2,3$, είναι Δ.Π. κλίσης/ Συντηρητικά.

Λύση : α) Εύκολα.
β) i) Έστω $\overrightarrow{F_1}(x,y,z) = (y,x,0)$, ψάχνουμε $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\nabla f = \overrightarrow{F}$. Έχουμε
$\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ $\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = xy + \phi_1(y,z)$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + \frac{\partial}{\partial y}\phi_1(y,z)$, $\phi_1(y,z) = \phi_2(z)$ και $\frac{\partial \phi_1(y,z)}{\partial y} = 0$.
Άρα $f(x,y,z) = xy + \phi_2(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \phi_2'(z) \Rightarrow \phi_2(z) = c \Rightarrow f(x,y,z) = xy + c$.

ii) Έστω $\overrightarrow{F_2}(x,y,z) = (3x^2y, x^3+y, 0)$,ψάχνουμε $f :\ \overrightarrow{F_2} = \nabla f$. Έχουμε
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + y$ $\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = x^3y + \phi_1(y,z)$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^3 + \frac{\partial}{\partial y}\phi_1(y,z)$, $\frac{\partial \phi_1(y,z)}{\partial y} = y \Rightarrow \phi_1(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + \phi_2(z)$. Άρα
$f(x,y,z) = x^3y + \frac{1}{2}y^2 + \phi_2(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \phi_2'(z) = 0 \Rightarrow \phi_2(z) = c \Rightarrow f(x,y,z) = x^3y + \frac{1}{2}y^2 + c$.

iii) Έστω $\overrightarrow{F_3}(x,y,z) = (2xy+z-1, x^2+2yz^2, x+2y^2z-2z)$. Έχουμε
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z - 1 \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \phi_1(y,z)}{\partial y}$.
$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x + 2y^2z - 2z$.
$\frac{\partial \phi_1(y,z)}{\partial y} = 2yz^2 \Rightarrow \phi_1(y,z) = y^2z^2 + \phi_2(z)$.
Επομένως $f(x,y,z) = x^2y + zx - x + y^2z^2 + \phi_2(z)$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = x + 2y^2z + \phi_2'(z) \Rightarrow \phi_2'(z) = -2z \Rightarrow \phi_2(z) = -z^2 + c$.
Άρα $f(x,y,z) = x^2y + zx - x + y^2z^2 - z^2 + c$.

4) Έστω $\overrightarrow{F} = -\frac{GMm}{r^3}\overrightarrow{r}$ (**Πεδίο Βαρύτητας**),
με $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$, όπου $r = \|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, για $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Να δείξετε ότι :
i) Για το Δυναμικό του $Newton$, $V = -\frac{GMm}{r}$, ισχύει $\overrightarrow{F} = -\nabla V$.
Άρα το Δ.Π. είναι συντηρητικό

$ii)$ Το $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο.
$iii)$ Το V είναι αρμονική συνάρτηση, με $div\overrightarrow{F} = 0$.

Λύση : Για την $\overrightarrow{F}(x,y,z) = -GMm(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$, έχουμε $V(x,y,z) = \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\, \frac{\partial V}{\partial x} = GMm\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.
Τελικά $\overrightarrow{F} = -\nabla V$.
$ii)$ Επειδή $\overrightarrow{F}$ = συντηρητικό $\Rightarrow$ $\overrightarrow{F}$ = αστρόβιλο.
$iii)$ Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$.
Για την $\phi(x,y,z) = \frac{V(x,y,z)}{-GMm} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ έχουμε $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,
δηλαδή $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - x(2x)\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$.
Ομοίως έχουμε $\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$ και $\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$.
Άρα $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{3(x^2+y^2+z^2)-3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$.
Τελικά $div\overrightarrow{F} = div(-\nabla f) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (διότι $div(\nabla f)) = \Delta f$).

Άρα το Δ.Π. Βαρύτητας είναι ατρόβιλο, συντηρητικό. Η δυναμική ενέργεια V είναι Αρμονική Συνάρτηση και είναι ασυμπίεστο ($div\overrightarrow{F} = 0$).

Σημαντική Παρατήρηση !
• Το $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0)$, για $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagdown \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$,
είναι C^∞, αστρόβιλο, αλλά όχι συντηρητικό.
• Το $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagdown \{(0,0,0)\}$,
είναι C^∞, αστρόβιλο και συντηρητικό.
Συμπέρασμα :
Σημασία έχει **ΚΑΙ** το είδος του Πεδίου Ορισμού, όχι η συνάρτηση **ΜΟΝΟΝ**.

Κανόνας της Αλυσιδωτής Παραγώγισης / Κανόνας Αλυσίδας

Έστω συναρτήσεις $f : (\alpha,\beta) \to (\gamma,\delta)$, $g : (\gamma,\delta) \to \mathbb{R}$ και $\exists f'(x_0), g'(f(x_0))$.
Τότε $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.
Επίσης ισχύουν τα εξης $\mathcal{J}_{x_0}(g \circ f) = \mathcal{J}_{f(x_0)}(g) \cdot \mathcal{J}_{x_0}(f)$(Γραμμική Άλγεβρα),
$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$ και $d\phi(x_0)(h) = \phi'(x_0) \cdot h$, $h \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 5.0.28. *(Διαφόρισης της σύνθεσης 2 συναρτήσεων)*
Έστω $\overrightarrow{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to B(\subseteq \mathbb{R}^m)$ *και* $\overrightarrow{g} : B \to \mathbb{R}^l$, *όπου* A, B *ανοιχτά.*
Υποθέτουμε ότι, για το $\overrightarrow{x_0} \in A$, $\exists d\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})$ *και* $d\overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}))$.

Τότε υπάρχει το $d(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x_0})$ *και ισχύει* $d(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x_0}) = d\vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0})) \circ d\vec{f}(\vec{x_0})$.

Απόδειξη. Από την ύπαρξη του $d\vec{f}(\vec{x_0})$ έχουμε :
$\vec{f}(\vec{x_0} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x_0}) + \vec{T_1}(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \cdot \vec{q_1}(\vec{h})$,
όπου $\vec{T_1} = d\vec{f}(\vec{x_0})$, $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \vec{q_1}(\vec{h}) = \vec{q_1}(\vec{0}) = \vec{0}$ $(\|\vec{h}\| < r_1, S(\vec{x_0}, r_1) \subseteq A)$.
Επίσης από την ύπαρξη του $d\vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0}))$ έχουμε :
$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0}) + \vec{t}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0})) + \vec{T_2}(\vec{h}) + \|\vec{t}\| \cdot \vec{q_2}(\vec{t})$,
όπου $\vec{T_2} = d\vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0}))$, $\lim_{\vec{t}\to\vec{0}} \vec{q_2}(\vec{t}) = \vec{q_2}(\vec{0}) = \vec{0}$ $(\|\vec{t}\| < r_2, S(\vec{f}(\vec{x_0}), r_2) \subseteq B)$.
Έστω ακολουθία $\vec{h_n} \in S(\vec{0}, r_1)$, $\vec{h_n} \neq \vec{0}$, τέτοια ώστε $\vec{h_n} \to_n \vec{0}$.
Ορίζουμε $\vec{t_n} = \vec{T_1}(\vec{h_n}) + \|\vec{h_n}\| \cdot \vec{q_1}(\vec{h_n}) \to_n \vec{0}$, $t_n \in S(\vec{0}, r_2)$, $n \geq n_0$.
Παρατηρούμε ότι $\|\vec{t_n}\| \leq \|\vec{T_1}(\vec{h_n})\| + \|\vec{q_1}(\vec{h_n})\| \cdot \|\vec{h_n}\| \leq M\|\vec{h_n}\| + \|\vec{q_1}(\vec{h_n})\| \cdot \|\vec{h_n}\|$,
και επομένως η $(\frac{\|\vec{t_n}\|}{\|\vec{h_n}\|})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
Τώρα έχουμε, επειδή $\vec{T_2}$ γραμμική,
$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x_0} + \vec{h}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0} + \vec{h_n})) = \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x_0}) + \vec{T_2}(\vec{t_n}) + \|\vec{t_n}\|\vec{q_2}(\vec{t_n}) =$
$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x_0}) + \vec{T_2} \circ \vec{T_1}(\vec{h_n}) + \|\vec{h_n}\|\vec{T_2}(\vec{q_1}(\vec{h_n})) + \|\vec{t_n}\|\vec{q_2}(\vec{t_n})$.
Άρα $\frac{\vec{g}\circ\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) - \vec{g}\circ\vec{f}(\vec{x_0}) - \vec{T_2}\circ\vec{T_1}(\vec{h})}{\|\vec{h_n}\|} = \vec{T_2}(\vec{q_1}(\vec{h_n})) + \frac{\|\vec{t_n}\|}{\|\vec{h_n}\|}\vec{q_2}(\vec{t_n}) \to_n \vec{0}$.
Επομένως από Αρχή Μεταφοράς $\exists \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{g}\circ\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) - \vec{g}\circ\vec{f}(\vec{x_0}) - d\vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0}))\circ d\vec{f}(\vec{x_0})}{\|\vec{h}\|} = 0$.
Από τη μοναδικότητα της συνάρτησης του διαφορικού
$\Rightarrow \exists\ d(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x_0}) = d\vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0})) \circ d\vec{f}(\vec{x_0})$.

□

Πρόταση 5.0.29. *Έστω συναρτήσεις* $\vec{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to B(\subseteq \mathbb{R}^m)$, $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ *και* $\vec{g} : B \to \mathbb{R}^l$, $\vec{g} = (g_1, ..., g_l)$. *Αν* $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f} = (h_1, ..., h_l)$ *και* $\exists d\vec{f}(\vec{x_0})$, $\exists d\vec{g}(\vec{f}(\vec{x_0}))$,
Τότε $\mathcal{J}_{\vec{x_0}}(\vec{g} \circ \vec{f}) = \mathcal{J}_{\vec{f}(\vec{x_0})}(\vec{g}) \circ \mathcal{J}_{\vec{x_0}}(\vec{f})$.
Ιδιαιτέρως : Εάν $d = 1 = l$ *τότε* $\frac{d(g\circ\vec{r})(t_0)}{dt} = \nabla\vec{g}(\vec{r}(\vec{t_0})) \cdot \vec{r}\,'(t_0)$.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Θεώρημα και με χρήση Γραμμικής Άλγεβρας.
<u>Αναλυτικά</u> : Έχουμε

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t_1} & \frac{\partial h_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial t_d} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial h_l}{\partial t_1} & \frac{\partial h_l}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial t_d} \end{pmatrix}_{(\vec{x_0})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_1} & \frac{\partial g_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{(\vec{x_0})} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_d} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_d} \end{pmatrix}_{(\vec{x_0})}.$$

Επομένως $\frac{\partial h_i(\vec{x_0})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i(\vec{f}(\vec{x_0}))}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f_k(\vec{x_0})}{\partial t_j}$, για κάθε $i = 1, 2, ..., l$ και $j = 1, 2, ..., d$.

□

Άσκηση 5.0.30. *Έστω* $\vec{f}(u, v) = (u + v, u - v)$ *με* $f_1(u, v) = u + v$, $f_2(u, v) = u - v$ *και* $\vec{g}(x, y) = (x^2 + y^2, x^3, x + y)$ *με* $g_1(x, y) = x^2 + y^2$, $g_2(x, y) = x^3$, $g_3(x, y) = x + y$.

Αν $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$, *με* $\overrightarrow{h} = (h_1, h_2, h_3)$,
να υπολογιστούν οι μ.π. $\frac{\partial h_1}{\partial u}$, $\frac{\partial h_3}{\partial v}$ *κατ' ευθείαν ΚΑΙ με τον Κανόνα της Αλυσίδας.*

Λύση Έχουμε $\overrightarrow{h}(u,v) = \overrightarrow{g}(u+v, u\cdot v) = ((u+v)^2 + (u\cdot v)^2, (u+v)^3, u+v+u\cdot v)$.
Άρα $h_1(u,v) = (u+v)^2 + (u\cdot v)^2$, $h_2(u,v) = (u+v)^3$ και $h_3(u,v) = u+v+u\cdot v$.

Έχουμε $\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \\ \frac{\partial h_3}{\partial u} & \frac{\partial h_3}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix}_{\overrightarrow{f}(u,v)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$

Τώρα $\frac{\partial h_1}{\partial u} = 2(u+v) + 2uv^2(1)$ και $\frac{\partial h_2}{\partial u} = \frac{\partial g_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial u} = 2(u+v)\cdot 1 + 2uv\cdot v(2)$.
Άρα (1) = (2). Όμοια $\frac{\partial h_3}{\partial v} = \frac{\partial g_3}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial g_3}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial v}$.

Άσκηση 5.0.31. *Εστω συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^d\ \{0\} \to \mathbb{R}$ *διαφορίσιμη και Ομογενής α-τάξης* ($\alpha \neq 0$)*, δηλαδή ισχύει* $f(\lambda, \overrightarrow{x}) = \lambda^\alpha \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$*, για κάθε* $\lambda > 0$ *και* $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.
Να δείξετε ότι $\overrightarrow{x}\cdot\nabla f(\overrightarrow{x}) = \alpha\cdot f(\overrightarrow{x})$*, για κάθε* $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^d\backslash\{\overrightarrow{0}\}$.
(δηλαδή $\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} = \alpha f(\overrightarrow{x})$*- Εξίσωση Euler για ομογενείς συναρτήσεις).*

Λύση Έστω $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^d\backslash\{\overrightarrow{0}\}$ σταθερό και $\overrightarrow{r}(\lambda) = \lambda\cdot\overrightarrow{x}$, για $\lambda > 0$.
Τότε $\overrightarrow{r}'(\lambda) = \overrightarrow{x}$ και $h = f\circ\overrightarrow{r}$ διαφορίσιμη.
Έχουμε $\frac{dh(t)}{dt} = \nabla f(\overrightarrow{r}(t))\circ\overrightarrow{r}'(t)(1)$.
Από υπόθεση $h(t) = f\circ\overrightarrow{r}(t) = f(t\overrightarrow{x}) = t^\alpha\cdot f(\overrightarrow{x})$, για $t > 0$,
άρα $\frac{dh(t)}{dt} = \alpha t^{\alpha-1}\cdot f(\overrightarrow{x})$, για $t > 0(2)$.
Από (1) και (2) $\nabla f(\overrightarrow{r}(\overrightarrow{t}))\cdot\overrightarrow{x} = \alpha t^{\alpha-1}\cdot f(\overrightarrow{x})$, για $t > 0$.
Επομένως για $t = 1 > 0$ έχουμε $\overrightarrow{x}\cdot\nabla f(\overrightarrow{x}) = \alpha\cdot f(\overrightarrow{x})$.

Σημείωση Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^d\backslash\{\overrightarrow{0}\}$ και $\overrightarrow{x}\cdot\nabla f(\overrightarrow{x}) = \alpha\cdot f(\overrightarrow{x}) \Rightarrow$ η f είναι ομογενής α-τάξης (Υπόδειξη $\phi(t) = t^{-\alpha}f(t\overrightarrow{x})$).

Άσκηση 5.0.32. *i) Εστω* $Q(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\Pi\overrightarrow{x}^\perp$ *θετική τετραγωνική μορφή με* $\overrightarrow{x}\Pi\overrightarrow{x}^\perp > 0$*, για* $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$. *Να δείξετε ότι η συνάρτηση* $f(\overrightarrow{x}) = [\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{x})]^{\frac{p}{2}}$ ($p \neq 0$) *ικανοποιεί την εξίσωση* $\overrightarrow{x}\cdot\nabla f(\overrightarrow{x}) = pf(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.
ii) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *είναι* C^2 *και α-ομογενείς να δείξετε ότι οι* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *είναι ομογενείς στον* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$
και $x^2\cdot\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1)f(x)$.

Λύση *i)* Έχουμε ότι $f(\lambda\overrightarrow{x}) = [(\lambda\overrightarrow{x})\Pi(\lambda\overrightarrow{x})^\perp]^{\frac{p}{2}} = \lambda^p f(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, για $\lambda > 0$ και από προηγούμενη Άσκηση ισχύει $\overrightarrow{x}\cdot\nabla f(\overrightarrow{x}) = pf(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.
ii) Για $\lambda > 0$ και $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ έχουμε,

$\frac{\partial f(\lambda x,\lambda y)}{\partial x} = \lim_{\lambda h\to 0} \frac{f(\lambda x+\lambda h,\lambda y)-f(\lambda x,\lambda y)}{\lambda h} = \frac{\lambda^\alpha}{\lambda}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$,
$\lambda > 0$. Το ίδιο ισχύει και για $\frac{\partial f}{\partial y}$
Για την $\frac{\partial f}{\partial x}$ ομογενή τάξης $(\alpha-1)$ από την προηγούμενη Άσκηση $\Rightarrow$
$(x,y)\cdot\nabla(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = (\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = (\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial x}$ επί x (1).
Για την $\frac{\partial f}{\partial y}$ ομογενή τάξης $(\alpha-1)$ από την προηγούμενη Άσκηση $\Rightarrow$
$(x,y)\cdot\nabla(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial y}$ επί y (2).
$(1)+(2): x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\alpha-1)[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}]$
και από Θ. *Clairaut* $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1)f(x,y)$.

Άσκηση 5.0.33. *Έστω* $g:\mathbb{R}\ \{0\}\to\mathbb{R}$ C^2*-συνάρτηση και*
$V(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ $(\overrightarrow{r} = (x,y,z), r = \|\overrightarrow{r}\|, V(\overrightarrow{r}) = g(r))$.
i) Να βρεθεί ο Τελεστής Laplace του V.
ii) Εάν $V =$ *αρμονική* $\lim_{r\to+\infty} g(r) = 0$ *να βρεθεί το* V.

Λύση Έχουμε $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dg(t)}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot g'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.
$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot g'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}))$.
Τώρα $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
και $\frac{\partial g'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}g''(t)$.
Άρα $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot g'(t) + \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot g''(t)$,
δηλαδή $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{y^2+z^2}{r^2}\cdot g'(r) + \frac{x^2}{r^2}\cdot g''(t)$.
Τελικά $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{y^2+z^2}{r^3}g'(r) + \frac{x^2}{r^2}g''(r) + \frac{x^2+z^2}{r^3}g'(r) + \frac{y^2}{r^2}g''(r) + \frac{x^2+y^2}{r^3}g'(r) + \frac{z^2}{r^2}g''(r) = g''(r) + \frac{2r^2}{r^3}g'(r) = g''(r) + \frac{2}{r}g'(r)$, για $r\neq 0$.
ii) Επειδή $\Delta V = 0$ έχουμε
$g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) = 0 \Rightarrow r^2 g''(r) + 2rg'(r) = 0 \Rightarrow$
$\frac{d}{dr}(r^2\cdot g'(r)) = 0 \Rightarrow r^2\cdot g'(r) = c \Rightarrow g'(r) = \frac{c}{r^2} \Rightarrow g(r) = -\frac{c}{r} + c'$ $(\lim_{r\to+\infty} g(r) = 0)$
$\Rightarrow g(r) = -\frac{c}{r}$. Άρα $V(x,y,z) = -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.
Έστω συνάρτηση $f: A(\subseteq\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$, με A ανοικτό, και f διαφορίσιμη στο A.
Έστω $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\in A$, με $\overrightarrow{\alpha}\neq\overrightarrow{\beta}$ και $[\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}]\subseteq A$.
Τότε $\exists\overrightarrow{z}\in[\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}]\setminus\{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}\}: f(\overrightarrow{\beta}) - f(\overrightarrow{\alpha}) = \nabla f(\overrightarrow{z})(\overrightarrow{\beta}-\overrightarrow{\alpha})$.

Απόδειξη. Έστω $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{\alpha} + t(\overrightarrow{\beta}-\overrightarrow{\alpha})$, με $t\in[0,1]$,
τότε $[\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}] = \overrightarrow{r}([0,1])$ και $\overrightarrow{r}(1) = \overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{\alpha}$.

Τότε η συνάρτηση $h = f \circ \overrightarrow{r} : [0,1] \to \mathbb{R}$, είναι διαφορίσιμη και ισχύει
$h(1) - h(0) = h'(t_0) \cdot (1-0) = h'(t_0)$.
Εφαρμόζοντας ΘΜΤ για κάποιο $t_0 \in (0,1)$ έχουμε
$f \circ \overrightarrow{r}(1) - f \circ \overrightarrow{r}(0) = \frac{d(f\circ \overrightarrow{r})(t_0)}{dt}$
δηλαδή ισχύει $f(\overrightarrow{\beta}) - f(\overrightarrow{\alpha}) = \nabla f(\overrightarrow{r}(t_0))(\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha})$ για $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{r}(t_0)$.

$\square$

Σημειώσεις :
1. Δεν ισχύει το ΘΜΤ για διανυσματικές συναρτήσεις.
π.χ. Για την συνάρτηση $\overrightarrow{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t), t \in [0, 2\pi]$ έχουμε
$\overrightarrow{r}(2\pi) = \overrightarrow{r}(0) = (1,0)$
$\overrightarrow{r}'(t) = (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)$
Άρα $\overrightarrow{r}(2\pi) - \overrightarrow{r}(0) = (0,0) \neq \overrightarrow{r}'(t) \cdot 2\pi$, $\forall t \in [0, 2\pi]$.

2. Δεν υπάρχουν Κανόνες $L'Hospital$ για συναρτήσεις 2 (ή περισσοτέρων) μεταβλητών.
π.χ. στην περίπτωση $\frac{f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{\alpha})}{g(\overrightarrow{x})-g(\overrightarrow{\alpha})} = \frac{\nabla f(\overrightarrow{\xi})(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{\alpha})}{\nabla g(\overrightarrow{\xi})(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{\alpha})}$ ΔΕΝ γίνεται απλοποίηση, ΔΕΝ κάνουμε $L'Hospital$.

Ορισμοί

Έστω σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^d$, με $K \neq \emptyset$.

i) K **κυρτό** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in K$ έχουμε ότι $[\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}] \in K$
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in K$ τότε $\overrightarrow{\alpha} + t(\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha}) \subseteq K$, για κάθε $t \in [0,1]$.

ii) K **πολυγωνικά συνεκτικό**
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in K$ και $\Pi = [\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}] \cup [\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}] \cup ... \cup [\overrightarrow{\alpha_k}, \overrightarrow{\alpha_{k+1}} = \overrightarrow{\beta}]$ τότε $\Pi \subseteq K$.

iii) K **κατά τόξα συνεκτικό**
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in K$, με $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{\beta}$, τότε $\exists \overrightarrow{r}(\alpha) = \overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{r}(\beta) = \overrightarrow{\beta}$.

Ισχύουν τα παρακάτω :

Αν $K \subseteq \mathbb{R}$ τότε
K **κυρτό** $\Leftrightarrow$ K **πολυγωνικά συνεκτικό** $\Leftrightarrow$ K **κατά τόξα συνεκτικό**.

Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ τότε
K **κυρτό** $\Rightarrow$ K **πολυγωνικά συνεκτικό** $\Rightarrow$ K **κατά τόξα συνεκτικό**.

$K =$ ανοικτό + κ.τ. συνεκτικό $\Rightarrow$ $K =$ πολυγωνικά συνεκτικό.

Υπενθύμιση **ΘΜΤ** : $f : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $A =$ ανοιχτό.
Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in A$ ($\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$) τ.ω. $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}] \subseteq A$.
Τότε $\exists \vec{z} \in (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) : f(\vec{\alpha}) - f(\vec{\beta}) = df(\vec{z}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \nabla f(\vec{z}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$.

Άσκηση 5.0.34. *Έστω $f, g : K(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, διαφορίσιμες, $K =$ ανοιχτό.*
(α) i) Εάν $K =$ κυρτό και $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in K \Rightarrow f$ σταθερή.

ii) Εάν $K =$ πολυγωνικά συνεκτικό και $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in K \Rightarrow f$ σταθερή.

iii) Εάν $K =$ κατά τόξα συνεκτικό και $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in K \Rightarrow f$ σταθερή.

Επίσης εάν $\nabla f = \nabla g$ στο $K \Rightarrow f = g + c$ (για κάποιο $c \in \mathbb{R}$).
Ιδιαιτέρως εάν $\vec{F}$ είναι δ.π. κλίσεων/ Συντηρητικό και $\vec{F} = \nabla f = \nabla g$ τότε $f = g + c$.

(β) Βρείτε ένα παράδειγμα συνάρτησης f, διαφορίσιμης στο ανοιχτό K, με $\nabla f = \vec{0}$ (στο K) που να μην είναι σταθερή.

Λύση (α) i) Έστω σταθερό $\vec{\alpha} \in K$.
Για το τυχαίο $\vec{x} \in K$, με $\vec{x} \neq \vec{\alpha}$, επειδή το K είναι κυρτό $\Rightarrow [\vec{\alpha}, \vec{x}] \subseteq K$.
Άρα $\exists \vec{z} \in (\vec{\alpha}, \vec{x}) : f(\vec{x}) - f(\vec{\alpha}) = \nabla f(\vec{z})(\vec{x} - \vec{\alpha}) = 0$,
δηλαδή $f(\vec{x}) = f(\vec{\alpha})$, οπότε $f =$ σταθερή.

ii) Έστω σταθερό $\vec{\alpha} \in K$.
Για το τυχαίο $\vec{x} \in K$, με $\vec{x} \neq \vec{\alpha}$, επειδή το K είναι πολυγωνικά συνεκτικό
$\Rightarrow \exists \Pi = [\vec{\alpha}, \vec{\alpha_1}] \cup [\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}] \cup ... \cup [\vec{\alpha_k}, \vec{x}] \subseteq K$.
Εφαρμόζοντας σε κάθε διάστημα $[\vec{\alpha_i}, \vec{\alpha_j}]$ το ΘΜΤ έχουμε $f(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha_1}) = ... = f(\vec{x})$
$\Rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{\alpha})$ f σταθερή.

(β) Για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in (0,1) \\ 0, & \text{αν } y \in (1,2), \end{cases}$$

έχουμε $f'(x) = 0$, αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $K = (0,1) \cup (1,2)$.

Άσκηση 5.0.35. *i) Έστω $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$, $V(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r}$,*
όπου $\vec{r} = (x, y, z)$, με $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και $\vec{r} \neq \vec{0}$.
Το V είναι η μοναδική συνάρτηση με $\vec{F} = \nabla V$ και $\lim_{r \to +\infty} V(\vec{r}) = 0$.

ii) Έστω $\overrightarrow{F_1}(x,y)=(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2})$, $\overrightarrow{F_2}(x,y)=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$
C^∞*-συναρτήσεις με κοινό Π.Ο.* $\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$ *(*$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ *= αστρόβιλα).*
Να δείξετε ότι : (α) $\nexists\phi:\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}\to\mathbb{R}:\overrightarrow{F_1}=\nabla\phi$ *(* $\overrightarrow{F_1}$ *όχι πεδίο κλίσεων).*
(β) $\exists f:\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}\to\mathbb{R}:\overrightarrow{F_2}=\nabla\phi$ *(* $\overrightarrow{F_2}$ *πεδίο κλίσεων).*

Λύση *i)* Γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{F}=\nabla V$ (άσκηση).
Έστω $f:\mathbb{R}^3\diagdown\{\overrightarrow{0}\}\to\mathbb{R}$, με $\overrightarrow{F}=\nabla V=\nabla f$
$\Rightarrow f(x,y,z)=V(x,y,z)+c=\frac{-GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}+c.$
Εάν για $r\to+\infty$ ισχύει ότι $f(x,y,z)\to 0$, τότε $c=0$, άρα $f=V$.

ii) (α) Έστω $f(x,y)=-\tau o\xi\epsilon\phi\frac{y}{x}$, για $x\neq 0$.
Έχουμε $\nabla f=\overrightarrow{F_1}$ στο $\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,y),y\in\mathbb{R}\}$ και
$\exists\phi:\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\overrightarrow{F_1}=\nabla\phi$ στο $\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$.
Ισχύει ότι τα $H^+=\{(x,y):x>0\}$, $H^-=\{(x,y):x<0\}$ είναι ανοιχτά και κυρτά.
Τότε $\nabla\phi=\nabla f$ στο H^+ (ανοιχτό και κυρτό) $\Rightarrow\phi(x,y)=f(x,y)+c_1$ στο H^+.
Επίσης $\nabla\phi=\nabla f$ στο H^- (ανοιχτό και κυρτό) $\Rightarrow\phi(x,y)=f(x,y)+c_2$ στο H^-.
Τώρα $\phi(x,1)=-\tau o\xi\epsilon\phi\frac{1}{x}+c_1$, για $x>0$,
και $\phi(x,1)=-\tau o\xi\epsilon\phi\frac{1}{x}+c_2$, για $x<0$.
Όμως η ϕ είναι συνεχής στο $(0,1)\in\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$.
Άρα $\lim_{x\to 0^+}(\phi(x,1))=\lim_{x\to 0^-}(\phi(x,1))$
δηλαδή $-\frac{\pi}{2}+c_1=\frac{\pi}{2}+c_2\Rightarrow c_1-c_2=\pi$.
Δουλεύουμε επίσης για $\phi(x,-1)$ και καταλήγουμε $c_2-c_1=\pi$.
Τελικά έχουμε $2\pi=0$, <u>άτοπο</u>.
Άρα $\nexists\phi:\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\overrightarrow{F_1}=\nabla\phi$ στο $\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$.

ii) (β) Έστω $\overrightarrow{F_2}(x,y)=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$.
Τότε για την $f(x,y)=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)+c$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$,
ισχύει ότι $\nabla f=\overrightarrow{F_2}$ στο $\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$.

Το *ii)* (α) θα λυθεί και με επικαμπύλια ολοκληρώματα (Θ. *Green*).

Θεώρημα Αντίστροφης συνάρτησης

Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, C^1-συνάρτηση και για το $x_0\in(\alpha,\beta)$ έχουμε $f'(x_0)\neq 0$.
Τότε *i)* $\exists\delta,\epsilon>0$ ώστε η απεικόνιση
$f(x_0-\delta,x_0+\delta)\to(f(x_0)-\epsilon,f(x_0)+\epsilon)$ να είναι $1-1$ και επί.
ii) Ισχύει $(f^{-1})'(f(x_0))=(f'(x_0))^{-1}=(\mathcal{J}_{x_0}(f))^{-1}$.
Εάν $f'(x_0)=0$ τότε $\nexists f^{-1}$ που να είναι C^1 σε περιοχή του $f(x_0)$.

Θεώρημα Αντίστροφης συνάρτησης

Έστω $\overrightarrow{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$, C^1-συνάρτηση και $\overrightarrow{x_0} \in A$ (ανοιχτό) με $det\mathcal{J}_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{f}) \neq 0$.
Τότε $i)$ $\exists \delta, \epsilon > 0$ ώστε η απεικόνιση
$f : S(\overrightarrow{x_0}, \delta) \to S(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}), \epsilon)$ $(S(\overrightarrow{x_0}, \delta) \subseteq A)$ να είναι $1-1$ και επί.
$ii)$ Ισχύει $\mathcal{J}_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})}(f^{-1}) = (\mathcal{J}_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{f}))^{-1}$.
Αν $det\mathcal{J}_{\overrightarrow{x_0}}(\overrightarrow{f}) = 0$ τότε η $\overrightarrow{f}$ δεν αντιστρέφεται κατά τον τρόπο C^1.

Άσκηση 5.0.36. *Έστω* $\overrightarrow{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$i)$ *Να δείξετε ότι η* $\overrightarrow{f}$ *αντιστρέφεται τοπικά για* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
$ii)$ *Να βρείτε τον πίνακα* $\mathcal{J}_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})}(\overrightarrow{f}^{-1})$, *για* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
$iii)$ *Να δείξετε ότι η* $\overrightarrow{f}$ *δεν αντιστρέφεται ολικά.*

Λύση $i)$ $\mathcal{J}_{(x_0,y_0)}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy) & \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}$.
Άρα $det\mathcal{J}_{(x_0,y_0)}(\overrightarrow{f}) = 4({x_0}^2 + {y_0}^2) \neq 0$.
$ii)$ Για $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ έχουμε
$\mathcal{J}_{\overrightarrow{f}(x_0,y_0)}(\overrightarrow{f}^{-1}) = (\mathcal{J}_{\overrightarrow{f}(x_0,y_0)}\overrightarrow{f})^{-1} = \frac{1}{4({x_0}^2+{y_0}^2)} \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}$.
$iii)$ Ισχύει $\overrightarrow{f}(-x, -y) = \overrightarrow{f}(x, y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^2$, άρα η $\overrightarrow{f}$ δεν είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 5.0.37. *Έστω* $\overrightarrow{f}(x, y) = (e^{x+y}\eta\mu y, e^{x+y}\sigma\upsilon\nu y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$i)$ *Να δείξετε ότι η* $\overrightarrow{f}$ *αντιστρέφεται τοπικά στο* $(1, 0)$.
$ii)$ *Να βρείτε τον πίνακα* $\mathcal{J}_{(0,e)}(\overrightarrow{f}^{-1})$.

Λύση $i)$ $\overrightarrow{\mathcal{J}}_{(1,0)}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix} \Rightarrow det\overrightarrow{\mathcal{J}}_{(1,0)}(\overrightarrow{f}) = -e^2 \neq 0$.
Άρα $\exists S((1, 0), \delta), S(\overrightarrow{f}(1, 0), \epsilon)$ έτσι ώστε
η $\overrightarrow{f} : S((1, 0), \delta) \to S((0, e), \epsilon)$ να είναι $1-1$ και επί, δηλαδή $\exists(\overrightarrow{f}^{-1})$ τοπικά.

$ii)$ $\mathcal{J}_{(0,e)}(\overrightarrow{f}^{-1}) = \mathcal{J}_{(1,0)}(\overrightarrow{f})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{e^2} \begin{pmatrix} e & -e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$.

Θεώρημα Πεπλεγμένης συνάρτησης

Έστω $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και
$\Sigma_0 = \{(x, y) : F(x, y) = 0\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

• $(0,1)$: Το Σ_0 είναι τοπικά το γράφημα της $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, για $x \in [-1,1]$.
Έχουμε $F(x, \sqrt{1-x^2} = f(x)) = 0$, για $x \in [-1,1]$, και ισχύουν :
$F(0,1) = 0$, $f(0) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0,1) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$.
• $(1,0)$: Το Σ_0 είναι τοπικό γράφημα της $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, $y \in [-1,1]$.
Έχουμε $F(g(y), y) = 0$, για $y \in [-1,1]$, και ισχύουν :
$g(1) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 2 \neq 0$ $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0$.

Γενικά έστω συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και
$\Sigma_c = \{(x,y) : F(x,y) = c\}$ ισοσκελής καμπύλη.
Έστω $(x_0, y_0) \in \Sigma_c$, η Σ_c είναι τοπικά το γράφημα συνάρτησης ;
δηλαδή $\exists f : F(x, f(x)) = 0, f(x_0) = y_0$ ή $\exists g : F(g(y), y) = 0$, $g(y_0) = x_0$;
Δεν γίνεται πάντα !

π.χ. • $F(x,y) = x^4 - \alpha^2(x^2 - y^2)$ $(\alpha > 0)$ με $\Sigma_0 : x^4 = \alpha^2(x^2 - y^2)$.
Τοπικά στο $(0,0)$ η Σ_0 δεν είναι το γράφημα συνάρτησης.
• $F(x,y) = (y - x^2) \cdot (y - x^3)$.

Θεώρημα Πεπλεγμένης συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $F : A \times B \to \mathbb{R}$, $F = C^k$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $B \subseteq \mathbb{R}$
και $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}) \in A \times B$ τέτοιο ώστε : $i)$ $F(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}) = 0$ και $ii)$ $\frac{\partial F}{\partial y}(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}) \neq 0$.

Τότε $i)$ $\exists$ μοναδική $f : S(\overrightarrow{x_0}, \delta)(\subseteq A) \to (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \subseteq B$
τ.ω. $f(\overrightarrow{x_0}) = y_0$ και $F(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) = 0$, για $\overrightarrow{x} \in S(\overrightarrow{x_0}, \delta)$.
$ii)$ η f είναι C^k στο $S(\overrightarrow{x_0}, \delta)$ και $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y_i}(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))}$, για $\overrightarrow{x} \in S(\overrightarrow{x_0}, \delta)$.

Απόδειξη. Για $d = 1$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, έχουμε :
Έστω $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} > 0$, $F = C^k (k \geq 1)$,
άρα $\exists \epsilon > 0 : \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$, όπου $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $y \in [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$.
Σταθεροποιούμε το $x = x_1 \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, τότε
$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y) > 0$, για $y \in [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \Rightarrow F(x_1, .)$ γνήσια αύξουσα στο $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ (1).
Άρα $F(x_0, y_0 - \epsilon) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + \epsilon)$ (από την (1))
Συνεπώς προκύπτει ότι $F(x_0, y_0 - \epsilon) < 0$ και $F(x_0, y_0 + \epsilon) > 0$.
Τώρα $\exists 0 < \delta < \epsilon$ τέτοιο ώστε
$F(x, y_0 - \epsilon) < 0 < F(x, y_0 + \epsilon)$, για $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Επομένως για σταθερό $x = x_1$, με $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, έχουμε :
$F(x_1, y_0 - \epsilon) < 0 < F(x_1, y_0 + \epsilon)$.
Λήμμα *Bolzano* $\Rightarrow \exists! y_1 \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) : F(x_1, y_1) = 0$. Ορίζουμε $f(x_1) = y$. □

Άσκηση 5.0.38. *Έστω $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, C^∞-συνάρτηση. Έστω στοιχεία $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ της καμπύλης στάθμης $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (S_0).*

i) Δείξτε ότι πλησίον των σημείων αυτών η καμπύλη είναι το γράφημα μιας C^∞-συνάρτησης $y = f(x)$.
ii) Να υπολογιστεί το $f'(\alpha)$.

Λύση *i)* Για το (α, β) ισχύει : $\alpha^3 + \beta^3 = 3\alpha\beta$.
Έχουμε $\frac{\partial F}{\partial y}(\alpha, \beta) = 3\beta^2 - 3\alpha = 3(\beta^2 - \alpha)$.
Άρα για (α, β) ισχύει $\{\ \alpha^3 + \beta^3 = 3\alpha\beta$ και $\beta^2 \neq \alpha\ \}$ $(*)$.
Επομένως $\exists y = f(x)$ τοπικά, με $F(x, f(x)) = 0$, $f(\alpha) = \beta$ και $f = C^\infty$.
ii) Έστω ότι το (α, β) ικανοποιεί την $(*)$.
Επίσης ισχύει $x^3 + f^3(x) = 3xf(x)$, για $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$,
άρα $x^2 + f^2(x)f'(x) = f(x) + xf'(x)$ και εφαρμόζοντας για το (α, β) έχουμε
$\alpha^2 + \beta^2 f'(\alpha) = \beta + \alpha f'(\alpha)$ $(f(\alpha) = \beta)$. Τελικά $f'(\alpha) = \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha - \beta^2}$.

Σημείωση Η $\Sigma_0 : x^3 + y^3 = 3xy$ δόθηκε στον *Fermat* από τον *Decartes* κι ονομάζεται *Forium* του *D*. Ρώτησε να βρεθεί η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Επειδή $f'(\frac{3}{2}) = -1$, η Εφαπτομένη ευθεία είναι η $y = \frac{3}{2} - (x - \frac{3}{2})$, δηλαδή $y + x = 3$.

Άσκηση 5.0.39. *Να δείξετε ότι $\exists y = f(x)$ σε ανοιχτή περιοχή U του 1 τ.ω. $f(1) = 1$ και $x^y + y^x = 2$. Να υπολογιστεί το $f'(1)$.*

Λύση Έστω $F(x, y) = x^y + y^x - 2$, με $y, x > 0$.
Ισχύουν $F(1, 1) = 0$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 1 \neq 0$.
Άρα $\exists f : (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \to^{C^\infty} (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$
τέτοια ώστε $f(1) = 1$, $F(x, f(x)) = 0$, για x με $|x - 1| < \epsilon$.
Τελικά $x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2$, όπου $|x - 1| < \epsilon$.
Παραγωγίζουμε ως προς x και βρίσκουμε $f'(1) = -1$.

Άσκηση 5.0.40. *Να δείξετε ότι η $y\eta\mu x + 3zy^2 + 2xyz = 3$ επιλύεται για $z = z(x, y)$ πλησίον του $P(0, 1, 1)$ και να υπολογιστούν τα $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1)$.*

Λύση Έστω η C^∞-συνάρτηση $F(x, y, z) = y\eta\mu x + 3zy^2 + 2xyz - 3$, με $F(0, 1, 1) = 0$.
Ισχύει $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 1) = |3y^2 + 2xy|_{(0,1,1)} = 3 \neq 0$.
Άρα $\exists f : S((0, 1), \delta) \to (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ C^∞-συνάρτηση με $f(0, 1) = 1$
και για $(x, y) \in S((0, 1), \delta)$ ισχύει $y\eta\mu x + 3f(x, y)y^2 + 2xyf(x, y) = 3$ και
$y\sigma\upsilon\nu x + 3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)y^2 + 2yf(x, y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.
Εφαρμόζοντας για $(x, y) = (0, 1)$ έχουμε : $1 + 3\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + 2 = 0$.
Τελικά $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -2$.

Εφαπτομένη Ευθεία σε παραμετρική καμπύλη

Εφαπτόμενο Επίπεδο σε επιφάνεια

Σημασία της κλίσης / Ανάδελτα

(A) (1) Εφαπτομένη Ευθεία σε παραμετρική καμπύλη.
(2) $i)$ Εφαπτομένη Ευθεία στο γράφημα : $G_f = \{(x, f(x) : x \in I)\}$, όπου $f : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
$ii)$ Εφαπτομένη Ευθεία σε καμπύλη Στάθμης :
$\Sigma_c = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$, όπου $f : B(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$.

(B) $i)$ Εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα :
$G_f = \{(x, y, f(x, y) : (x, y) \in A)\}$, όπου $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$.
$ii)$ Εφαπτόμενο επίπεδο σε επιφάνεια Στάθμης :
$\Sigma_c = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$, όπου $F : B(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$.

(A) (1) Έστω καμπύλη Γ, με $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = (r_1(t), ..., r_d(t))$, όπου $t \in I$ (= διάστημα του $\mathbb{R}$). Για $t_0 \in I$ έχουμε $\overrightarrow{r}'(t_0) = (r_1'(t_0), ..., r_d'(t_0)) = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)}{t - t_0}$.
Συνήθως $\overrightarrow{r}(t) =$ διάνυσμα θέσης ενός κινητού την χρονική στιγμή t,
$\overrightarrow{r}'(t) =$ διάνυσμα ταχύτητας ενός κινητού την χρονική στιγμή t
και $\|\overrightarrow{r}'(t)\| =$ ταχύτητα ενός κινητού την χρονική στιγμή t.
Έστω $I = [\alpha, \beta]$, με $A = \overrightarrow{r}(\alpha)$ (Αρχή της Γ) $B = \overrightarrow{r}(\beta)$ (Πέρας της Γ) και $\overrightarrow{r}(\alpha) = \overrightarrow{r}(\beta)$.
Τότε η καμπύλη Γ καλείται **κλειστή**.

Εφαπτομένη Ευθεία στο $\overrightarrow{r}(t_0)$.

Έστω $\overrightarrow{r}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ και $\overrightarrow{l}(\lambda) = \overrightarrow{r}(t_0) + \lambda \overrightarrow{r}'(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Δηλαδή η ευθεία περνά από το $\overrightarrow{r}(t_0)$ και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{r}'(t_0)$.

Σημειώσεις :
1) Η καμπύλη Γ μπορεί να έχει μία C^1-παράμετρο και μία όχι C^1-παράμετρο.
π.χ. Έστω $\overrightarrow{r_1}(t) = (t, |t|)$, για $t \in \mathbb{R}$. Τότε $\nexists \overrightarrow{r_1}'(0)$.
Έστω $\overrightarrow{r_2}(t) = (t|t|, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Τότε $\overrightarrow{r_2}'(t)$ είναι C^1 ($\overrightarrow{r_2}(0) = (0, 0)$).

2) Η καμπύλη Γ μπορεί να δέχεται Λεία παραμέτρηση $\overrightarrow{r}'(t) \neq \overrightarrow{0}$, $t \in \mathbb{R}$
και μια όχι λεία παραμέτρηση.
π.χ. Έστω $\overrightarrow{r_1}(t) = (t, t^2)$. Τότε $\nexists \overrightarrow{r_1}(0) = (1, 0) \neq (0, 0)$ και $\overrightarrow{r_1}'(t) \neq (0, 0)$.
Εφαπτόμενη ευθεία στο $\overrightarrow{r}(t_0)$
Έστω $\overrightarrow{r_2}(t) = (t^3, t^6)$, $t \in \mathbb{R}$, τότε $\overrightarrow{r_2}(0) = (0, 0)$.

Άσκηση 5.0.41. *Έστω καμπύλη $\overrightarrow{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, t)$, με $t \in \mathbb{R}$.*

i) Η κίνηση γίνεται στην επιφάνεια κιλύνδρου.
ii) Να δείξετε ότι $\|\vec{r}\,'(t)\| =$ *σταθ., για* $t \in \mathbb{R}$.
iii) Να βρεθεί η εφαπτόμενη ευθεία στο $r'(0)$.

Λύση *i)* Έχουμε $x(t) = \sigma\upsilon\nu t$, $y(t) = \eta\mu t$ και $z(t) = t$.
Τότε $x^2(t) + y^2(t) = 1$, για $t \in \mathbb{R}$ (Κύλινδρος).

ii) Έχουμε $\vec{r}\,'(t) = (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, 1)$, άρα $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{2}$.

iii) Έχουμε $\vec{r}(0) = (1,0,0)$, $\vec{r}\,'(0) = (0,1,1)$.
Άρα $\vec{l}(\lambda) = (1,0,0) + \lambda(0,1,1) = (1,\lambda,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.0.42. *Εστω καμπύλη* Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *και* $\exists \vec{r}\,'(t)$, $t \in I$.
Αν $\vec{r}(t)$ *ανήκει στην επιφένεια της* $S(\vec{\delta}, \alpha)$, $(\alpha > 0)$,
Τότε $\vec{r}\,'(t) \perp \vec{r}(t)$, *για κάθε* $t \in I$.

Λύση Έστω $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
Επειδή $\vec{r}(t) \in$ επιφ. $S(\vec{0}, \alpha)$ έχουμε $\|\vec{r}(t)\| = \alpha \Rightarrow x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = \alpha^2$.
Άρα $2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)) = 0$, για κάθε $t \in I$.
Τελικά $\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$.

Άσκηση 5.0.43. *Εστω καμπύλη* $\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$, *με* $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, *για* $t \in [\alpha, \beta]$.
Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^3$ *και* $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *με* $t_i \neq t_j$ $(i \neq j)$, *με* $\vec{r}(t_n) = \vec{y_0}$ $(t_n \in [\alpha, \beta])$. *Δηλαδή, από σημείο του* $\mathbb{R}^3$ *η* $\vec{r}$ *μπορεί να περάσει πεπερασμένο το πλήθος χρονικές στιγμές.*

Λύση Έστω ότι $\exists \vec{y_0} \in \mathbb{R}^3$ και $t_n \in [\alpha, \beta]$ $(n \in \mathbb{N})$, με $t_i \neq t_j$ $(i \neq j)$, με $\vec{r}(t_n) = \vec{y_0}$.
Επειδή $t_n \in [\alpha, \beta]$, για $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists (t_{k_n})$ υπακολουθία τέτοια ώστε $t_{k_n} \to t_0 \in [\alpha, \beta]$.
Επειδή $\vec{r} =$ συνεχής και $\vec{y_0} = \vec{r}(t_{k_n}) \to \vec{r}(t_0)$, έχουμε $\vec{r}(t_0) = \vec{y_0}$.
Άρα $\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\vec{r}(t_{k_n}) - \vec{r}(t_0)}{t_{k_n} - t_0} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\vec{y_0} - \vec{y_0}}{t_{k_n} - t_0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}\,'(t_0) = \vec{0}$, ΑΤΟΠΟ.

(A) (2) i) Έστω $G = \{(x, f(x)) : x \in I\}$, $f : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $\exists f'(x_0)$.
Εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_0, f(x_0)) \in G : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Κάθετο διάνυσμα στην ευθεία : $(-f'(x_0), 1)$.
• Ορίζουμε $G_f : \vec{r}(x) = (x, f'(x))$, $x \in I$,
$\vec{l}(\lambda) = \vec{r}(x_0) + \lambda \vec{r}\,'(x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
όπου $x(\lambda) = x_0 + \lambda$ και $y(\lambda) = f(x_0) + \lambda f'(x_0)$.
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (Κάθετο $(-f'(x_0), 1)$).

(A) (2) ii) Έστω $F : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, C^1-συνάρτηση και $(x_0, y_0) \in \Sigma_c = \{(x, y) : F(x, y) = c\}$. Υπόθεση : $\nabla F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.

Έστω $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$
Από ΘΠΣ $\exists f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to G$, με $f(x_0) = y_0$.
Δηλαδή η καμπύλη Σ_c είναι τοπικά το γράφημα μιας συνάρτησης.
Εφαπτομένη στο G_f, $(x_0, y_0) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (1).
Έχουμε $F(x, f(x)) = c$, για $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $\nabla F(x_0, f(x_0)) \cdot (1, f'(x_0)) = 0$.
Άρα $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, f(x_0)) + f'(x_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0)) = 0$, δηλαδή $f'(x_0) = \frac{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}}$ (2).
Εφαπτομένη στην Σ_c στο $(x_0, y_0) \in \Sigma_c$ είναι από (1) – (2) η παρακάτω
$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x_0 - y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$
$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Άρα $\nabla F(x_0, y_0) \perp$ εφ. ευθεία.
Ορίζουμε $\nabla F(x_0, y_0) \perp \Sigma_c$.
Ιδιαιτέρως $F(x, y) = y - \phi(x)$ και $\nabla F(x_0, y_0) = (-\phi'(x_0) + 1)$.

(B) $i)$ Έστω συνάρτηση $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ και $G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$.
Επιφάνεια του Γραφήματος της f ($\exists df(x_0, y_0)$, για $(x_0, y_0) \in G_f$).

Εφαπτόμενο Επίπεδο

$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$
Κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο του $G_f : (-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + 1)$.

(B) $ii)$ Έστω $F : B(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, C^1-συνάρτηση
και $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma_c = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = c\}$. Υπόθεση : $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \overrightarrow{0}$.
Έστω $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq \overrightarrow{0}$. Τοπικά στο (x_0, y_0, z_0) η Σ_c είναι το γράφημα μιας $f = C^1$,
με $f : S((x_0, y_0), \delta) \to (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$.

Εφαπτόμενο Επίπεδο G_f στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$ (Ανάλογα με το (A) (2) (ii)).

Εφαπτόμενο Επίπεδο της Σ_c στο (x_0, y_0, z_0).

$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x_0 - y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$
και ισχύει $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp$ εφαπτόμενο επίπεδο.

Ορισμοί 5.0.44. *Έστω Σ_c, $F : A(\subseteq \mathbb{R}^2)$ ή $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,με $F = C^1$.
και $\nabla F(\overrightarrow{x_0}) \neq \overrightarrow{0}$, $\nabla F(\overrightarrow{x_0}) \perp$ εφαπτόμενο (ευθεία ή επίπεδο).
Ορίζουμε $\nabla F(\overrightarrow{x_0}) \perp \Sigma_c$.*

Πρόταση 5.0.45. *Έστω $\Sigma_c = \{(x, y) : F(x, y) = c\}$, με $F = C^1$
και $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, για $(x_0, y_0) \in \Sigma_c$.*

Έστω καμπύλη $\overrightarrow{r}: I \to \Sigma_c$, $\overrightarrow{r}(t_0) = (x_0, y_0)$ *και* $\exists \overrightarrow{r}'(t_0)$.
Τότε $\nabla \overrightarrow{F}(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{r}'(t_0)$.

Απόδειξη. Επειδή $F(\overrightarrow{r}'(t)) = c$, για $t \in I$, από Κανόνα Αλυσίδας έχουμε :
$\nabla F(\overrightarrow{r}'(t_0)) \cdot \overrightarrow{r}'(t_0) = 0$.

□

ΣΥΝΟΨΗ

i) $G_f = \{(x, y, F(x, y)) : (x, y) \in A\}$, $F : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ και $\exists dF(x_0, y_0)$.

Εφαπτόμενο επίπεδο G_F, στο $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$:
$z = T(x, y) = F(x_0, y_0) + \nabla F(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$.
$\Sigma_{F(x_0,y_0)} = \{(x, y) : F(x, y) = F(x_0, y_0)\}$, με $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$.
Εφαπτόμενη ευθεία : $\nabla F(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$.

ii) $G_F = \{(x, y, z, F(x, y, z)) : (x, y, z) \in B\}$, με $F : B(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$.
Εφαπτόμενο επίπεδο G_f, στο $(x_0, y_0, z_0, F(x_0, y_0, z_0))$ και $\exists \overrightarrow{r}'(t_0)$.
Είναι $\omega = T(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$,
$\Sigma_{F(x_0,y_0,z_0)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\Sigma : F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)\}$.
Εφαπτόμενο επίπεδο : $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$.

Άσκηση 5.0.46. *Να δείξετε ότι το τμήμα της εφαπτόμενης ευθείας στην* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}}$ $(\alpha > 0)$, *με* $x, y > 0$, *έχει σταθερό μήκος.*

Λύση Έστω $F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - \alpha^{\frac{2}{3}}$ και $F(x_0, y_0) = 0$.
Εφαπτόμενη ευθεία : $(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0)) = 0$,
δηλαδή $\frac{x}{\sqrt[3]{x_0}} + \frac{y}{\sqrt[3]{y_0}} = \alpha^{\frac{2}{3}}$ $({x_0}^{\frac{2}{3}} + {y_0}^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}})$.
Για $A : ({x_0}^{\frac{1}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}}, 0)$ και $B : (0, {y_0}^{\frac{1}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}})$, έχουμε
$(AB) = ({x_0}^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{4}{3}} + {y_0}^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{2}{3}}(\alpha^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = \alpha$.

Άσκηση 5.0.47. *Να βρεθεί η Εφαπτόμενη επιφάνεια της καμπύλης*
$S : \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 6$ *στο* $(4, 1, 9)$ *και το κάθετο διάνυσμα.*

Λύση Έστω $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - 6$, με $x, y, z > 0$ και $F(4, 1, 9) = 0$.
Έχουμε $\nabla F(4, 1, 9) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}) \perp S$, άρα
Εφαπτόμενο επίπεδο : $\frac{1}{4}(x - 4) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{6}(z - 9) = 0$.

Άσκηση 5.0.48. *Να βρεθεί το Εφαπτόμενο επίπεδο της καμπύλης*
$S : \sigma\upsilon\nu(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ *στο* $(0, 1, 2)$ *και το κάθετο διάνυσμα.*

Λύση Έστω $F(x,y,z) = \sigma\upsilon\nu(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz - 4$.
Τότε $\nabla F(0,1,2) = (2,2,1)$ και $F(0,1,2) = 0$.
Εφαπτόμενο Επίπεδο : $2x + 2y + z = 4$.

Τύποι του *Taylor*

Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Θεώρημα 5.0.49. *Έστω $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$ (δηλαδή έχει παραγώγους έως τάξης $n+1$ συνεχείς) με $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $x_0 \in I$ φιξαρισμένο. Για κάθε $x \in I$ ισχύει :*
(1) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n + (\int_0^1 \frac{(1+u)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0)du))\cdot(x-x_0)^{n+1}$.

Απόδειξη. (1) $\Leftrightarrow f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, όπου $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^n$.
Το πολυώνυμο P_n είναι το μοναδικό ($f^{(0)} = f, 0! = 1$) πολυώνυμο βαθμού n που έχει την ίδια τιμή στο x_0 με την f και ίδιες παραγώγους τάξης $k = 1, ..., n$ στο x_0 με την f (Ασκ. 1) καλείται **πολυώνυμο** *Taylor* n **βαθμού της** f **στο** x_0
και $R_n(x) = (\int_0^1 \frac{(1+u)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0)du))\cdot(x-x_0)^{n+1}$.
(2) $R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$ είναι το **υπόλοιπο** *Taylor*
(αλλαγή μεταβλητής $t = x_0 + u(x-x_0) \Rightarrow u = \frac{t-x_0}{x-x_0} \Rightarrow 1-u = \frac{x-t}{x-x_0} \Rightarrow du = \frac{1}{x-x_0}dt$).
Για $n = 0$, ο τύπος του *Taylor* (βλέπε (2)) ταυτίζεται με το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού, δηλαδή $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt$.
Από τον τύπο $R_n(x) = (\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0)du))\cdot(x-x_0)^{n+1}$ βλέπουμε επίσης ότι (3) $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}$, για κάποιο $\xi \in (x_0, x)$.
Εφαρμόζουμε το 2ο Θεώρημα Μέσης Τιμής (βλέπε Βιβλίο) :
Αν $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $g > 0$ στο (a,b), τότε
$\int_a^b h(u)g(u)du = h(c)\int_a^b g(u)du$, για κάποιο $c \in (a,b)$.
Παίρνουμε $a = 0$, $b = 1$, $g(u) = \frac{(1-u)^n}{n!}$ και $h(u) = f^{n+1}(x_0 + u(x-x_0))$.
Αφού $\int_0^1 g(u)du = \frac{1}{n!}[-\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$ συμπεραίνουμε τη σχέση (3)
με $\xi = x_0 + c(x-x_0)$, όπου $c \in (0,1)$.
Επειδή η f^{n+1} είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x_0, δηλαδή ισχύει $|f^{n+1}(x)| \leq M$ για $|x-x_0| < \epsilon$, Συνεπάγεται ότι
$|R_n(x)| = |\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0)du||x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{n!}|x-x_0|^{n+1}$, για $|x-x_0| < \epsilon$
και επομένως $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$ καθώς $x \to x_0$.
Αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα $R_n(x) \to 0$ πιο γρήγορα από το $(x-x_0)^n$ καθώς $x \to x_0$.
Αυτή η ιδιότητα ισχύει αν υποθέσουμε ΜΟΝΟ ότι η f είναι $n-$ φορές παραγωγίσιμη στο x_0 (δηλαδή $\exists f^{n-1}$ σε μια περιοχή του x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0).

□

Θεώρημα 5.0.50. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$.*
Αν η f έχει $n-$τάξεις παραγώγους στο x_0, τότε
(4) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+...+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n]}{(x-x_0)^n} = 0$
δηλαδή $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Απόδειξη. Αν $n = 1$, η σχέση (4) εκφράζει τη διαφορισιμότητα της f στο x_0 :
(4) $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| = 0$
$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + (x-x_0)\cdot\epsilon(x)$ ($y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης), όπου $\epsilon(x) \to 0$(όταν $x \to x_0$).
Δηλαδή η f προσεγγίζεται από μια γραμμική συνάρτηση. Τα Θεωρήματα $Taylor$ δίνουν καλύτερη προσέγγιση μέσω πολυωνύμων βαθμού n, όταν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη.
□

Παράδειγμα Έστω $f(x) = cosx$ με $x_0 = 0$ και $f(0) = 1$, έχουμε
$f'(0) = -sin0 = 0$, $f''(0) = -cos0 = -1$, $f'''(0) = sin0 = 0$, $f^{(4)}(0) = cos0 = 1$.
Άρα $f(x) = cosx = 1+0\cdot x+R_1(x) = 1+0\cdot x-\frac{1}{2}x^2+R_2(x) = 1+0\cdot x-\frac{1}{2}x^2+\frac{0}{6}x^3+R_3(x) = 1+0\cdot x-\frac{1}{2}x^2+\frac{0}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+R_4(x)$.

Άσκηση 5.0.51. *Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης για* $f(x) = \ln x$ *και* $x_0 = 1$, *με το υπόλοιπο* R_2 *στη μορφή* (1), (2) *και* (3).

Λύση Υπολογίζουμε $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) - \frac{1}{x^2}$, $f^3(x) = \frac{2}{x^3}$ και
$f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$. Έχουμε λοιπόν τους τύπους :
1) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2}\cdot\frac{2}{(1+u(x-1)^3)}du)(x-1)^3$
2) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \int_1^x \frac{(x-t)^2}{2}\cdot\frac{2}{t^3}dt$
3) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{\xi^3}\cdot(x-1)^3$,
για κάποιο $\xi \in (1,x)$ αν $x > 1$, ή για $\xi \in (x,1)$ αν $x < 1$.

Άσκηση 5.0.52. *Δείξτε ότι το πολυώνυμο* $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ *(βλέπε Θ.1) είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού* n *που έχει την ίδια τιμή στο* x_0 *με την* f *και ίδιες παραγώγους τάξης* $k = 1, ..., n$ *στο* x_0 *με την* f.

Λύση $P_n(x_0) = f(x_0)$ ισχύει. Έστω $0 \le k \le n$ και $1 \le l \le n$. Υπολογίζουμε

$$\frac{d^l(x-x_0)^k}{dx^l} = \begin{cases} k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-l+1)\cdot(x-x_0)^{k-l}, & \text{αν } 1\le l\le k \\ 0, & \text{αν } k\le l \end{cases}$$

και

$$\frac{d^l(x-x_0)^k}{dx^l}(x_0) = \begin{cases} k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-l+1)\cdot(x-x_0)^{k-l}, & \text{αν } k = l(*) \\ 0, & \text{αν } k \ne l. \end{cases}$$

Έτσι, βλέπουμε ότι για $1 \le l \le n$, ισχύει $\frac{d^l P_n}{dx^l}(x_0) = f^l(x_0)$.

Μοναδικότητα :
Αν Q είναι ένα άλλο πολυώνυμο βαθμού n με την ίδια ιδιότητα θα δείξουμε ότι $R = P_n - Q = 0$. Το R είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n τέτοιο ώστε : $\frac{d^l R}{dx^l}(x_0) = 0$, $\forall l = 0, 1, ..., n$.

Γράφουμε έπειτα ότι $R_n = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + ... + \alpha_n(x - x_0)^n$
{αυτό ισχύει, γιατί $x^k = ((x - x_0) + x_0)^k = \Sigma_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x - x_0)^i {x_0}^{k-i}$}.
Χρησιμοποιώντας τη σχέση $(*)$ συμπεραίνουμε ότι
$\frac{d^l R}{dx^l}(x_0) = 0 = l!\alpha_0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow Q = P_n$.

Άσκηση 5.0.53. 1) *Δείξτε ότι* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!}$
2) *Δείξτε ότι* $e \notin \mathbb{Q}$.

Λύση 1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-l, l] \to \mathbb{R}(l \in \mathbb{N}$ φιξαρισμένο $) : x \to f(x) = e^x$.
Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) με $x_0 = 0$.
Αφού $f^{(k)}(x) = e^x$ και $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, έχουμε
$R_n(x) = e^x - [1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}] = (\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{ux} du) \cdot x^{n+1}$.
Θα φράξουμε το υπόλοιπο $\mathbb{R}^n$ και θα δείξουμε ότι στο διάστημα $[-l, l]$:
$R_n(x) \to^{n\to\infty} 0$ (ομοιόμορφα).
Πράγματι, $|R_n(x)| \leq e^l \frac{l^{n+1}}{n!} \to 0$, όταν $n \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \in [-l, l]$
(Για να δούμε ότι $\frac{l^{n+1}}{n!} \to 0$ γράφουμε όταν $n > 2l$
$\frac{l^n}{n!} = (\frac{l \cdot ... \cdot l}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot l \cdot (l+1) \cdot ... \cdot 2l}) \frac{l}{l+1} \cdot ... \cdot \frac{l}{n} \leq \frac{l^{2l}}{(2l)!} \cdot (\frac{1}{2})^{n-2l}$).
Επομένως αφού το l είναι αυθαίρετο, η σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) Ειδικότερα, για $x = 1$, έχουμε
$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + [\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ...] = R_n(1)$.
Θα υποθέσουμε ότι $e \in \mathbb{Q}$, δηλαδή $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $ne \in \mathbb{N}$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Γι' αυτό θα φράξουμε το σφάλμα $R_n(1)$
$0 < R_n(1) < \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + ...] \Rightarrow$
$0 < R_n(1) < \frac{1}{(n+1)!}[\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}] < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n} \Rightarrow 0 < R_n(1) < \frac{1}{n!n} \Leftrightarrow 0 < n!nR_n(1) < 1$
$(\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} \Rightarrow \frac{1}{(n+3)!} = \frac{1}{(n+1)!}[\frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+3}] < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1})$.
Αφού έχουμε υποθέσει ότι $n \in \mathbb{N}$ ισχύει επίσης $n!n \in \mathbb{N}$
Από τη σχέση $(*)$ έχουμε :
$n!ne = n!n[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}] + n!nR_n(1)$, το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ!

Θεώρημα 5.0.54. *Έστω* $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$ *(δηλαδή έχει παραγωγούς έως τάξης* $n+1$ *συνεχείς στο* U*),* $U \subset \mathbb{R}^2$ *ανοιχτό χωρίο και* $(x_0, y_0) \in U$ *φιξαρισμένο.*
Τότε για κάθε $(x, y) \in U$ *τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα* $[(x_0, y_0), (x, y)] \in U$*,*
ισχύει, θέτοντας $(u, k) = (x - x_0, y - y_0)$ *:*
(5) $f(x, y) = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k + \frac{1}{2}[f_x(x_0, y_0) \cdot h^2 +$
$2f_{xy}(x_0, y_0) \cdot hk + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot k^2] + ... + \frac{1}{n!}[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x_0, y_0) h^i k^{n-i}] + R_n(x, y)$
όπου $R_n(x, y) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} [\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(x_0 + uh, y_0 + uk) h^i k^{n+1-i}] du.$

Εναλλακτικά, έχουμε

(6) $R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}(x_0+uh, y_0+uk)h^ik^{n+1-i}$

για κάποιο $u \in (0,1)$ *που εξαρτάται από το* (x_0,y_0) *και το* (x,y).

Απόδειξη. Αναγόμαστε στο Θ1 του $Taylor$ για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.
Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) στη συνάρτηση στο σημείο 0.
Έστω $\phi : [0,1] \to \mathbb{R} : t \to \phi(t) = f(x_0+th, y_0+tk)$.
Αναλυτικά : $\phi(t) = f(r(t))$, όπου $r(t) = (x_0,y_0) + t(h,u)$, για $t \in [0,1]$.
Έχουμε $\phi(0) = f(x_0,y_0)$, $\phi(1) = f(x_0+h, y_0+k) = f(x,y)$.
Επίσης $\phi'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = f_x(x_0+th, y_0+tk)\cdot h + f_y(x_0+th, y_0+tk)\cdot k$
$\Rightarrow \phi'(0) = f_x(x_0,y_0)\cdot h + f_y(x_0,y_0)\cdot k$.
Ομοίως $\phi''(t) = f_{xx}(x_0+th, y_0+tk)\cdot h^2 + 2f_{xy}(x_0+th, y_0+tk)\cdot hk + f_{yy}(x_0+th, y_0+tk)\cdot k^2$,
άρα $\phi''(0) = f_{xx}(x_0,y_0)\cdot h^2 + 2f_{xy}(x_0+th, y_0+tk)\cdot hk + f_{yy}(x_0,y_0)\cdot k^2$.
Επαγωγικά βρίσκουμε

$\phi^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}(x_0+th, y_0+tk)h^ik^{n-i}$

$\Rightarrow \phi^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}(x_0,y_0)h^ik^{n-i}$.

Σύμφωνα με τον τύπο (1) ισχύει :

$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0)\cdot 1 + \frac{\phi''(0)}{2!}\cdot 1^2 + ... + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}\cdot 1^n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(u)du$

από τον τύπο (3) έχουμε το ζητούμενο.

□

Σχόλιο 6 : Επειδή οι παράγωγοι της f τάξης $n+1$ είναι συνεχείς και φραγμένες σε μια περιοχή του σημείου (x_0,y_0), δηλαδή ισχύει

$|\frac{\partial^{n+1}f}{\partial^i x\partial^{n+1-i}y}(x,y)| \le M$, για $i = 0,1,...,n+1$ και για $|x-x_0| < \epsilon$, $|y-y_0| < \epsilon$

και $|R_n(x,y)| \le \int_0^1 |\frac{\partial^{n+1}f(x,y)}{\partial^i x\partial^{n+1-i}y}|du \le \frac{2^{n+1}}{n!}M\|(x-x_0, y-y_0)\|^{n+1}$,

για $i = 0,1,...,n+1$ και για $|x-x_0| < \epsilon$, $|y-y_0| < \epsilon$.
Τώρα επειδή

$$2^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i} = \begin{cases} |h| \le \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} \\ |k| \le \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}. \end{cases}$$

Επομένως $|R_n(x,y)| \le M'\cdot\|(x-x_0, y-y_0)\|^{n+1}$, για $|x-x_0| < \epsilon$, $|y-y_0| < \epsilon$.
Τελικά $\frac{R_n(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^n} \to 0$ καθώς $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Η προηγούμενη ιδιότητα ισχύει αν υποθέσουμε ΜΟΝΟ ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) [δηλαδή οι παράγωγοι της f τάξης $n-1$ υπάρχουν σε μια περιοχή του (x_0,y_0) και είναι διαφορίσιμες στο (x_0,y_0)].

Θεώρημα 5.0.55. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in U$.*
Αν η f έχει n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0), τότε
(7) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-P_n(x,y)}{\|(x,y)-(x_0-y_0)\|^n} = 0$ *(Η σχέση (7) έχει τυπικό χαρακτήρα).*

Σχόλιο 7 : Το Πολυώνυμο του $Taylor$ $P_n(x, y)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που έχει την ίδια τιμή στο (x_0, y_0) με την f (Ασκ. 8).
Το Πολυώνυμο του $Taylor$ $P_n(x, y)$ είναι επίσης το μοναδικό Πολυώνυμο βαθμού n που ικανοποιεί τη σχέση (7), όταν βέβαια η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Παράδειγμα Βρείτε το ανάπτυγμα $Taylor$ της $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$ στο $(2, 1)$ μέχρι όρων 2ης τάξης.

Απάντηση Η f ορίζεται και είναι C^∞ στο ανοιχτό ημιεπίπεδο $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$.
Υπολογίζουμε : $f(2, 1) = 2$, $f_x(x, y) = \frac{y}{x} \cdot e^{y \ln x} \Rightarrow f_x(2, 1) = 1$
και $f_y(2, 1) = \ln x e^{y \ln x} \Rightarrow f_y(2, 1) = 2 \ln 2$.
Επίσης $f_{xx}(x, y) = -\frac{y}{x^2} e^{y \ln x} + (\frac{y}{x})^2 e^{y \ln x} \Rightarrow f_{xx}(2, 1) = 0$
$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{x} e^{y \ln x} + \frac{y \ln x}{x} e^{y \ln x} \Rightarrow f_{xy}(2, 1) = 1 + \ln 2$
και $f_{yy}(x, y) = (\ln x)^2 e^{y \ln x} \Rightarrow f_{yy}(2, 1) = (\ln 2)^2 \cdot 2$.
Άρα για $(x, y) \in U$ έχουμε :
$f(x, y) = 2 + \frac{1}{1!}[1 \cdot (x - 2) + 2 \ln 2(y - 1)] + \frac{1}{2!}[0 \cdot (x - 2)^2 + 2 \cdot (1 + \ln 2) \cdot (x - 2) \cdot (y - 1) + (\ln 2)^2 \cdot 2 \cdot (y - 1)^2] + R_n(x, y)$
$\Rightarrow f(x, y) = 2 + (x - 2) + 2 \ln 2(y - 1) + (1 + \ln 2)(x - 2)(y - 1) + (\ln 2)^2 (y - 1)^2 + R_2(x, y)$,
όπου $\frac{R_2(x,y)}{(x-2)^2+(y-1)^2} \to 0$ καθώς $(x, y) \to (2, 1)$.
Υπενθυμίζουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2, 1, f(2, 1))$ έχει εξίσωση : $z = 2 + (x - 2) + 2 \ln 2(y - 1)$.
Το Πολυώνυμο 2ου βαθμού $P_2(x, y)$ δίνει μια καλύτερη προσέγγιση της f κοντά στο σημείο $(2, 1)$.

Άσκηση 5.0.56. *Να δειχθεί ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $u \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε, $ycosx = -uxysin(ux) + ycos(ux)$.*

Λύση Έστω $U = \mathbb{R}^2$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R} : f(x, y) = ycosx$.
Έχουμε $f_x(x, y) = -ysinx$ και $f_y(x, y) = cosx$, συνεπώς η f είναι κλάσης C^1 (C^∞).
Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο (6) με $n = 0$, $x_0 = 0$ και $y_0 = 0$.
Για $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $h = x - x_0 = x$ και $k = y - y_0 = y$.
Σύμφωνα με τον τύπο (6), υπάρχει $u \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :
$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}[f_x(0 + ux, 0 + uy)x + f_y(0 + ux, 0 + uy)y]$.
Δηλαδή, $y \cdot cosx = 0 + [-uysin(ux)x + cosy(ux)y]$ που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 5.0.57. *Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).*
Δείξτε ότι το πολυώνυμο του $Taylor$ $P_2(x, y)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο 2ου βαθμού τέτοιο ώστε $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-P_2(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2} = 0$.

Λύση Αν Q είναι ένα άλλο πολυώνυμο 2ου βαθμού με την ίδια ιδιότητα τότε $R(x,y) = P_2(x,y) - Q(x,y)$ είναι ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού που ικανοποιεί $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2} = 0$. Γράφουμε το R στη μορφή :
$R(x,y) = \alpha + \beta(x-x_0) + \gamma(y-y_0) + \delta(x-x_0)^2 + \epsilon(x-x_0)(y-y_0) + \zeta(y-y_0)^2$
και έχουμε διαδοχικά :
- $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x,y_0)}{(x-x_0)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha+\beta(x-x_0)+\delta(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \delta = 0$
- $\lim_{y\to y_0} \frac{R(x_0,y)}{(y-y_0)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{y\to y_0} \frac{\gamma(y-y_0)+\zeta(y-y_0)^2}{(y-y_0)^2} = 0 \Rightarrow \gamma = \zeta = 0$
- $\lim_{t\to 0} \frac{R(x_0+t,y_0+t)}{2t^2} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\epsilon t^2}{2t^2} = 0 \Rightarrow \epsilon = 0.$

Άρα $R = 0$ και $Q = P_2$.

Για συναρτήσεις m **μεταβλητών** $(x_1, x_2, ..., x_m)$

Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ένα ανοιχτό χωρίο και συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R} : \overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_m) \to f(x_1, ..., x_m)$, κλάσεως C^2.
- Το 1ο διαφορικό της f στο $\overrightarrow{x_0} \in U$ είναι η γραμμική μορφή $Df(\overrightarrow{x_0}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : \overrightarrow{h} \to \nabla f(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{h}$,

όπου $\nabla f(\overrightarrow{x_0}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\overrightarrow{x_0}) \\ . \\ . \\ . \\ f_{x_m}(\overrightarrow{x_0}) \end{pmatrix}$ (Συμβ. $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$).

- Παραγωγίζοντας ως προς $x_1, ..., x_m$ τις συνιστώσες του $\nabla f(\overrightarrow{x_0})$ σχηματίζουμε έναν $m \times m$ **συμμετρικό** πίνακα

$$H_f(\overrightarrow{x_0}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\overrightarrow{x_0}) & f_{x_1x_2}(\overrightarrow{x_0}) & ... & f_{x_1x_m}(\overrightarrow{x_0}) \\ f_{x_1x_2}(\overrightarrow{x_0}) & f_{x_2x_2}(\overrightarrow{x_0}) & ... & f_{x_2x_m}(\overrightarrow{x_0}) \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ f_{x_1x_m}(\overrightarrow{x_0}) & f_{x_2x_m}(\overrightarrow{x_0}) & ... & f_{x_mx_m}(\overrightarrow{x_0}) \end{pmatrix}$$

που λέγεται *Hessian* **(Εσσιανός) πίνακας** της f στο $\overrightarrow{x_0}$
(Ισχύει $f_{x_1x_2}(\overrightarrow{x_0}) = f_{x_2x_1}(\overrightarrow{x_0})$, διότι $f \in C^2$).

Ορισμός 5.0.58. *Το **2ο διαφορικό της** f **στο** $\overrightarrow{x_0} \in U$ είναι η τετραγωνική μορφή* $D^2 f(\overrightarrow{x_0}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : \overrightarrow{h} \to D^2 f(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{h} = \overrightarrow{h} \cdot (H_f(\overrightarrow{x_0})\overrightarrow{h})$.
$[Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *τετραγωνική μορφή σημαίνει ότι* $Q(\lambda\overrightarrow{h}) = \lambda^2 Q(\overrightarrow{h}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^m]$.

- *Αναλυτικά έχουμε* $D^2 f(\overrightarrow{x_0})\overrightarrow{h} = \sum_{i,j=1}^m f_{x_ix_j}(\overrightarrow{x_0}) h_i h_j$, $\overrightarrow{h} = (h_1, ..., h_m) \in \mathbb{R}^m$ *και ειδικότερα :*
όταν $m = 1$, $D^2 f(\overrightarrow{x_0})h = f''(x_0)h^2$

όταν $m = 2$, $D^2 f(\overrightarrow{x_0})\overrightarrow{h} = f_{x_1x_1}(\overrightarrow{x_0})h_1{}^2 + 2f_{x_1x_2}(\overrightarrow{x_0})h_1h_2 + f_{x_2x_2}(\overrightarrow{x_0})h_2{}^2$, $\overrightarrow{h} = (h_1, h_2)$
όταν $m = 3$, $D^2 f(\overrightarrow{x_0})\overrightarrow{h} = f_{x_1x_1}(\overrightarrow{x_0})h_1{}^2 + f_{x_2x_2}(\overrightarrow{x_0})h_2{}^2 + f_{x_3x_3}(\overrightarrow{x_0})h_3{}^2 + 2f_{x_1x_2}(\overrightarrow{x_0})h_1h_2 + 2f_{x_1x_3}(\overrightarrow{x_0})h_1h_3 + 2f_{x_2x_3}(\overrightarrow{x_0})h_2h_3$.
$[(h_1 + h_2 + h_3)^2 = h_1{}^2 + h_2{}^2 + h_3{}^2 + 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_2h_3]$

Παράδειγμα 5.0.59. *Έστω* $f(x_1, x_2) = sinx_1 \cdot cosx_2$. *Να υπολογιστεί το 2ο διαφορικό της* f *στα σημεία* $\overrightarrow{x_1} = (\frac{\pi}{2}, 0), \overrightarrow{x_2} = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ *και* $\overrightarrow{x_3} = (0, \frac{\pi}{2})$.

Απάντηση Υπολογίζουμε $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} cosx_1\ cosx_2 \\ -sinx_1\ sinx_2 \end{pmatrix}$

και $H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -sinx_1cosx_2 & -cosx_1sinx_2 \\ -cosx_1sinx_2 & -sinx_1cosx_2 \end{pmatrix}$.

Στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 0)$ έχουμε $H_f(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, άρα $D^2 f(\frac{\pi}{2}, 0)\overrightarrow{h} = -h_1{}^2 - h_2{}^2$

Στο σημείο $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ έχουμε $H_f(-\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, άρα $D^2 f(-\frac{\pi}{2}, 0)\overrightarrow{h} = h_1{}^2 + h_2{}^2$

Στο σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$ έχουμε $H_f(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, άρα $D^2 f(0, \frac{\pi}{2})\overrightarrow{h} = -2h_1h_2$.

Γεωμετρική Ερμηνεία
Αν $\|\overrightarrow{h}\| = 1$, τότε η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to \phi(t) = f(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{h}) = f(\overrightarrow{r}(t))$ (όπου $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{h}$) είναι ο περιορισμός της f στην προσανατολισμένη ευθεία που διέρχεται από το $\overrightarrow{x_0}$ και έχει κατεύθυνση $\overrightarrow{h}$.
Έχουμε $\phi'(0) = Df(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{h}$ και $\phi''(0) = D^2 f(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{h}$.
Επίσης $\phi'(t) = \nabla f(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) = \nabla f(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{h})\overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{m} f_i(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{h})h_i$
και $\phi''(t) = \sum_{i,j=1}^{m} f_{x_ix_j}(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{h})h_ih_j$.
Με τη βοήθεια του 2ου διαφορικού το Θ4 διατυπώνεται για συναρτήσεις μεταβλητών ως εξής

Θεώρημα 5.0.60. *Έστω* $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \in \mathbb{R}^m$ *ανοιχτό χωρίο και* $\overrightarrow{x_0} \in U$.
Τότε (8) $\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} \frac{f(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x_0}) - Df(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) - \frac{1}{2}D^2 f(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})}{\|(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})\|^2} = 0$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (κλειστό, φραγμένο) συνεχής.

2. Αν $f : (a, b) \to^{C^2} \mathbb{R}$ ανοιχτό, τότε ισχύουν :
$x_0 \in (a, b)$ ακρότατο $\Rightarrow f'(x_0) = 0$,
$x_0 \in (a, b)$ τοπικό μέγιστο (ή τοπικό ελάχιστο) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

3. Έστω $f : (a, b) \to^{C^2} \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Ισχύουν τα παρακάτω :
Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ τοπικό μέγιστο,
Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ τοπικό ελάχιστο.

Προκαταρκτικά

Ορισμός 5.0.61. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^m$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ω. για $x \in A$ με $\|x - x_0\| < \epsilon \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$.*
*Η f έχει **ολικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$ αν $x \in A \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$.*
- *Ανάλογα ορίζεται το **τοπικό (ολικό) ελάχιστο**.*
- ***Ακρότατο** σημαίνει μέγιστο ή ελάχιστο.*

Θεώρημα 5.0.62. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^m$ κλειστό και φραγμένο και έστω $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f έχει ολικό μέγιστοκαι ελάχιστο σε κάποια σημεία του K.*

Αναγκαίες Συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων.

Θεώρημα 5.0.63. *Έστω $U \in \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.*
Τότε αν το $x_0 \in U$ είναι τοπικό ακρότατο της f ισχύει $\nabla f(x_0) = 0$.

Απάντηση Έστω $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$ και έστω $\epsilon > 0$ τ.ω. $B(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < \epsilon\} \subset U$.
Θεωρούμε τον περιορισμό της f στις ευθείες που διέρχονται από το x_0 κι έχουν κατεύθυνση e_i, $\phi_i : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R} : t \to \phi_i(t) = f(x_0 + te_i)$.
Αφού η f έχει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστα) στο x_0,
οι συναρτήσεις ϕ_i έχουν επίσης τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο) για $t = 0$.
Άρα $\phi_i'(0) = 0$ και επειδή $\phi_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ συμπεραίνουμε ότι $\nabla f(x_0) = 0$.

Ορισμός 5.0.64. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Τα **κρίσιμα σημεία** της f είναι τα σημεία $x \in U$ όπου $\nabla f(x) = 0$. Σύμφωνα με το Θ2 τα κρίσιμα σημεία είναι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων.*

Ορισμός 5.0.65. *Τα κρίσιμα σημεία που ΔΕΝ είναι τοπικά ακρότατα λέγονται **σαγματικά σημεία**. Με άλλα λόγια το $x \in U$ είναι σαγματικό σημείο της f*
$\Leftrightarrow \nabla f(x) = 0$ και
Σε κάθε περιοχή του x υπάρχουν σημεία $x_1, x_2 \in U$ τ.ω. $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$.

Παράδειγμα 5.0.66. *Το O είναι σαγματικό σημείο της $f(x, y) = x^2 - y^2$.*
Πράγματι $\nabla f(x, y) = (2x, -2y) \Rightarrow \nabla f(0, 0) = 0$.

Επιπλέον, $f(x,0) = x^2$ *και* $f(0,y) = -y^2$*, άρα η* f *δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο στο* O*.*

Άσκηση 5.0.67. *Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της*
$f(x,y) = (x^2-1)^2 - y^2 = x^4 - 2x^2 + 1 - y^2$.

Λύση Το σημείο $(0,0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
Πράγματι, $f(0,0) = 1$ και για $|x| \leq 1$ ισχύει $x^4 \leq x^2$.
Άρα $|x| \leq 1 \Rightarrow x^4 - 2x^2 \leq 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \leq 1 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - y^2 \leq 1$.
• Το σημείο $(1,0)$ είναι σαγματικό σημείο.
Πράγματι, $\nabla f(1,0) = 0$. Έπειτα θεωρούμε τον περιορισμό της f
στον άξονα x, η $x \to f(x,0) = (x^2-1)^2$ έχει ολικό ελάχιστο για $x = 1$,
στην ευθεία $x = 1$, η $y \to f(1,y) = -y^2$ έχει ολικό μέγιστο για $y = 0$.
Βλέπουμε λοιπόν ότι :
$\forall \epsilon > 0\ \exists x_\epsilon \in (1, 1+\epsilon)$ και $\exists y_\epsilon \in (0,\epsilon)$ τ.ω. $f(1,y_\epsilon) < f(1,0) < f(x_\epsilon, 0)$.
• Ομοίως, το σημείο $(-1,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Θεώρημα 5.0.68. *Έστω* $U \subset \mathbb{R}^m$ *ανοιχτό και* $f \in C^2(U,\mathbb{R})$*. Τότε,*
αν το $x_0 \in U$ *είναι τοπικό μέγιστο της* f *ισχύει* $D^2f(x_0)h \leq 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^m$,
αν το $x_0 \in U$ *είναι τοπικό ελάχιστο της* f *ισχύει* $D^2f(x_0)h \geq 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^m$.

Απάντηση Εξετάζουμε την περίπτωση που η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.
Εργαζόμαστε όπως στην Απόδειξη του Θ2.
Έστω $\epsilon > 0$ τ.ω $B(x_0,\epsilon) \subset U$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f
στις ευθείες που διέρχονται από το x_0 και έχουν κατεύθυνση το h με $\|h\| = 1$,
$\phi_h : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R} : t \to \phi_h(t) = f(x_0 + th)$.
Οι συναρτήσεις ϕ_h παρουσιάζουν τοπικό μέγιστο για $t = 0$, επομένως $\phi_h'(0) = 0$. Θα δείξουμε με εις άτοπο απαγωγή ότι $\phi_h''(0) \leq 0$. Αν $\phi_h''(0) > 0$ τότε σύμφωνα με τον τύπο (4) του Θ2 στο Κεφάλαιο με τα θεωρήματα $Taylor$:
$\phi_h(t) = \phi_h(0) + \phi_h'(0)t + \frac{1}{2}\phi_h''(0)t^2 + R_2(t)$, με $\lim_{t\to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0$.
Συνεπώς, για $|t| < \delta$ αρκετά μικρό $(0 < \delta < \epsilon)$ έχουμε :
$-\frac{1}{4}\phi_h''(0)t^2 \leq R_2(t) \leq \frac{1}{4}\phi_h''(0)t^2$ και $\phi_h(t) \geq \phi_h(0) + \frac{1}{4}\phi_h''(0)t^2$
$\Rightarrow \phi_h(t) > \phi_h(0)$ για $t \in (0,\delta) \Rightarrow f(x_0 + th) > f(x_0)$, που είναι ΑΤΟΠΟ
επειδή η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Συμπεραίνουμε ότι $\phi_h''(0) \leq 0$ και επειδή $D^2f(x_0)h = \phi_h''(0)$
έχουμε $D^2f(x_0)h \leq 0$, όταν $\|h\| = 1$.
Τέλος, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $D^2f(x_0)(\lambda h) = \lambda^2 D^2 f(x_0)$
της τετραγωνικής μορφής $D^2f(x_0)$ για να δείξουμε ότι $D^2f(x_0)h \leq 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^m$.

Άσκηση 5.0.69. *Για* x,y,z *θετικούς ακεραίους με άθροισμα* $s > 0$ $(x+y+z = s)$ *βρείτε τη μέγιστη τιμή του γινομένου* xyz*.*

Λύση Έχουμε $x+y+z=s \Rightarrow z=s-(x+y)$
και $f(x,y)=xy(s-x-y)=sxy-x^2y-xy^2$.
Το πεδίο Ορισμού της f είναι το τρίγωνο $T=\{x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq s\}$.
Η f είναι συνεχής στο T, που είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
Χάρη στο Θ1 γνωρίζουμε ότι η f πιάνει το μέγιστο της σ′ ένα σημείο $(x_0,y_0)\in T$.
Στο σύνορο του Τ : $x=0\Rightarrow f=0$, $y=0\Rightarrow f=0$ και $x+y=s\Rightarrow f=0$.
Κατά συνέπεια το μέγιστο της f πιάνεται στο εσωτερικό του T σ′ ένα σημείο $(x_0,y_0)\in U=\{x>0.y>0, x+y>s\}$ (ανοιχτό χωρίο).
Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία της $f\in C^1(U,\mathbb{R})$:
$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}5y-2xy-y^2\\5x-x^2-2xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(5-2x-y)\\x(5-x-2y)\end{pmatrix}$.
Άρα $\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow 5-x-2y=0\Leftrightarrow 2y+x=5\Leftrightarrow x=y=\frac{5}{3}$.
Αφού το σημείο $(\frac{5}{3},\frac{5}{3})$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο U συμπεραίνουμε ότι $(x_0,y_0)=(\frac{5}{3},\frac{5}{3})$, δηλαδή $max_T f=f(x_0,y_0)=f(\frac{5}{3},\frac{5}{3})=\frac{5^3}{3^3}$ και
$xyz\leq(\frac{5}{3})^3=(\frac{x+y+z}{3})^3\Rightarrow(xyz)^{\frac{1}{3}}\leq(\frac{x+y+z}{3})$ (γεωμετρικός μέσος $\leq$ αριθμητικός μέσος).

Ικανές Συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων

Ορισμός 5.0.70. *Έστω A συμμετρικός πίνακας $m\times m$ και $Q(h)=h\cdot A_h$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Ορίζουμε τους εξής πίνακες :*
(i) ο πίνακας A λέγεται ***θετικά ορισμένος*** *όταν $Q(h)>0$, $\forall h\neq 0$ (Συμβ. $A>0$)*
(ii) ο πίνακας A λέγεται ***αρνητικά ορισμένος*** *όταν $Q(h)<0$, $\forall h\neq 0$ (Συμβ. $A<0$)*
(iii) ο πίνακας A λέγεται ***αόριστος*** *$(m>2)$ όταν $\exists h_1,h_2\in\mathbb{R}^m$ τ.ω. ...*

Υπενθύμιση (Άλγεβρα)
Αν A είναι ένας συμμετρικός πίνακας $m\times m$ (με στοιχεία $\in\mathbb{R}$) τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $(h_1,...,h_m)$ ιδιοδιανυσμάτων : $Ah_i=\lambda_i h_i$, $\|h_i\|=1$ και $h_i\cdot h_j=0$, $\forall i\neq j$.
Επιπλέον ισχύει :
$detA=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot...\cdot\lambda_m$ και $trA=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m=\alpha_{11}+\alpha_{22}+...+\alpha_{mm}$.

Λήμμα 5.0.71. *Έστω A συμμετρικός πίνακας $m\times m$ και $Q(h)=h\cdot A_h$.*
Τότε, αν $A>0$, υπάρχει $\alpha>0$ τ.ω. $Q(h)\geq\alpha\cdot\|h\|^2$, $\forall h\in\mathbb{R}^m$.

Λήμμα 5.0.72. *Έστω $A=\begin{pmatrix}a&c\\d&b\end{pmatrix}$ συμμετρικός πίνακας με $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.*
Τότε i) $A>0\Leftrightarrow detA>0$ και $\alpha>0$
ii) $A<0\Leftrightarrow detA<0$ και $\alpha<0$
iii) A αόριστος $\Leftrightarrow detA<0$.

Θεώρημα 5.0.73. *Έστω $U\subset\mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f\in C^2(U,\mathbb{R})$, $x_0\in U$ και $H_f(x_0)$ ο Εσσιανός πίνακας της f στο x_0. Τότε ισχύουν τα εξής :*

(i) αν $\nabla f(x_0) = 0$ *και* $H_f(x_0) > 0 \Rightarrow$ *η* f *έχει τοπικό ελάχιστο στο* x_0,
(ii) αν $\nabla f(x_0) = 0$ *και* $H_f(x_0) < 0 \Rightarrow$ *η* f *έχει τοπικό μέγιστο στο* x_0,
και (iii) αν $\nabla f(x_0) = 0$ *και* $H_f(x_0)$ *αόριστος* $\Rightarrow$ *η* f *έχει σάγμα στο* x_0.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον τύπο (8) του Κεφαλαίου με τα Θεωρήματα $Taylor$, έχουμε $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) \cdot (x - x_0) + R_2(x)$, με $\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{\|x - x_0\|^2} = 0$.
Στην Περίπτωση (i) : $D^2 f(x_0) \cdot (x - x_0) = (x - x_0) H_f(x_0)(x - x_0) \geq \alpha \|x - x_0\|^2$.
Θα φράξουμε επίσης το υπόλοιπο $R_2(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{\|x - x_0\|^2} = 0$
$\Rightarrow -\frac{\alpha}{4}\|x - x_0\|^2 \leq R_2(x) \leq \frac{\alpha}{4}\|x - x_0\|^2$, για $\|x - x_0\| < \delta$ (δ αρκετά μικρό),
$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x - x_0\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|x - x_0\|^2$
$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{4}\|x - x_0\|^2$, για $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow$ τοπικό ελάχιστο στο x_0.
Στην Περίπτωση (ii) : Ομοίως με την Περίπτωση (i).
Στην Περίπτωση (iii) : υπάρχουν $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m$ τ.ω. $\|h_1\| = \|h_2\| = 1$ και $D^2 f(x_0) h_1 > \alpha$, για κάποιο $\alpha > 0$. Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.
Δείχνουμε ότι $f(x_0 + th_1) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{4}t^2$ και $f(x_0 + th_2) \leq f(x_0) - \frac{\alpha}{4}t^2$ (για $|t| < \delta$)
$\Rightarrow$ η f έχει σάγμα στο x_0.

$\square$

Άσκηση 5.0.74. *Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία της* $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + 1 - y^2$.

Απάντηση Έχουμε $\nabla f(x, y) = (4x(x^2 - 1), -2y)$.
$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ ή $(\pm 1, 0)$ (3 κρίσιμα σημεία).
Υπολογίζουμε $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Άρα $detH_f(0, 0) = 8 > 0$ και $-4 < 0 \Rightarrow H_f(0, 0) < 0 \Rightarrow (0, 0)$ τοπικό μέγιστο.
Επίσης $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow detH_f(1, 0) = -16 < 0 \Rightarrow H_f(0, 1)$ αόριστος
$\Rightarrow (1, 0)$ σαγματικό σημείο.

Άσκηση 5.0.75. *Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία της* $f(x, y) = (x-5)\log(x \cdot y)$ $(x, y > 0)$.

Απάντηση Έχουμε $\nabla f(x, y) = (\log(xy) + \frac{x-5}{x}, \frac{x-5}{y})$.
$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \{ \log(xy) + \frac{x-5}{x} = 0$ και $\frac{x-5}{y} = 0 \} \Leftrightarrow (x, y) = (5, \frac{1}{5})$.
Άρα $(5, \frac{1}{5})$ μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.
A' τρόπος : Έχουμε $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x-5}{y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(5, \frac{1}{5}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow detH_f(5, \frac{1}{5}) = -25 < 0 \Rightarrow H_f(5, \frac{1}{5})$ αόριστος $\Rightarrow (5, \frac{1}{5})$ σαγματικό σημείο.
B' τρόπος : Ισχύει $f(5, \frac{1}{5}) = 0$.
Θα μελετήσουμε το πρόσημο της f σε μια περιοχή του $(5, \frac{1}{5})$.

Έχουμε $\log xy > 0 \Leftrightarrow y > \frac{1}{x} \Rightarrow (5, \frac{1}{5})$ σάγμα.

Άσκηση 5.0.76. *Θεωρούμε το γράφημα* Γ *της* $g(x,y) = \sqrt{\frac{2}{xy}}$, $x, y > 0$. *Βρείτε το σημείο του* Γ *που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων* $(0,0,0)$.

Απάντηση Έχουμε $\Gamma = \{(x, y, \sqrt{\frac{2}{xy}}) : x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^3$.
Έστω $M \in \Gamma$, δηλαδή $M(x, y, \sqrt{\frac{2}{xy}})$.
Το $d(M, 0) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}}$ είναι ελάχιστο, όταν $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$ είναι ελάχιστο.
Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f στο $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$.
$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$, είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο και $f(1,1) = 4$.
Παρατηρούμε, επίσης ότι $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$,
$\lim_{x \to 0} f(x,y) = +\infty$ και $\lim_{y \to 0} f(x,y) = +\infty$, για $(x,y) \in U$.
Άρα η f πιάνει το ολικό ελάχιστο της στο $(1,1)$, το μοναδικό κρίσιμο σημείο.

Ακρότατα υπό συνθήκη

Πρόβλημα : Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, και $f, g \in C^2(U, \mathbb{R})$.
Θεωρούμε το σύνολο στάθμης της g με τιμή $c \in \mathbb{R}$, $\Sigma_c = \{x \in U : g(x) = c\}$
και θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα του περιορισμού της f στο Σ_c (Συμβολισμός f_{Σ_c}).

Θεώρημα 5.0.77. *Έστω* $f, g \in C(U, \mathbb{R})$ *και* $\alpha \in U$ *τ.ω.* $g(\alpha) = c$ *και* $\nabla g(\alpha) \neq 0$.
Τότε αν $f|\Sigma_c$ *(ο περιορισμός της* f *στο* Σ_c*) έχει τοπικό ακρότατα στο* α,
ισχύει $\nabla f(\alpha) = \lambda \nabla g(\alpha)$, *για κάποιο* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.0.78. *Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της* $f(x,y) = e^x \cdot siny$ *περιορισμένης στον μοναδικό κύκλο* Γ $(g(x,y) = x^2 + y^2 = 1)$.

Γνωρίζουμε (Βλέπε Θ1) ότι η f λαμβάνει το ολικό μέγιστο/ελάχιστο της στο Γ (κλειστό, φραγμένο). Σύμφωνα με το Θ5, οι πιθανές θέσεις των ολικών ακροτάτων επιλύουν το σύστημα : $\{\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, και $x^2 + y^2 = 1\ \}$
$\Leftrightarrow \{\ e^x \cdot siny = 2\lambda x\ ,\ e^x \cdot cosy = 2\lambda y\ ,\ x^2 + y^2 = 1\ \}$
$\Rightarrow \{\ e^{2x} \cdot sin^2 y = 4\lambda^2 x^2\ ,\ e^{2x} \cdot cos^2 y = 4\lambda^2 y^2\ \}$
$\Rightarrow e^{2x} = 4\lambda^2 \Rightarrow e^x = 2|\lambda|$.
Αν $\lambda > 0$ τότε το σύστημα γράφεται $\{\ siny = x\ ,\ cosy = y\ ,\ x = siny_0\ ,\ y = y_0\ \}$.
Αν $\lambda < 0$ τότε το σύστημα γράφεται $\{\ siny = -x\ ,\ cosy = -y\ ,\ x = -siny_0\ ,\ y = -y_0\ \}$.
Συμπέρασμα : Οι πιθανές θέσεις των ολικών ακροτάτων είναι τα σημεία $(siny_0, y_0)$ και $(-siny_0, -y_0)$. Επειδή $f(siny_0, y_0) > 0 > f(-siny_0, -y_0)$, το πρώτο είναι ολικό μέγιστο και το δεύτερο ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 5.0.79. *Θεωρείστε την καμπύλη* Γ *της* $g(x,y) = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$ $(a > b > 0)$ *και βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.*

Απάντηση Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$.
1ο βήμα : Η καμπύλη $g(x,y) = 1$ είναι συμμετρική ως προς τους άξονες των x, y. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του ολικού μεγίστου / ελαχίστου θεωρούμε μια παραμέτρηση του τμήματος της Γ που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο :
$x(t) = a(cost)^{\frac{1}{2}}$ $y(t) = b(sint)^{\frac{1}{2}}$, με $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2ο βήμα : Έχουμε $f(x(t), y(t)) = a^2cost + b^2sint$
$= \sqrt{a^4+b^4}(cost\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}} + sint\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}) = \sqrt{a^4+b^4} \cdot cos(t-\theta)$, με $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Παρατηρούμε ότι $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$, επειδή $a > b$.

Μέρος II

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο 6

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

6.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Γνωρίζουμε τότε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dt$ μετράει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$. Επίσης, έχουμε ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $[a, b]$ είναι $\ell[a, b] = b - a.$. Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ως μέση τιμή της f στο $[, a, b]$ ορίζουμε

$$M_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Φανταστείτε τώρα ότι αντί να έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα στο $\mathbb{R}$, παίρνουμε μια παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} \colon [a, b] &\to \mathbb{R}^d \\ t &\mapsto \overrightarrow{r}(t). \end{aligned}$$

Έστω ακόμη Γ το ίχνος της καμπύλης. Για λόγους εποπτείας, μπορούμε να σκεφτόμαστε την καμπύλη στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, ή στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Το πρώτο ερώτημα που τίθεται είναι πώς ορίζεται το μήκος της καμπύλης $\overrightarrow{r}$ και πώς μπορούμε να το υπολογίσουμε.

Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι το ίχνος της καμπύλης Γ περιέχεται στο πεδίο ορισμού A ενός βαθμωτού πεδίου, δηλαδή μιας συνάρτησης $f \colon A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f μπορεί για παράδειγμα να μετρά τη θερμοκρασία ή την πίεση σε κάθε σημείο του χώρου. Θα θέλαμε να ξέρουμε πώς να βρίσκουμε τη μέση τιμή της συνάρτησης πάνω στην καμπύλη $\overrightarrow{r}$.

Τι άλλο θα θέλαμε να μπορούμε να υπολογίσουμε· Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ έχει μάζα και ότι η πυκνότητά της σε κάθε σημείο δίνεται από τη συνάρτηση $\delta \colon \Gamma \to \mathbb{R}$. Θα θέλαμε να υπολογίζουμε τη συνολική μάζα m, το κέντρο βάρους και τις ροπές αδράνειας.

Ας δούμε ένα ακόμη πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια καμπύλη $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ στο επίπεδο και μια συνεχή συνάρτηση $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x,y) \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in \Gamma$. Παίρνουμε το γράφημα της f: $G_f = \{(x,y,f(x,y)) \,:\, (x,y) \in \Gamma\}$. Δημιουργείται τότε μια 'κυλινδρική επιφάνεια¨, η οποία περικλείεται από το γράφημα της f και το xy-επίπεδο. Φορμαλιστικά, η επιφάνεια περιγράφεται ως εξής

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in \Gamma, 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}.$$

Το ερώτημα είναι πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό της επιφάνειας M.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το ίχνος Γ της καμπύλης περιέχεται στο πεδίο ορισμού A ενός διανυσματικού πεδίου, δηλαδή μιας συνάρτησης $\overrightarrow{F}\colon A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. Για παράδειγμα, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ μπορεί να είναι ένα πεδίο δυνάμεων (όπως ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) ή ένα πεδίο ταχυτήτων ή ένα πεδίο ροής. Τότε θα θέλαμε να μπορούμε να υπολογίσουμε για παράδειγμα το έργο της δύναμης κατά μήκος της καμπύλης Γ.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πώς αντιμετωπίζονται προβλήματα όπως αυτά που αναφέραμε προηγουμένως.

6.2 Μήκος Καμπύλης

Θεωρούμε μια παραμετρική καμπύλη $\overrightarrow{r}$ του $\mathbb{R}^n$. (Για καλύτερη εποπτεία μπορούμε να σκεφτόμαστε μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$.) Η πιο απλή περίπτωση είναι όταν η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $\overrightarrow{a}$ και πέρας το σημείο $\overrightarrow{b}$. Σε αυτήν την περίπτωση το μήκος της καμπύλης είναι η απόσταση των σημείων $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$, δηλαδή $\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|$. Συνεπώς,

$$l(\gamma) = \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|.$$

Περνάμε τώρα στη δεύτερη περίπτωση, όταν η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι μια πολυγωνική γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι το ίχνος της καμπύλης αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα. Έστω

$$\Gamma = [\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_1}] \cup [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] \cup \ldots \cup [\overrightarrow{a_{N-1}}, \overrightarrow{a_N}].$$

Τότε το μήκος της καμπύλης είναι το άθροισμα των μηκών όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που αποτελούν την πολυγωνική γραμμή. Δηλαδή

$$\begin{aligned} l(\gamma) =& \|\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_0}\| + \|\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}\| + \ldots + \|\overrightarrow{a_N} - \overrightarrow{a_{N-1}}\| \\ =& \sum_{i=1}^{N} \|\overrightarrow{a_i} - \overrightarrow{a_{i-1}}\|. \end{aligned}$$

Ερχόμαστε τώρα στην πιο γενική περίπτωση. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια τυχαία καμπύλη $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}$. Για να ορίσουμε το μήκος της καμπύλης, θεωρούμε μια διαμέριση του $[a, b]$:

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}.$$

Για κάθε τέτοια διαμέριση Δ παίρνουμε τα αντίστοιχα σημεία πάνω στην καμπύλη: $\overrightarrow{r}(t_0), \overrightarrow{r}(t_1) \ldots, \overrightarrow{r}(t_n)$. Τα σημεία αυτά ορίζουν μια πολυγωνική γραμμή που θα τη συμβολίζουμε με Π_Δ. Δηλαδή:

$$\Pi_\Delta = [\overrightarrow{r}(t_0), \overrightarrow{r}(t_1)] \cup [\overrightarrow{r}(t_1), \overrightarrow{r}(t_2)] \cup \ldots \cup [\overrightarrow{r}(t_{N-1}), \overrightarrow{r}(t_N)].$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το μήκος της πολυγωνικής γραμμής δίνεται από

$$\begin{aligned} l(\Pi_\Delta) =& \|\overrightarrow{r}(t_1) - \overrightarrow{r}(t_0)\| + \|\overrightarrow{r}(t_2) - \overrightarrow{r}(t_1)\| + \ldots + \|\overrightarrow{r}(t_N) - \overrightarrow{r}(t_{N-1})\| \\ =& \sum_{i=1}^{N} \|\overrightarrow{r}(t_i) - \overrightarrow{r}(t_{i-1})\|. \end{aligned}$$

Πρέπει τώρα να είναι διαισθητικά αποδεκτό ότι όσο η λεπτότητα της διαμέρισης Δ μικραίνει, το μήκος της αντίστοιχης πολυγωνικής γραμμής $l(\Pi_\Delta)$ προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης. Έτσι, οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 6.2.1. *Έστω παραμετρική καμπύλη $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Το μήκος της καμπύλης ορίζεται ως εξής*

$$l(\gamma) = \sup\{l(\Pi_\Delta) \,:\, \Delta \textit{ διαμέριση του } [a, b]\}.$$

Παρατήρηση. Μια παραμετρική καμπύλη $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της είναι συμπαγές σύνολο. Συνεπώς, η εικόνα της, δηλαδή το ίχνος της καμπύλης είναι φραγμένο σύνολο. Παρά το γεγονός ότι το ίχνος Γ είναι φραγμένο, αυτό δεν σημαίνει ότι το μήκος της καμπύλης θα είναι πεπερασμένο. Το μήκος της καμπύλης $\overrightarrow{\gamma}$ μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός στο $[0, \infty)$ ή μπορεί να είναι και άπειρο. Στη βιβλιογραφία μπορείτε να βρείτε παραδείγματα καμπυλών που έχουν άπειρο μήκος.

Η περίπτωση που θα μας απασχολήσει περισσότερο είναι όταν η καμπύλη

$$\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$$

είναι κλάσης C^1. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει η παράγωγος $\overrightarrow{r}'(t) = (r_1'(t), r_2'(t), \ldots, r_n'(t))$ για κάθε t και είναι συνεχής στο $[a, b]$. Σε αυτήν την περίπτωση για το μήκος της καμπύλης ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια C^1-καμπύλη. Τότε για το μήκος της ισχύει ότι*

$$l(\overrightarrow{r}) = \int_a^b \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt. \qquad (*)$$

Φυσική ερμηνεία. Την παραπάνω σχέση (∗) τη γνωρίζουμε από μαθήματα φυσικής με την εξής μορφή: Η απόσταση που διανύει ένα κινητό ισούται με το ολοκλήρωμα του μέτρου της ταχύτητάς του.

Στην περίπτωση που η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι C^1, μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$s\colon [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{r}'(\tau)\| d\tau.$$

Από το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έπεται ότι

$$\frac{ds(t)}{dt} = \|\overrightarrow{r}'(t)\|.$$

Επομένως, το μήκος της καμπύλης μπορούμε να το εκφράσουμε ως ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

$$l(\overrightarrow{r}) = \int_a^b \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt = \int_\Gamma ds.$$

Αναπαραμέτρηση καμπύλης

Έστω $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια παραμετρική C^1-καμπύλη. Θεωρούμε μια συνάρτηση $\phi\colon [\gamma,\delta] \to [a,b]$ για την οποία υποθέτουμε ότι είναι C^1 (δηλαδή παραγωγίσιμη στο $[\gamma,\delta]$ με συναχή παράγωγο), γνησίως αύξουσα και επί (οπότε αναγκαστικά θα ισχύει $\phi(\gamma) = a$ και $\phi(\delta) = b$). Μπορούμε τότε να ορίσουμε μια 'νέα' παραμτρική καμπύλη ως εξής:

$$\overrightarrow{\sigma}\colon [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}^n$$

με $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{r} \circ \phi$, δηλαδή $\overrightarrow{\sigma}(u) = \overrightarrow{r}(\phi(u))$. Η καμπύλη $\overrightarrow{\sigma}$ λέμε ότι είναι μια **αναπαραμέτρηση της καμπύλης** $\overrightarrow{r}$. Από τον τρόπο ορισμού της $\overrightarrow{\sigma}$, είναι προφανές ότι οι δύο καμπύλες $\overrightarrow{r}$ και $\overrightarrow{\sigma}$ έχουν την ίδια εικόνα, δηλαδή το ίδιο ίχνος.
Η διαίσθησή μας μας λέει ότι οι δύο καμπύλες $\overrightarrow{r}$ και $\overrightarrow{\sigma}$ οφείλουν να έχουν το ίδιο μήκος. Αυτό είναι πράγματι σωστό και δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί. Έτσι, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.2.3. *Το μήκος μιας C^1-καμπύλης είναι ανεξάρτητο της παραμέτρησης.*

Απόδειξη.
Έστω $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια C^1-καμπύλη και $\overrightarrow{\sigma}\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ με $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{r} \circ \phi$ μια αναπαραμέτρηση αυτής, όπου $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ C^1-συνάρτηση, γνησίως αύξουσα και επί. Τότε η $\overrightarrow{\sigma}$ είναι C^1 και ισχύει

$$\overrightarrow{\sigma}'(s) = (\overrightarrow{r} \circ \phi)'(s) = \overrightarrow{r}'(\phi(s)) \cdot \phi'(s)$$

για κάθε $s \in [c,d]$. Επομένως, το μήκος της καμπύλης $\overrightarrow{\sigma}$ δίνεται από

$$l(\overrightarrow{\sigma}) = \int_c^d \|\overrightarrow{\sigma}'(s)\| ds = \int_c^d \|\overrightarrow{r}'(\phi(s))\| \cdot \phi'(s) ds = \int_a^b \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt = l(\overrightarrow{r}).$$

(Παρατηρείστε ότι $\phi'(s) \geq 0$ διότι η ϕ είναι γνησίως αύξουσα, επομένως δεν χρειάζεται να βάλουμε απόλυτη τιμή. Η τελευταία ισότητα στον παραπάνω υπολογισμό προκύπτει με μια αλλαγή μεταβλητής.) ■

6.3 Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Αριθμητικής Συνάρτησης (Βαθμωτού πεδίου)

Θεωρούμε ένα βαθμωτό πεδίο, δηλαδή μια συνάρτηση $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι είναι συνεχής. Έστω, ακόμη, μια παραμετρική C^1-καμπύλη $\overrightarrow{r}$ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού A της f. Στόχος μας σε αυτήν την ενότητα είναι να ορίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στην καμπύλη $\overrightarrow{r}$.

Πριν περάσουμε στους αυστηρούς ορισμούς, θα επιχειρήσουμε μια προσέγγιση του προβλήματος. Ο ανυπόμονος αναγνώστης μπορεί να παραλείψει αυτό το κομμάτι και να ανατρέξει κατευθείαν στους ορισμούς. Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ έχει μάζα (φανταστείτε ένα σύρμα) και το βαθμωτό πεδίο $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ μας δίνει την πυκνότητα της μάζας σε κάθε σημείο. Η πιο απλή περίπτωση είναι η καμπύλη να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα (φανταστείτε μια ράβδο) με αρχή το σημείο $\overrightarrow{a}$ και πέρας $\overrightarrow{b}$, το οποίο παραμετρικοποιείται ως εξής: $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{a} + t(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$ με $t \in [0,1]$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η πυκνότητα είναι σταθερή πάνω στην καμπύλη και ίση με c, δηλαδή $f(\overrightarrow{r}(t)) = c$ για κάθε $t \in [0,1]$. Τότε, ο όγκος της ράβδου μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το μήκος της και, επομένως, η συνολική μάζα της ράβδου είναι ίση με $m = c \cdot \|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\|$. Επειδή $\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\|$ για κάθε $t \in [0,1]$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$m = c \cdot \|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\| = c \cdot \|\overrightarrow{r}'(t)\|.$$

Φανταστείτε τώρα ότι η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι μια πολυγωνική γραμμή:

$$\Pi = [\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_1}] \cup [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] \cup \ldots [\overrightarrow{a_{N_1}}, \overrightarrow{a_N}]$$

και ότι το βαθμωτό πεδίο f (δηλαδή η πυκνότητα της μάζας) είναι σταθερή σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα (μπορεί όμως να διαφέρει από τμήμα σε τμήμα). Με άλλα λόγια $f(\overrightarrow{x}) = c_i$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in [\overrightarrow{a_{i-1}}, \overrightarrow{a_i}]$. Τότε η συνολική μάζα είναι ίση με το άθροισμα των μαζών των επιμέρους τμημάτων. Συνεπώς

$$m = \sum_{i=1}^{N} c_i \|\overrightarrow{a_i} - \overrightarrow{a_{i-1}}\|.$$

Αν για κάθε $i = 1, 2, \ldots, N$ επιλέξουμε t_i ώστε το αντίστοιχο σημείο $\overrightarrow{r}(t_i)$ να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{a_{i-1}}, \overrightarrow{a_i}]$, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$m = \sum_{i=1}^{N} f(\overrightarrow{r}(t_i)) \|\overrightarrow{r}'(t_i)\|.$$

Διαισθητικά τώρα, αν η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι μια τυχαία καμπύλη και η πυκνότητα f δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο, τότε για να υπολογίσουμε τη μάζα, θα αλλάξουμε στην τελευταία σχέση το άθροισμα σε ολοκλήρωμα και το σημείο $\overrightarrow{r}(t)$ θα διατρέχει όλη την καμπύλη. Δηλαδή

$$m = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t)) \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt.$$

Έτσι, καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 6.3.1. *Έστω $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια C^1-καμπύλη με ίχνος Γ και $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Το* **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** *της f πάνω στην καμπύλη $\overrightarrow{r}$ ορίζεται ως εξής:*

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t)) \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f ds$ λέγεται και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα **πρώτου είδους**.

Ανεξαρτησία του επικαμπυλίου ολοκληρώματος από την παραμέτρηση της καμπύλης

Πρόταση 6.3.2. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης πάνω σε μια C^1-καμπύλη είναι ανεξάρτητο από την παραμέτρηση της καμπύλης.*

Απόδειξη.
Έστω $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1-καμπύλη και $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Παίρνουμε μια αναπαραμέτρηση της καμπύλης $\overrightarrow{r}$

$$\overrightarrow{\sigma}\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$$
$$\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{r} \circ \phi$$

όπου $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ C^1-συνάρτηση, γνησίως αύξουσα και επί. Τότε έχουμε

$$\overrightarrow{\sigma}'(t) = \overrightarrow{r}'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \quad \text{για κάθε } t \in [c,d].$$

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στην καμπύλη $\overrightarrow{\sigma}$ είναι

$$\begin{aligned}
\int_\sigma f ds &= \int_c^d f(\sigma(t)) \, \|\sigma'(t\|) dt \\
&= \int_c^d f(\overrightarrow{r}(\phi(t))) \, \|\overrightarrow{r}'(\phi(t))\| \, \phi'(t) dt \\
&= \int_a^b f(\overrightarrow{r}(\tau)) \, \|\overrightarrow{r}'(\tau)\| d\tau \\
&= \int_{\overrightarrow{r}} f \, ds.
\end{aligned}$$

(Η προτελευταία ισότητα προκύπτει με μια αλλαγή μεταβλητής $\phi(t) = \tau$.) Συνεπώς, έχουμε πράγματι ότι

$$\int_\sigma f ds = \int_{\overrightarrow{r}} f\, ds.$$

■

Ολοκλήρωμα πάνω στην αντίθετη καμπύλη
Θεωρούμε μια καμπύλη $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ του $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε τότε να ορίσουμε μια νέα καμπύλη ως εξής

$$\overrightarrow{\sigma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \sigma(t) = \overrightarrow{r}(a+b-t).$$

Παρατηρούμε ότι η καμπύλη $\overrightarrow{\sigma}$ και η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ έχουν την ίδια εικόκα, δηλαδή το ίδιο ίχνος. Η διαφορά μεταξύ τους είναι ότι η καμπύλη $\overrightarrow{\sigma}$ διατρέχει το ίχνος με αντίθετη φορά σε σχέση με την καμπύλη $\overrightarrow{r}$. (Παρατηρήστε για παράδειγμα ότι για $t = a$ έχουμε $\overrightarrow{\sigma}(a) = \overrightarrow{r}(b)$, δηλαδή η $\overrightarrow{\sigma}$ ξεκινά από το πέρας της $\overrightarrow{r}$, ενώ $\overrightarrow{\sigma}(b) = \overrightarrow{r}(a)$, δηλαδή η $\overrightarrow{\sigma}$ τελειώνει στην αρχή της $\overrightarrow{r}$.)
Για το λόγο αυτό η καμπύλη $\overrightarrow{\sigma}$ ονομάζεται η **αντίθετη της καμπύλης** $\overrightarrow{r}$ και πολλές φορές συμβολίζουμε $\overrightarrow{\sigma} = -\overrightarrow{r}$.
Ωστόσο, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με αυτόν τον συμβολισμό, διότι $-\overrightarrow{r}$ δηλώνει την αντίθετη της καμπύλης $\overrightarrow{r}$. Συνεπώς, **δεν ισχύει** $(-\overrightarrow{r})(t) = -\overrightarrow{r}(t)$, αλλά $(-\overrightarrow{r})(t) = \overrightarrow{r}(a+b-t)$.
Για το ολοκλήρωμα πάνω στην αντίθετη καμπύλη ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 6.3.3. *Έστω $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1-καμπύλη και $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $-\overrightarrow{r}$ είναι η αντίθετη της καμπύλης $\overrightarrow{r}$, τότε*

$$\int_{-\overrightarrow{r}} f ds = -\int_{\overrightarrow{r}} f ds.$$

Απόδειξη.
Έχουμε

$$-\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

$$(-\overrightarrow{r})(t) = \overrightarrow{r}(a+b-t).$$

Συνεπώς, η καμπύλη $-\overrightarrow{r}$ είναι C^1 και ισχύει $(\overrightarrow{r})'(t) = -\overrightarrow{r}'(a+b-t)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{-\overrightarrow{r}} f ds &= \int_a^b f((-\overrightarrow{r})(t)) \|(-\overrightarrow{r})'(t)\| dt \\
&= -\int_a^b f(\overrightarrow{r}(a+b-t))\, \|\overrightarrow{r}'(a+b-t)\| dt \\
&\overset{a+b-t=\tau}{=} -\int_b^a f(\overrightarrow{r})\, \|\overrightarrow{r}'(\tau)\|(-d\tau) \\
&= -\int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))\, \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt \\
&= -\int_{\overrightarrow{r}} f\, ds.
\end{aligned}$$

■

Για το επικαμπύκιο ολοκλήρωμα ισχύει η επόμενη ανισότητα.

Πρόταση 6.3.4. *Έστω $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1-καμπύλη και $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύει ότι*

$$|\int_{\overrightarrow{r}} f ds| \leq \|f\|_\infty l(\overrightarrow{r}),$$

όπου $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\overrightarrow{x})| \,:\, \overrightarrow{x} \in \Gamma\}$ και $l(\overrightarrow{r})$ είναι το μήκος της καμπύλης $\overrightarrow{r}$.

Απόδειξη.
Καταρχάς, παρατηρούμε ότι, αφού η f είναι συνεχής και το ίχνος Γ της καμπύλης είναι συμπαγές, έχουμε ότι η f είναι φραγμένη. Επομένως, το $\sup\{|f(\overrightarrow{x})| \,:\, \overrightarrow{x} \in \Gamma\} = \|f\|_\infty$ είναι πραγματικός αριθμός. Τώρα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\overrightarrow{r}} f ds\right| &= \left|\int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))\, \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt\right| \\
&\leq \int_a^b |f(\overrightarrow{r}(t))|\, \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt \\
&\leq \int_a^b \|f\|_\infty \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt \\
&= \|f\|_\infty \int_a^b \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt \\
&= \|f\|_\infty l(\overrightarrow{r}).
\end{aligned}$$

■

6.4 Τι υπολογίζουμε με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους

Μέση τιμή συνάρτησης
Έστω $\overrightarrow{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1-καμπύλη και $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η **μέση τιμή** της f κατά μήκος της καμπύλης είναι

$$\overline{f} : = \frac{1}{l(\overrightarrow{r})} \int_\Gamma f ds.$$

Μάζα, Κέντρο Μάζας
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Φανταστείτε ότι η καμπύλη είναι ένα σύρμα ή ένα καλώδιο κατασκευασμένο από κάποιο υλικό. Έχουμε και μια *θετική* συνάρτηση $\delta\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε το $\delta(x,y,z)$ να μας δίνει την πυκνότητα του υλικού σε κάθε σημείο (x,y,z) της καμπύλης. Τότε η συνολική μάζα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$m = \int_\Gamma \delta ds.$$

Επιπλέον, το κέντρο μάζας της καμπύλης είναι το σημείο

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) := \frac{1}{m} \left(M_{yz}, M_{xz}, M_{xy}\right),$$

όπου οι ποσότητες M_{yz}, M_{xz} και M_{xy} ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} M_{yz} &:= \int_\Gamma x\delta \, ds \\ M_{xz} &:= \int_\Gamma y\delta \, ds \\ M_{xy} &:= \int_\Gamma z\delta \, ds. \end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι ομογενής, δηλαδή η πυκνότητα είναι σταθερή $\delta(x,y,z) = c$ για κάθε σημείο (x,y,z) της καμπύλης, τότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} m &= c \int_\Gamma ds = c \cdot l(\overrightarrow{r}) \\ M_{yz} &= c \int_\Gamma x \, ds \\ M_{xz} &= c \int_\Gamma y \, ds \\ M_{xy} &= c \int_\Gamma z \, ds. \end{aligned}$$

Το κέντρο βάρους δίνεται από

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z}):\ = \frac{1}{l(\overrightarrow{r})}\left(\int_\Gamma x\,ds, \int_\Gamma y\,ds, \int_\Gamma z\,ds\right).$$

Εμβαδό Κυλινδρικής Επιφάνειας
Θεωρούμε μια παραμετρική καμπύλη στο xy-επίπεδο, $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, και μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x,y) \geq 0$ για κάθε σημείο (x,y) της καμπύλης. Τότε σχηματίζεται στον χώρο μια κυλινδρική επιφάνεια:

$$\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x,y) \in \Gamma,\, 0 \leq z \leq f((x,y))\}.$$

Το εμβαδό $E(\Gamma,f)$ αυτής της κυλινδρικής επιφάνειας δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f. Δηλαδή,

$$E(\Gamma,f) = \int_\Gamma f ds.$$

Πρέπει βέβαια να τονίσουμε σε αυτό το σημείο ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα μετράει και τυχόν επικαλύψεις της επιφάνειας. Για παράδειγμα, αν έχουμε $\overrightarrow{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ για κάθε $t \in [0,2\pi]$, τότε η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ διατρέχει δύο φορές τον μοναδιαίο κύκλο. Αν πάρουμε $f(x,y) = 1$ για κάθε (x,y) στον μοναδιαίο κύκλο, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{\overrightarrow{r}} f ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi, \quad (\text{ αφού } \|\overrightarrow{r}'(t)\| = 2)$$

που είναι το διπλάσιο του εμβαδού της κυλινδρικής επιφάνειας με ακτίνα βάσης 1 και ύψος 1. Αυτό συμβαίνει διότι η επιφάνεια $\mathcal{M}$ που σχηματίζεται από την $\overrightarrow{r}$ και την f ουσιαστικά διατρέχει τον κύλινδρο δύο φορές.
Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν επικαλύψεις, δεν δημιουργούνται τέτοιου είδους προβλήματα. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα όταν η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι **απλή** (για τον ορισμό της απλής καμπύλης παραπέμπουμε στην Παράγραφο 6.6).

6.5 Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Διανυσματικού Πεδίου

Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή μια συνάρτηση $\overrightarrow{F}\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, για την οποία υποθέτουμε ότι είναι συνεχής. Έστω, ακόμη, μια παραμετρική C^1-καμπύλη $\overrightarrow{r}$ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού A της $\overrightarrow{F}$. Στόχος μας σε αυτήν την ενότητα είναι να ορίσουμε και να μελετήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{F}$ πάνω στην καμπύλη $\overrightarrow{r}$.

Πριν περάσουμε στους αυστηρούς ορισμούς, θα επιχειρήσουμε και πάλι μια προσέγγιση του προβλήματος παρόμοια με αυτή που κάναμε στις ενότητες 6.2 και 6.3. Στα επόμενα,

υποθέτουμε ότι διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}: A \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα πεδίο δυνάμεων, δηλαδή $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}^m$ είναι η δύναμη που θα δεχτεί ένα σώμα ή ένα φορτίο (ανάλογα με τι είδους πεδίο έχουμε, π.χ. βαρυτικό, ηλεκτρομαγνητικό) όταν βρεθεί στην θέση $\overrightarrow{x}$.
Στην πιο απλή περίπτωση, η καμπύλη είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $\overrightarrow{a}$ και πέρας $\overrightarrow{b}$, το οποίο παραμετρικοποιείται ως εξής: $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{a} + t(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$ με $t \in [0,1]$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η δύναμη $\overrightarrow{F}$ είναι σταθερή πάνω στην καμπύλη και ίση με $\overrightarrow{v}$, δηλαδή $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v}$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$. Τότε, το έργο W που παράγει η δύναμη $\overrightarrow{F}$ όταν ένα σώμα μετατοπίζεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα είναι εξ' ορισμού το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης επί την μετατόπιση. Δηλαδή $W = \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$. Επειδή $\overrightarrow{r}'(t) = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ για κάθε $t \in [0,1]$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$W = \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r}'(t).$$

Έστω τώρα ότι η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι μια πολυγωνική γραμμή:

$$\Pi = [\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_1}] \cup [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}] \cup \ldots [\overrightarrow{a_{N_1}}, \overrightarrow{a_N}]$$

και ότι το πεδίο δυνάμεων $\overrightarrow{F}$ είναι σταθερό σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα (μπορεί όμως να διαφέρει από τμήμα σε τμήμα). Δηλαδή, $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v_i}$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in [\overrightarrow{a_{i-1}}, \overrightarrow{a_i}]$. Τότε το συνολικό έργο είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους έργων. Συνεπώς

$$W = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{v_i} \cdot (\overrightarrow{a_i} - \overrightarrow{a_{i-1}}).$$

Αν για κάθε $i = 1, 2, \ldots, N$ επιλέξουμε t_i ώστε το αντίστοιχο σημείο $\overrightarrow{r}(t_i)$ να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{a_{i-1}}, \overrightarrow{a_i}]$, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$W = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t_i)) \cdot (\overrightarrow{r}'(t_i)).$$

Διαισθητικά τώρα, αν η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι μια τυχαία καμπύλη και το πεδίο $\overrightarrow{F}$ δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο, τότε για να υπολογίσουμε το έργο, θα αλλάξουμε στην τελευταία σχέση το άθροισμα σε ολοκλήρωμα και το σημείο $\overrightarrow{r}(t)$ θα διατρέχει όλη την καμπύλη. Δηλαδή

$$W = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt.$$

Έτσι, καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 6.5.1. *Εστω $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια C^1-καμπύλη με ίχνος Γ και $\overrightarrow{F}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση. Το* **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** *της $\overrightarrow{F}$ πάνω στην καμπύλη $\overrightarrow{r}$ ορίζεται ως εξής:*

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ λέγεται και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα **δευτέρου είδους**.

(Τονίζουμε και πάλι εδώ, ότι $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))$ και $\overrightarrow{r}'(t)$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, επομένως $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων.)

Πρόταση 6.5.2. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{F}$ πάνω σε μια C^1-καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι ανεξάρτητο από την παραμέτρηση της καμπύλης.*

Απόδειξη.
Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης της Πρότασης 6.3.2. Έστω $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ η C^1-καμπύλη και $\overrightarrow{F}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^n$ η συνεχής συνάρτηση. Παίρνουμε μια αναπαραμέτρηση της καμπύλης:

$$\overrightarrow{\sigma}\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$$
$$\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{r} \circ \phi$$

όπου $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ C^1-συνάρτηση, γνησίως αύξουσα και επί. Τότε έχουμε

$$\overrightarrow{\sigma}'(t) = \overrightarrow{r}'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \qquad \text{για κάθε } t \in [c,d].$$

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\overrightarrow{F}$ πάνω στην καμπύλη $\overrightarrow{\sigma}$ είναι

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_c^d \overrightarrow{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt \\
&= \int_c^d \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(\phi(t))) \cdot \overrightarrow{r}'(\phi(t))\,\phi'(t)dt \\
&\overset{\phi(t)=\tau}{=} \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(\tau)) \cdot \overrightarrow{r}'(\tau)d\tau \\
&= \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε πράγματι ότι

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\sigma} = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

■

Πρόταση 6.5.3. *Έστω* $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1*-καμπύλη και* $\overrightarrow{F} : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *συνεχής συνάρτηση. Αν* $-\overrightarrow{r}$ *είναι η αντίθετη της καμπύλης* $\overrightarrow{r}$*, τότε*

$$\int_{\Gamma(\overrightarrow{r})} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{\Gamma(\overrightarrow{r})} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Απόδειξη.
Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης της Πρότασης 6.3.3. Έχουμε

$$-\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

$$(-\overrightarrow{r})(t) = \overrightarrow{r}(a+b-t).$$

Συνεπώς, η καμπύλη $-\overrightarrow{r}$ είναι C^1 και ισχύει $(\overrightarrow{r})'(t) = -\overrightarrow{r}'(a+b-t)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(-\overrightarrow{r})} \overrightarrow{F} \cdot d(-\overrightarrow{r}) &= \int_a^b \overrightarrow{F}((-\overrightarrow{r})(t)) \cdot (-\overrightarrow{r})'(t)dt \\
&= -\int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(a+b-t)) \cdot \overrightarrow{r}'(a+b-t)dt \\
&\overset{a+b-t=\tau}{=} -\int_b^a \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{r}'(\tau)(-d\tau) \\
&= -\int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt \\
&= -\int_{\Gamma(\overrightarrow{r})} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.
\end{aligned}$$

■

Πρόταση 6.5.4. *Έστω* $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1*-καμπύλη και* $\overrightarrow{F} : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύει ότι*

$$\left| \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \right| \leq \|\overrightarrow{F}\|_\infty l(\overrightarrow{r}),$$

όπου $\|\overrightarrow{F}\|_\infty = \sup\{\|\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})\| \ : \ \overrightarrow{x} \in \Gamma\}$ *και* $l(\overrightarrow{r})$ *είναι το μήκος της καμπύλης* $\overrightarrow{r}$*.*

Απόδειξη.
Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης της Πρότασης 6.3.4. Καταρχάς, από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz παρατηρούμε ότι,

$$\left|\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\right| \leq \|\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\| \|\overrightarrow{r}'(t)\|$$

για κάθε $t \in [a,b]$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}\right| &= \left|\int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)|dt \\ &\leq \int_a^b \|\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\| \, \|\overrightarrow{r}'(t)\|dt \\ &\leq \int_a^b \|\overrightarrow{F}\|_\infty \|\overrightarrow{r}'(t)\|dt \\ &= \|\overrightarrow{F}\|_\infty \int_a^b \|\overrightarrow{r}'(t)\|dt \\ &= \|\overrightarrow{F}\|_\infty l(\overrightarrow{r}).\end{aligned}$$

■

Συμβολισμοί
Στην περίπτωση που δουλεύουμε στο $\mathbb{R}^2$, για μια καμπύλη $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ συμβολίζουμε τις συντεταγμένες συναρτήσεις $\overrightarrow{(}t) = (x(t), y(t))$. Επίσης, για μια συνάρτηση $\overrightarrow{F}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^2$, γράφουμε συνήθως $\overrightarrow{F} = (P, Q)$. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ συμβολίζεται πολλές φορές με $\int_\Gamma Pdx + Qdy$. Έχουμε δηλαδή

$$\begin{aligned}\int_\Gamma Pdx + Qdy &= \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \\ &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt \\ &= \int_a^b (P(\overrightarrow{r}(t)), Q(\overrightarrow{r}(t)) \cdot (x'(t), y'(t))dt \\ &= \int_a^b (P(\overrightarrow{r}(t))x'(t) + Q(\overrightarrow{r}(t))y'(t))\, dt.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_a^b \Big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\Big)dt.$$

Ομοίως, αν δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^3$, τότε μια καμπύλη $\overrightarrow{r}$ συμβολίζεται συνήθως με $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και μια συνάρτηση $\overrightarrow{F}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$ συμβολίζεται με $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ συμβολίζεται τότε με $\in_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$. Όπως προηγουμένως, μπορούμε να δούμε ότι

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \Big(P(\overrightarrow{r}(t))x'(t) + Q(\overrightarrow{r}(t))y'(t) + R(\overrightarrow{r}(t))z'(t) \Big) dt.$$

Παρατηρήσεις. θα δούμε τώρα κάποιες παρατηρήσεις σε σχέση με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Υποθέτουμε ότι $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ είναι C^1-καμπύλη και $\overrightarrow{F} : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ συνεχές διανυσματικό πεδίο.

Περίπτωση (1) Έστω ότι το διανυσματικό πεδίο είναι κάθετο στην καμπύλη. Δηλαδή $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \perp \overrightarrow{r}'(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Τότε $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) = 0$ για κάθε $t \in [a,b]$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

Δηλαδή, το έργο που παράγει μια δύναμη κάθετη στη μετατόπιση είναι πάντα ίσο με μηδέν.

Περίπτωση (2) Θα δούμε τώρα την άλλη ακραία περίπτωση, όταν δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))$ και $\overrightarrow{r}'(t)$ είναι συγγραμικά και μάλιστα ομόρροπα για κάθε $t \in [a,b]$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $t \in [a,b]$ υπάρχει $\lambda(t) \geq 0$ ώστε $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \lambda(t)\, \overrightarrow{r}'(t)$. Τότε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\overrightarrow{F}$ πάνω στην καμπύλη $\overrightarrow{r}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) dt \\
&= \int_a^b \lambda(t) \overrightarrow{r}'(t) \cdot \overrightarrow{r}'(t) dt \\
&= \int_a^b \lambda(t) \| \overrightarrow{r}'(t) \|^2 dt.
\end{aligned}$$

Ειδικά, αν ισχύει $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$ και πάρουμε $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))$ να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της ταχύτητας, δηλαδή $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}$, τότε από την παραπάνω σχέση παίρνουμε (για $\lambda(t) = \frac{1}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}$):

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt = l(\overrightarrow{r}).$$

Όπου $l(\overrightarrow{r})$ είναι το μήκος της καμπύλης. Συνεπώς, αν $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$ για κάθε t, τότε

$$l(\overrightarrow{r}) = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r},$$

όπου $\overrightarrow{F}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της ταχύτητας, $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}$.

Σχέση Επικαμπυλίων Ολοκληρωμάτων για Λείες Καμπύλες

Ορισμός 6.5.5. *Έστω $\overrightarrow{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1-καμπύλη. Η καμπύλη λέγεται* **λεία** *αν ισχύει $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a.b]$.*

Στόχος μας σε αυτήν την υποενότητα είναι να δούμε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ που ορίσαμε προηγουμένως και των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων βαθμωτών πεδίων, τα οποία ορίσαμε στην Παράγραφο 6.3.
Έστω λοιπόν $\overrightarrow{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχές διανυσματικό πεδίο, ώστε η καμπύλη Γ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού A του πεδίου. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) dt \overset{\overrightarrow{r}'(t) \neq 0}{=} \int_a^b \Big(\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}\Big) \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \big(\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{T}\big) \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt = \int_\Gamma \big(\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{T}\big) ds,\end{aligned}$$

όπου $\overrightarrow{T}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της ταχύτητας, δηλαδή $\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}$. Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στην λεία καμπύλη Γ είναι ίσο με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του αριθμητικού πεδίου $\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{T}$ πάνω στην ίδια καμπύλη.

6.6 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συντηρητικού διανυσματικού πεδίου

Καταρχάς, δίνουμε κάποιους ορισμούς που αφορούν καμπύλες.

Ορισμός 6.6.1. *Έστω $\overrightarrow{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^n$. Η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ λέγεται* **κλειστή** *αν ισχύει $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.*

Κλειστές καμπύλες είναι για παράδειγμα ο κύκλος, η έλλειψη, ένα οχτώ ζωγραφισμένο στο επίπεδο. Ένα ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_1}]$ με $\overrightarrow{a_0} \neq \overrightarrow{a_1}$ είναι μια μη κλειστή καμπύλη.

Ορισμός 6.6.2. *Μια παραμετρική καμπύλη $\overrightarrow{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ λέγεται* **απλή** *αν η $\overrightarrow{r}$ είναι 1-1 στο $[a,b)$, δηλαδή $\overrightarrow{r}(t_1) \neq \overrightarrow{r}(t_2)$ για κάθε $t_1 \neq t_2$ στο $[a,b)$.*

Απλές καμπύλες είναι για παράδειγμα ο κύκλος, η έλλειψη καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_1}]$. Μια καμπύλη σε σχήμα οκτώ δεν είναι απλή καμπύλη.

Ορισμός 6.6.3. *Μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ που είναι απλή και κλειστή λέγεται* **καμπύλη Jordan**.

Για παράδειγμα, ένας κύκλος ή μια έλλειψη στο επίπεδο είναι καμπύλες Jordan.

Για τις καμπύλες Jordan ισχύει το επόμενο θεώρημα. Διαισθητικά, το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο. Ωστόσο, η απόδειξη του θεωρήματος είναι πολύπλοκη και βρίσκεται έξω από τα πλαίσια αυτών των σημειώσεων.

Θεώρημα 6.6.4. *Μια καμπύλη Jordan Γ χωρίζει το επίπεδο σε δύο συνιστώσες (κομμάτια). Η μία συνιστώσα είναι φραγμένη και λέγεται το **εσωτερικό** της καμπύλης (συμβολίζουμε εσΓ και η άλλη συνιστώσα είναι μη φραγμένη και λέγεται το **εξωτερικό** της καμπύλης (συμβολίζουμε εξΓ). Τα σύνολα εσΓ και εξΓ έχουν κοινό σύνορο που δεν είναι άλλο από την ίδια την καμπύλη.*

Έστω Γ μια καμπύλη Jordan. Αν διατρέχουμε την καμπύλη Γ με τέτοια φορά ώστε το εσωτερικό της να βρίσκεται στα αριστερά μας, τότε λέμε ότι η καμπύλη Γ είναι *θετικά προσανατολισμένη* (ως προς το εσωτερικό της). Συνήθως, συμβολίζουμε με Γ^+ για να δείξουμε ότι η Γ είναι θετικά προσανατολισμένη. Αν διατρέχουμε την καμπύλη Γ με αντίθετη φορά, τότε συμβολίζουμε με Γ^- και λέμε ότι η Γ είναι αρνητικά προσανατολισμένη (ως προς το εσωτερικό της).

Επιστρέφουμε τώρα στα επικαμπύλια ολοκληρώματα. Στόχος της ενότητας είναι να αποδείξουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός συντηρητικού διανυσματικού πεδίου. Υπενθυμίζουμε πρώτα τον ορισμό.
Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\overrightarrow{F}\colon A \to \mathbb{R}^n$ ένα διανυσματικό πεδίο. Το πεδίο $\overrightarrow{F}$ καλείται συντηρητικό αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{F} = \nabla f$ στο A.
(*Παρατήρηση.* Για να μιλήσουμε για ολοκλήρωμα, πρέπει η συνάρτηση $\overrightarrow{F}$ να είναι συνεχής. Σε αυτήν την περίπτωση, προκύπτει ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και επομένως είναι τάξης C^1.)

Θεώρημα 6.6.5. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\overrightarrow{F}\colon A \to \mathbb{R}^n$ συντηρητικό διανυσματικό πεδίο και $f\colon A \to \mathbb{R}$ C^1-συνάρτηση ώστε $\overrightarrow{F} = \nabla f$ στο A. Αν $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to A$ είναι μια C^1-καμπύλη μέσα στο A, τότε ισχύει*

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = f\left(\overrightarrow{r}(b)\right) - f\left(\overrightarrow{r}(a)\right).$$

Ειδικότερα, για κάθε κλειστή καμπύλη μέσα στο A έχουμε $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$.

Απόδειξη.
Από τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος έχουμε

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt = \int_a^b \nabla f(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt. \qquad (*)$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$g = f \circ \overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Η g είναι C^1 ως σύνθεση δύο C^1 συναρτήσεων. Επιπλέον, από τον κανόνα της αλυσίδας γνωρίζουμε ότι για κάθε $t \in [a,b]$ ισχύει

$$g'(t) = \nabla f(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t).$$

Επομένως, η $(*)$ γίνεται

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b g'(t)dt$$

και από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού προκύπτει

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(\overrightarrow{r}(b)) - f(\overrightarrow{r}(a))$$

που είναι το ζητούμενο.

Αν η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι κλειστή, τότε $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{r}(b)$ και άρα

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = f(\overrightarrow{r}(b)) - f(\overrightarrow{r}(a)) = 0.$$

■

Σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε αποδείξει ότι αν ένα C^1 διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό, τότε είναι και αστρόβιλο. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για να το δείξουμε θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα και το προηγούμενο θεώρημα.

Πόρισμα 6.6.6. *Το αστρόβιλο, C^∞ διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0\right)$ $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \,:\, z \in \mathbb{R}\}$ δεν είναι συντηρητικό.*

Απόδειξη.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε αποδείξει ότι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο. Θα δούμε τώρα ότι δεν είναι συντηρητικό.

Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο στο xy-επίπεδο: $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ με $t \in [0, 2\pi]$. Αν το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το ολοκλήρωμα

$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ οφείλει να είναι ίσο με 0. Όμως, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\cos t, \sin t, 0)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-1)dt = -2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Άρα, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ δεν είναι συντηρητικό. ■

6.7 Ασκήσεις

6.7.1 Μήκος καμπύλης

Άσκηση 6.7.1. *Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = a^2\}$, όπου $a > 0$.*

Λύση. Η καμπύλη Γ που μας δίνεται είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα a. Μια παραμέτρηση αυτού του κύκλου είναι

$$\overrightarrow{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, a\sin t).$$

Η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι C^∞ (και άρα C^1) και ισχύει $\overrightarrow{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$. Επομένως,

$$\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2} = a.$$

Άρα, το μήκος της καμπύλης Γ είναι

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \|\overrightarrow{r}'(t)\|dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a.$$

(Όπως αναμενόταν, προέκυψε το γνωστό μας αποτέλεσμα για το μήκος κύκλου ακτίνας a.) ■

Άσκηση 6.7.2. *Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$, όπου $a > b > 0$.*

Λύση. Η καμπύλη Γ είναι μια έλλειψη. Μια παραμέτρηση αυτής της καμπύλης είναι

$$\overrightarrow{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Η $\overrightarrow{r}$ είναι C^∞ (και άρα C^1) με $\overrightarrow{r}'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$. Συνεπώς,

$$\|\overrightarrow{r}(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.$$

Άρα, το μήκος της καμπύλης Γ είναι

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} dt$$

■

Άσκηση 6.7.3. *Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης Γ που είναι το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{2}$ με $x \in [0, a]$ (όπου $a > 0$).*

Λύση. Όπως έχουμε πει (Παράγραφος 3.2), το γράφημα μιας συνάρτησης f μπορεί να παραμετρικοποιηθεί εύκολα ως εξής:

$$\overrightarrow{r} : [0, a] \to \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto \overrightarrow{r}(x) = (x, f(x)) = \left(x, \frac{x^2}{2}\right).$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2}$ είναι απεριόριστα διαφορίσιμη, έχουμε ότι η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι C^∞ (και άρα C^1) και μάλιστα ισχύει $\overrightarrow{r}'(x) = (1, x)$. Άρα,

$$\|\overrightarrow{r}'(x)\| = \sqrt{1 + x^2}.$$

Επομένως, το μήκος της καμπύλης Γ είναι

$$\ell(\Gamma) = \int_0^a \|\overrightarrow{r}'(x)\| \, dx = \int_0^a \sqrt{1 + x^2} \, dx.$$

Γνωρίζουμε από τον Λογισμό συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $x + \sqrt{1 + x^2} = u$. Με αυτήν την αλλαγή μεταβλητής, προκύπτει ότι

$$x + \sqrt{1 + x^2} = u \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} = u - x \Leftrightarrow 1 + x^2 = u^2 - 2ux + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} dx =&\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du \\ \sqrt{1+x^2} =&u-x=u-\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right). \end{aligned}$$

Επιπλέον, για $x=0$ έχουμε $u=1$ και για $x=a$ έχουμε $u=a+\sqrt{1+a^2}$. Συνεπώς, το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{1+x^2}dx =& \int_1^{a+\sqrt{1+a^2}} \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du \\ =&\frac{1}{4}\int_1^{a+\sqrt{1+a^2}}\left(u+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3}\right)du \\ =&\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}u^2+2\ln u-\frac{1}{2u^2}\right]_{u=1}^{a+\sqrt{1+a^2}} \\ =&\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(a+\sqrt{1+a^2})^2+2\ln(a+\sqrt{1+a^2})-\frac{1}{2(a+\sqrt{1+a^2})^2}\right] \\ =&\frac{1}{4}\left[2\ln(a+\sqrt{1+a^2})+\frac{1}{2}(a+\sqrt{1+a^2})^2-\frac{1}{2}(a-\sqrt{1+a^2}\right] \\ =&\frac{1}{4}\left[2\ln(a+\sqrt{1+a^2})+\frac{1}{2}(2a)(2\sqrt{1+a^2})\right] \\ =&\frac{1}{2}\left[\ln(a+\sqrt{1+a^2})+a\sqrt{1+a^2}\right] \end{aligned}$$

■

Άσκηση 6.7.4. *Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης Γ η οποία παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r}(\theta)=(e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\sin\theta)$ με $\theta\in[\gamma,+\infty)$.*

Λύση. Η παραμέτρηση της καμπύλης μας δίνεται έτοιμη, παρατηρούμε όμως ότι το διάστημα της παραμέτρησης είναι το (μη φραγμένο) $[\gamma,\infty)$. Ωστόσο, αυτό το γεγονός δεν θα επηρεάσει, όπως θα δούμε, τη λύση της άσκησης. Προχωρούμε αμέσως στην εύρεση της παραγώγου. Η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι C^1 και εύκολα υπολογίζουμε

$$\overrightarrow{r}'(\theta)=\left(-e^{-\theta}(\cos\theta+\sin\theta), e^{-\theta}(\cos\theta-\sin\theta)\right).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{r}'(\theta)\| =&\sqrt{e^{-2\theta}(\cos\theta+\sin\theta)^2+\varepsilon^{2\theta}(\cos\theta-\sin\theta)^2} \\ =&\sqrt{e^{-2\theta}(\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta} \\ =&\sqrt{e^{-2\theta}\,2}=\sqrt{2}\,e^{-\theta}. \end{aligned}$$

Άρα, το μήκος της καμπύλης είναι

$$\begin{aligned}\ell(\Gamma) &= \int_\gamma^\infty \|\overrightarrow{r}'(\theta)\|\, d\theta = \int_\gamma^\infty \sqrt{2}\, e^{-\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\int_\gamma^\infty e^{-\theta}\, d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_\gamma^\infty -\left(e^{-\theta}\right)'\, d\theta = -\sqrt{2}\left[e^{-\theta}\right]_\gamma^\infty = -\sqrt{2}(0-e^{-\gamma}) = \sqrt{2}e^{-\gamma}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η καμπύλη έχει μήκος $\ell(\Gamma) = \sqrt{2}\, e^{-\gamma}$ (πεπερασμένο). ■

Σχόλιο. Για να είμαστε πιο τυπικοί, το ολοκλήρωμα $\int_\gamma^\infty e^{-\theta}$ που εμφανίστηκε στον παραπάνω υπολογισμό είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα και η τιμή του ορίζεται ως εξής

$$\int_\gamma^\infty e^{-\theta} = \lim_{M\to\infty}\int_\gamma^M e^{-\theta},$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι το όριο υπάρχει. Επομένως, υπολογίζουμε

$$\int_\gamma^\infty e^{-\theta} = \lim_{M\to\infty}\int_\gamma^M e^{-\theta} = \lim_{M\to\infty} -\left[e^{-\theta}\right]_\gamma^M = \lim_{M\to\infty} -\left(e^{-M}-e^{-\gamma}\right) = e^{-\gamma}.$$

6.7.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτού πεδίου

Άσκηση 6.7.5. *Δίνεται η καμπύλη $\overrightarrow{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ με $t \in [0,\pi]$. Η πυκνότητα σε κάθε σημείο της καμπύλης είναι $\delta(x,y,z) = e^z$ για κάθε $(x,y,z) \in \Gamma = \overrightarrow{r}([0,\pi])$. Να βρεθούν:*

(i) Η συνολική μάζα m της καμπύλης.

(ii) Οι ροπές M_{yz}, M_{xz} και M_{xy}.

(iii) Το κέντρο βάρους της καμπύλης.

Λύση. Η παραμέτρηση της καμπύλης μας δίνεται έτοιμη. Παρατηρούμε ότι η $\overrightarrow{r}$ είναι C^1 και εύκολα υπολογίζουμε $\overrightarrow{r}'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Επομένως

$$\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1^2} = \sqrt{2}.$$

(i) Η συνολική μάζα m είναι ίση με το ολοκλήρωμα της πυκνότητας. Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} m &= \int_\Gamma \delta(x,y,z)\, ds = \int_0^\pi \delta(\overrightarrow{r}(t))\, \|\overrightarrow{r}'(t)\|\, dt = \int_0^\pi \delta(\sin t, \cos t, t)\sqrt{2}\, dt \\ &= \int_0^\pi e^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[e^t\right]_{t=0}^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1).\end{aligned}$$

(ii) Υπολογίζουμε τώρα τις ροπές.

$$M_{yz} = \int_\Gamma x\delta(x,y,z)\,ds = \int_0^\pi \sin t \cdot e^t \cdot \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^\pi \sin t \cdot e^t\,dt.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση (δύο φορές):

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin t \cdot e^t\,dt &= \int_0^\pi \sin t \cdot \left(e^t\right)'\,dt = \left[\sin t \cdot e^t\right]_{t=0}^\pi - \int_0^\pi \cos t \cdot e^t\,dt\\ &= -\int_0^\pi \cos t \cdot e^t\,dt = -\int_0^\pi \cos t\left(e^t\right)'\,dt\\ &= -\left[\cos t \cdot e^t\right]_{t=0}^\pi + \int_0^\pi (-\sin t)e^t dt\\ &= -\left(-e^\pi - 1\right) - \int_0^\pi \sin t \cdot e^t\,dt.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$2\int_0^\pi \sin t \cdot e^t\,dt = e^\pi + 1 \Rightarrow \int_0^\pi \sin t \cdot e^t\,dt = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

Άρα, έχουμε τελικά ότι

$$M_{yz} = \sqrt{2} \cdot \frac{e^\pi + 1}{2} = \frac{e^\pi + 1}{\sqrt{2}}.$$

Ομοίως υπολογίζουμε

$$M_{xz} = \int_\Gamma y\,\delta(x,y,z)\,ds = \int_0^\pi \cos t \cdot e^t\,\|\overrightarrow{r}'(t)\|\,dt = \sqrt{2}\int_0^\pi \cos t \cdot e^t\,dt.$$

Αν κοιτάξουμε τον υπολογισμό που κάναμε προηγουμένως με την παραγοντική ολοκλήρωση, βλέπουμε ότι από τις δύο πρώτες γραμμές προκύπτει:

$$\int_0^\pi \cos t \cdot e^t\,dt = -\int_0^\pi \sin t \cdot e^t\,dt.$$

(Αν κάποιος δεν κάνει αυτήν την παρατήρηση, μπορεί να υπολογίσει το ολοκλήρωμα με δύο φορές ολοκλήρωση κατά μέρη.)
Επομένως, $\int_0^\pi \cos t \cdot e^t\,dt = \frac{-e^\pi - 1}{2}$, και άρα:

$$M_{xz} = \sqrt{2} \cdot \frac{-e^\pi - 1}{2} = -\frac{e^\pi + 1}{\sqrt{2}}.$$

Τέλος, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}M_{xy} &= \int_\Gamma z\delta(x,y,z)\,ds = \int_0^\pi t \cdot e^t \cdot \|\overrightarrow{r}'(t)\|\,dt = \sqrt{2}\int_0^\pi t \cdot \left(e^t\right)'\,dt\\ &= \sqrt{2}\Big[\left[te^t\right]_{t=0}^\pi - \int_0^\pi e^t\,dt\Big] = \sqrt{2}\Big(\pi e^\pi - (e^\pi - 1)\Big) = \sqrt{2}\Big((\pi - 1)e^\pi + 1\Big).\end{aligned}$$

(iii) Το κέντρο βάρους της καμπύλης είναι εξ' ορισμού το σημείο

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{m}\left(M_{yz}, M_{xz}, M_{xy}\right).$$

Αντικαθιστώντας από τα ερωτήματα *(i)* και *(ii)* παίρνουμε

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}(e^{\pi}-1)}\left(\frac{e^{\pi}+1}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{\pi}+1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\left((\pi-1)e^{\pi}+1\right)\right)$$

■

Άσκηση 6.7.6. *Δίνεται η κυλινδρική επιφάνεια με βάση $x^2+y^2=1$ όπου $x, y \geq 0$, και ύψος $f(x,y)=xy$. Να υπολογίσετε το εμβαδό της κυλινδρικής επιφάνειας.*

Λύση. Η καμπύλη Γ που αποτελεί τη βάση της κυλινδρικής επιφάνειας είναι το κομμάτι του μοναδιαίου κύκλου που περιέχεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Συνεπώς, μια παραμέτρηση της καμπύλης αυτής είναι

$$\overrightarrow{r}: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Επομένως, $\overrightarrow{r}'(t) = (-\sin t, \cos t))$ και $\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$.
Το ζητούμενο εμβαδό της κυλινδρικής επιφάνειας δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f κατά μήκος της Γ. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
E &= \int_{\Gamma} f(x,y)\, ds = \int_0^{\pi/2} f(\overrightarrow{r}(t))\, \|\overrightarrow{r}'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t, \sin t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt \qquad (\text{ισχύει ότι } \sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} -\frac{1}{2}(\cos 2t)'\, dt \\
&= -\frac{1}{4}\Big[\cos 2t\Big]_{t=0}^{\pi/2} = -\frac{1}{4}\cdot(-2) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■

6.7.3 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα Διανυσματικού Πεδίου

Άσκηση 6.7.7. *Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* $W = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, *για την καμπύλη* $\overrightarrow{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$ *με* $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *και τη συνάρτηση*

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, \sqrt[3]{xy}).$$

Λύση. Η παραμέτρηση της καμπύλης $\overrightarrow{r}$ μας δινεται έτοιμη. Η καμπύλη είναι C^∞ (και άρα C^1). Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$\overrightarrow{r}'(t) = \left(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t, 1\right).$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\overrightarrow{F}\Big(\overrightarrow{r}(t)\Big) = \overrightarrow{F}\left(\cos^3 t, \sin^3 t, t\right) = \left(\sin t, \cos t, \sqrt[3]{\cos^3 t \sin^3 t}\right) = (\sin t, \cos t, \cos t \sin t)\,.$$

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
W &= \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t, \cos t, \cos t \sin t) \cdot \left(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t, 1\right)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-3\cos^2 t \sin^2 t + 3\sin^2 t \cos^2 t + \cos t \sin t\right)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt \qquad (\text{ισχύει } \sin 2t = 2\sin t \cos t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)}{2}(\cos 2t)'\, dt = \frac{-1}{4}\Big[\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{-1}{4}\Big(\cos\pi - \cos 0\Big) = \frac{-1}{4}(-2) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 6.7.8. *Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* $W_i = \int_{\Gamma_i} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, *για το διανυσματικό πεδίο* $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{F}(x, y) = (y, -x)$ *πάνω στις ακόλουθες καμπύλες:*

(i) *Στην καμπύλη* Γ_1 *που είναι το ευθύγραμμο τμήμα* $[(0,0), (1,1)]$ *με αρχή το σημείο* $(0,0)$ *και πέρας το σημείο* $(1,1)$.

(ii) *Στην καμπύλη* Γ_2 *με παραμέτρηση* $\vec{r_2}(t) = (t, t^2)$ *και* $t \in [0,1]$. *(Η καμπύλη* $\vec{r_2}$ *είναι τμήμα παραβολής.)*

(iii) *Στην καμπύλη* Γ_3 *με παραμέτρηση* $\vec{r_3}(t) = (\cos t, \sin t)$ *και* $t \in [0, 2\pi]$. *(Η καμπύλη* $\vec{r_3}$ *είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο* xy*-επίπεδο.)*

Τι παρατηρείτε;

Λύση.
(i) Το ευθύγραμμο τμήμα Γ_1 με αρχή το σημείο $\vec{a} = (0,0)$ και πέρας το σημείο $\vec{b} = (1,1)$ παραμετρικοποιείται από την συνάρτηση $\vec{r_1}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με

$$\vec{r_1}(t) = (1-t)\vec{a} + t\,\vec{b} = (1-t)(0,0) + t(1,1) = (t,t).$$

Η $\vec{r_1}$ είναι προφανώς C^∞ και η παράγωγός της είναι

$$\vec{r_1}'(t) = (1,1).$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\vec{F}\,(\vec{r_1}(t)) = \vec{F}\,(t,t) = (t,-t).$$

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\Big(\vec{r_1}(t)\Big) \cdot \vec{r_1}(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (t,-t)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 (t-t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0. \end{aligned}$$

(ii) Η παραμέτρηση της καμπύλης μας δίνεται έτοιμη:

$$\begin{aligned} \vec{r_2}\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ \vec{r_2}(t) &= (t,t^2). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $\vec{r_2}$ είναι C^∞ με παράγωγο

$$\vec{r_2}'(t) = (1, 2t) \quad \text{για κάθε } t \in [0,1].$$

Επίσης, έχουμε

$$\vec{F}\Big(\vec{r_2}(t)\Big) = \vec{F}(t,t^2) = (t^2,-t).$$

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\Big(\vec{r_2}(t)\Big) \cdot \vec{r_2}'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2,-t)\cdot(1,2t)\,dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 2t^2)\,dt = \int_0^1 -t^2\,dt = \frac{-1}{3}\Big[t^3\Big]_0^1 = \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

(iii) Η παραμέτρηση της καμπύλης μας δίνεται έτοιμη. Παρατηρούμε ότι η $\overrightarrow{r_3}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, είναι C^∞ με παράγωγο

$$\overrightarrow{r_3}'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi].$$

Επίσης, έχουμε

$$\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r_3}(t)\right) = \overrightarrow{F}(\cos t, \sin t) = (\sin t, -\cos t).$$

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r_3}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r_3}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-1)\, dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς, μπορούμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα.
(α) Οι καμπύλες Γ_1 και Γ_2 έχουν την ίδια αρχή (το σημείο $(0,0)$) και το ίδιο πέρας (το σημείο $(1,1)$). Παρόλα αυτά βλέπουμε ότι $W_1 \neq W_2$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ εξαρτάται και από την καμπύλη και όχι μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο.
(β) Η καμπύλη Γ_3 είναι μια κλειστή καμπύλη. Παρόλα αυτά το ολοκλήρωμα $W_3 \neq 0$.

Από τα **(α)** και **(β)** και με τη βοήθεια του Θεωρήματος 6.6.5 συμπεραίνουμε ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι μη συντηρητικό. (**Προσοχή:** αρκεί μόνο το **(α)** ή μόνο το **(β)** για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα. Απλώς, η συγκεκριμένη άσκηση μας ζητά να υπολογίσουμε και τα τρία ολοκληρώματα.) Συνεπώς δεν υπάρχει C^1 συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x \quad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

■

Άσκηση. Μπορείτε να αποδείξετε με άλλο τρόπο ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση f;

Άσκηση 6.7.9. *Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $W_i = \int_{\Gamma_i} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ του πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στις καμπύλες Γ_1, Γ_2 και Γ_3 της προηγούμενης άσκησης. Τι παρατηρείτε;*

Λύση. (i) Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα πάνω στην καμπύλη Γ_1. Γνωρίζουμε από την προηγούμενη άσκηση ότι η Γ_1 παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r_1}(t) = (t,t)$, $t \in [0,1]$ και ισχύει $\overrightarrow{r_1}'(t) = (1,1)$. Επιπλέον, έχουμε

$$\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r_1}(t)\right) = \overrightarrow{F}(t,t) = (2t^2, t^2 + 3t^2) = (2t^2, 4t^2) = t^2(2,4).$$

Επομένως,

$$W_1 = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 \overrightarrow{F}\Big(\overrightarrow{r_1}(t)\Big) \cdot \overrightarrow{r_1}'(t)\,dt = \int_0^1 t^2(2,4)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 6t^2\,dt = 2.$$

(ii) Η καμπύλη Γ_2 παραμετρικοποείται από την $\overrightarrow{r_2}(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$ και ισχύει $\overrightarrow{r_2}'(t) = (1, 2t)$. Επιπλέον, έχουμε

$$\overrightarrow{F}\Big(\overrightarrow{r_2}(t)\Big) = \overrightarrow{F}(t, t^2) = (2t^3, t^2 + 3t^4).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 \overrightarrow{F}\Big(\overrightarrow{r_2}(t)\Big) \cdot \overrightarrow{r_2}'(t)\,dt = \int_0^1 (2t^3, t^2+3t^4)\cdot(1,2t)\,dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 + 2t^3 + 6t^5)\,dt = \int_0^1 (4t^3 + 6t^5)\,dt = \Big[t^4 + t^6\Big]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

(iii) Η καμπύλη Γ_3 παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r_3}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, και ισχύει $\overrightarrow{r_3}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Επιπλέον, έχουμε

$$\overrightarrow{F}\Big(\overrightarrow{r_3}(t)\Big) = \overrightarrow{F}(\cos t, \sin t) = (2\cos t \sin t, \cos^2 t + 3\sin^2 t) = (2\sin t\cos t, 1 + 2\sin^2 t).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\Big(\overrightarrow{r_3}(t)\Big) \cdot \overrightarrow{r_3}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2\sin t\cos t, 1 + 2\sin^2 t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t\cos t + \cos t + 2\sin^2 t\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos t\,dt = \Big[-\sin t\Big]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς, διαπιστώνουμε ότι:
(α) οι καμπύλες Γ_1 και Γ_2 έχουν την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος και ισχύει $\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.
(β) Η καμπύλη Γ_3 είναι κλειστή και ισχύει $\int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$.

Από τα **(α)** και **(β)** **ΔΕΝ** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό!! Αξίζει να σημειώσουμε και να θυμόμαστε ότι ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 6.6.5. Ειδικότερα, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.7.10. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο και $\overrightarrow{F}: A \to \mathbb{R}^2$ συνεχές διανυσματικό πεδίο. Αν για κάθε κλειστή C^1 καμπύλη Γ μέσα στο σύνολο A ισχύει ότι $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$, τότε υπάρχει C^1 συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{F} = \nabla f$ στο A. (Με άλλα λόγια το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό.)*

Ωστόσο το προηγούμενο θεώρημα δεν μας βοηθάει να συμπεράνουμε ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ της άσκησης είναι συντηρητικό. Ο λόγος είναι ότι έχουμε θεωρήσει κάποιες συγκεκριμένες καμπύλες. Για να συμπεράνουμε ότι το πεδίο είναι συντηρητικό πρέπει να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα πάνω σε **κάθε** κλειστή καμπύλη είναι ίσο με 0. Φυσικά, δεν θα κάνουμε κάτι τέτοιο καθώς στην συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να αποδειχθεί ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό με σχετικά απλό τρόπο.

Άσκηση. Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy, x^2+3y^2)$ είναι συντηρητικό.

Άσκηση 6.7.11. *Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{F}(x,y) = (y-x^2, x+y^2)$ και η έλλειψη $\Gamma : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, όπου $a, b > 0$. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $W = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.*

Λύση. α′ τρόπος: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Η καμπύλη Γ είναι μια έλλειψη. Μια παραμέτρηση της έλλειψης δίνεται από την $\overrightarrow{r}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με

$$\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)\,.$$

Η $\overrightarrow{r}$ είναι C^∞ και η παράγωγός της είναι

$$\overrightarrow{r}'(t) = (-a\sin t, b\cos t)\,.$$

Επίσης, έχουμε

$$\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) = \overrightarrow{F}\left(a\cos t, b\sin t\right) = \left(b\sin t - a^2\cos^2 t, a\cos t + b^2\sin^2 t\right).$$

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\,(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(b\sin t - a^2\cos^2 t, a\cos t + b^2\sin^2 t\big) \cdot (-a\sin t, b\cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-ab\sin^2 t + a^3\sin t\cos^2 t + abcos^2 t + b^3\cos t\sin^2 t\big)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(ab\cos(2t) + a^3\sin t\cos^2 t + b^3\cos t\sin^2 t\big)\ dt \\
&= ab\int_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt + a^3\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t\,dt + b^3\int_0^{2\pi} \cos t\sin^2 t\,dt \\
&= \frac{ab}{2}\Big[\sin 2t\Big]_0^{2\pi} - \frac{a^3}{3}\Big[\cos^3 t\Big]_0^{2\pi} + \frac{b^3}{3}\Big[\sin^3 t\Big]_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

β′ τρόπος: Για το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ που μας δίνει η εκφώνηση εξετάζουμε αν είναι συντηρητικό, δηλαδή αν υπάρχει C^1 συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - x^2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y^2. \tag{6.1}$$

Από την πρώτη σχέση κρατώντας το y σταθερό και ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε ότι

$$f(x,y) = yx - \frac{x^3}{3} + g(y), \tag{6.2}$$

όπου $g(y)$ μια συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το y. Στην σχέση (6.2), παραγωγίζουμε ως προς y για να βρούμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + g'(y). \tag{6.3}$$

Από τις (6.1) και (6.3) έχουμε

$$x + g'(y) = x + y^2 \Leftrightarrow g'(y) = y^2 \Leftrightarrow g(y) = \frac{y^3}{3} + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Επειδή δεν μας ενδιαφέρει η τιμή της σταθεράς αυτής, μπορούμε να πάρουμε $c = 0$ για ευκολία. Συνεπώς, $g(y) = \frac{y^3}{3}$ και αντικαθιστώντας στην (6.2) βρίσκουμε τελικά

$$f(x,y) = yx - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}.$$

Εύκολα τώρα ελέγχουμε [1] ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι C^1 και ισχύουν πράγματι οι σχέσεις: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - x^2$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y^2$, δηλαδή $\nabla f = \overrightarrow{F}$. Άρα, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.6.5, το ολοκλήρωμα πάνω σε κάθε κλειστή καμπύλη είναι ίσο με μηδέν. Ειδικότερα, η καμπύλη Γ της εκφώνησης είναι μια έλλειψη, άρα κλειστή καμπύλη. Συμπεραίνουμε τελικά ότι

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

■

Σχόλιο. Ο δεύτερος τρόπος είναι σίγουρα πιο σύντομος και με λιγότερες πράξεις. Αν σε μια άσκηση διαπιστώσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}\colon A \to \mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) που μας δίνεται είναι συντηρητικό, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 6.6.5 έχουμε ότι

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = f\left(\overrightarrow{r}(b)\right) - f\left(\overrightarrow{r}(a)\right)$$

για κάθε καμπύλη $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to A$.Δηλαδή, το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, παρά μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο. Ιδιαιτέρως, $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη Γ μέσα στο A.

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε ότι ένα πεδίο είναι συντηρητικό, τότε ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων απλοποιείται πάρα πολύ. Άρα, αν σε μια άσκηση μας ζητείται να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου, μπορούμε αρχικά να ελέγχουμε μήπως το πεδίο είναι συντηρητικό. (Σκεπτόμενοι με πονηρό τρόπο, αν η καμπύλη που μας δίνεται είναι λίγο ''περίεργη'', τότε κατά πάσα πιθανότητα το πεδίο είναι συντηρητικό.) Δείτε την επόμενη άσκηση.

Άσκηση 6.7.12. *Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* $W = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ *για το διανυσματικό πεδίο* $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i} + (x + e^2)\,\overrightarrow{j} + ye^2\,\overrightarrow{k}$ *και την καμπύλη* Γ *με παραμέτρηση* $\overrightarrow{r}(t) = \left(t, \arctan t, \sin(t^3 + \frac{\pi}{2})\right)$ *με* $t \in [0,1]$.

[1] Θυμηθείτε ότι σε αυτό το σημείο είναι *υποχρεωτικό* να γίνει ο έλεγχος.

Κεφάλαιο 7

Πολλαπλά Ολοκληρώματα

7.1 Ορθογώνια στον $\mathbb{R}^d$. Όγκος ορθογωνίου

Ένα ορθογώνιο B στον $\mathbb{R}^d$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο από d μονοδιάστατα κλειστά και φραγμένα διαστήματα

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

όπου $a_i \leq b_i$ είναι πραγματικοί αριθμοί, $i = 1, 2, \ldots, d$. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,:\, a_i \leq x_i \leq b_i \text{ για κάθε } i = 1, 2, \ldots, d\}.$$

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ένα ορθογώνιο είναι κλειστό και έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες.

• Για $d = 1$, όταν δηλαδή είμαστε στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$, τα ορθογώνια είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα.

• Για $d = 2$, όταν δηλαδή είμαστε στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, τα ορθογώνια του παραπάνω ορισμού είναι τα συνήθη τετράπλευρα ορθογώνια με πλευρές παράλληλες στους άξονες.

• Για $d = 3$, όταν δηλαδή είμαστε στον $\mathbb{R}^3$, τα ορθογώνια που δίνει ο παραπάνω ορισμός είναι τα παραλληλεπίπεδα που έχουν πλευρές παράλληλες στους άξονες.

Ορισμός 7.1.1. *Θεωρούμε ένα ορθογώνιο στον* $\mathbb{R}^d$

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d].$$

Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι $b_1 - a_1, \ldots, b_d - a_d$. *Ο* ***όγκος*** *του ορθογωνίου* B *συμβολίζεται με* $V_d(B)$ *και ορίζεται ως εξής*

$$V_d(B) := (b_1 - a_1) \ldots (b_d - a_d).$$

Στην περίπτωση $d = 1$, έχουμε $B = [a_1, b_1]$ και ο 'όγκος' $V_1(B) = b_1 - a_1$ είναι το μήκος του διαστήματος. Στην περίπτωση $d = 2$, έχουμε $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ και ο 'όγκος' $V_2(B) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου. Για $d > 2$, ο $V_d(B)$ είναι ο d-όγκος του B.

Ιδιότητες του όγκου ορθογωνίου
Για τον όγκο ορθογωνίων στον $\mathbb{R}^d$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

(i) Αν B είναι ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ και $x_0 \in \mathbb{R}^d$, τότε το $x_0 + B$ είναι επίσης ορθογώνιο και ισχύει

$$V_d(x_0 + B) = V_d(B).$$

(ii) Αν B ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ και $\lambda > 0$ θετικός πραγματικός αριθμός, τότε λB είναι ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ και ισχύει

$$V_d(\lambda B) = \lambda^d V_d(B).$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις ιδιότητες (i) και (ii) έχουμε

$$V_d(x_0 + \lambda B) = \lambda^d V_d(B)$$

για κάθε ορθογώνιο B, κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^d$ και κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda > 0$.

(iii) Έστω B ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ το οποίο διαμερίζουμε σε μικρότερα ορθογώνια,

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n,$$

όπου τα B_i $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ορθογώνια με τα εσωτερικά τους να είναι ξένα, δηλαδή $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$. Τότε για τον όγκο του B ισχύει ότι

$$V_d(B) = V_d(B_1) + V_d(B_2) + \ldots + V_d(B_n).$$

7.2 Ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης σε ένα ορθογώνιο

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, του $\mathbb{R}^d$ και μια **φραγμένη** συνάρτηση $f \colon B \to \mathbb{R}$. Για καθένα από τα διαστήματα $[a_i, b_i]$ θεωρούμε μια διαμέριση $P_i \in \mathfrak{D}_{[a_i, b_i]}$. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται μια διαμέριση του B σε μικρότερα ορθογώνια, των οποίων τα εσωτερικά είναι ανά δύο ξένα:

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N,$$

με $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$. Συμβολίζουμε αυτή τη διαμέριση του B με $P = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$. Το σύνολο όλων των διαμερίσεων του B που προκύπτουν με αυτόν

τον τρόπο το συμβολίζουμε με $\mathfrak{D}_B$.
Για κάθε ορθογώνιο B_i της διαμέρισης P, θέτουμε

$$m_i = \inf\{f(\overrightarrow{x})\colon \overrightarrow{x} \in B_i\}$$
$$M_i = \sup\{f(\overrightarrow{x})\colon \overrightarrow{x} \in B_i\}.$$

Είναι προφανές ότι ισχύει $m_i \leq M_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$. Επιπλέον, θέτουμε

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{N} m_i V_d(B_i)$$
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{N} M_i V_d(B_i)$$

Ο αριθμός $L(f, P)$ καλείται το **κάτω άθροισμα** της f ως προς τη διαμέριση P και ο αριθμός $U(f, P)$ καλείται βφ άνω άθροισμα της f ως προς τη διαμέριση P. Επειδή $m_i \leq M_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$ προκύπτει ότι $L(f, P) \leq U(f, P)$. Ισχύει όμως κάτι ισχυρότερο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.2.1. *Έστω $P, Q \in \mathfrak{D}_B$ δύο διαμερίσεις του ορθογωνίου B. Τότε ισχύει ότι $L(f, P) \leq U(f, Q)$. Με άλλα λόγια, οποιοδήποτε κάτω άθροισμα της f είναι μικρότερο ή ίσο από οποιοδήποτε άνω άθροισμα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. Μπορείτε να συμβουλευτείτε την αντίστοιχη απόδειξη για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. □

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι το σύνολο $\{L(f, P) \,:\, P \in \mathfrak{D}_B\}$ είναι άνω φραγμένο (ένα οποιοδήποτε άνω άθροισμα $U(f, Q)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου). Επομένως, υπάρχει το $\sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathfrak{D}_B\}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Και μάλιστα, αφού $U(f, Q)$ είναι άνω φράγμα, έχουμε ότι $\sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathfrak{D}_B\} \leq U(f, Q)$ για κάθε διαμέριση $Q \in \mathfrak{D}_B$.

Περαιτέρω, παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{U(f, Q) \,:\, Q \in \mathfrak{D}_B\}$ είναι κάτω φραγμένο. Μάλιστα ένα κάτω φράγμα του συνόλου είναι ο αριθμός $\sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathfrak{D}_B\}$. Επομένως, υπάρχει το $\inf\{U(f, Q) \,:\, Q \in \mathfrak{D}_B\}$ και ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathfrak{D}_B\} \leq \inf\{U(f, Q) \,:\, Q \in \mathfrak{D}_B\}.$$

Ορισμός 7.2.2. *Έστω B ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ και $f\colon B \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.*

(i) Ο αριθμός $\sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathfrak{D}_B\}$ ονομάζεται ***κάτω ολοκλήρωμα*** *της f στο ορθογώνιο B και συμβολίζεται με $\underline{\int}_B f$. Δηλαδή*

$$\underline{\int}_B f = \sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathfrak{D}_B\}.$$

(ii) *Ο αριθμός* $\inf\{U(f,Q) : Q \in \mathfrak{D}_B\}$ *ονομάζεται* **άνω ολοκλήρωμα** *της* f *στο ορθογώνιο* B *και συμβολίζεται με* $\overline{\int}_B f$*. Δηλαδή*

$$\overline{\int}_B f = \inf\{U(f,Q) : Q \in \mathfrak{D}_B\}.$$

Για το άνω και κάτω ολοκλήρωμα της f *ισχύει πάντα η ανισότητα:*

$$\underline{\int}_B f \leq \overline{\int}_B f.$$

(iii) *Η συνάρτηση* f *λέμε ότι είναι* **ολοκληρώσιμη** *στο* B *αν* $\underline{\int}_B f = \overline{\int}_B f$*. Σε αυτήν την περίπτωση, την κοινή τιμή του άνω και του κάτω ολοκληρώματος τη συμβολίζουμε με* $\int_B f$ *και την καλούμε* **ολοκλήρωμα** *της* f *στο* B*.*

Για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

Θεώρημα 7.2.3. *Έστω* B *ορθογώνιο στον* $\mathbb{R}^d$ *και* $f, g \colon B \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(i) *Αν* $f \geq 0$*, τότε* $\int_B f \geq 0$*.*

(ii) *(Γραμμικότητα του ολοκληρώματος) Η συνάρτησεις* $f+g$ *και* λf *(όπου* $\lambda \in \mathbb{R}$*) είναι ολοκληρώσιμες στο* B *και ισχύουν*

$$\int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g$$

$$\int_B (\lambda f) = \lambda \int_B f.$$

(iii) *Αν το ορθογώνιο* B *γράφεται ως ένωση* $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N$ *όπου τα* B_i*,* $i = 1, 2, \ldots, N$ *είναι ορθογώνια με ξένα εσωτερικά,* $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$ *για* $i \neq j$*, τότε ισχύει*

$$\int_B f = \int_{B_1} f + \int_{B_2} f + \ldots + \int_{B_N} f.$$

(iv) *Το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης* $f = 1$ *μας δίνει τον* d*-όγκο του* B

$$\int_B 1 = V_d(B).$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες, είναι άμεσο το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 7.2.4. *Έστω* B *ορθογώνιο στον* $\mathbb{R}^d$ *και* $f, g \colon B \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.*

(i) Αν $f \geq g$, τότε $\int_B f \geq \int_B g$.

(ii) Η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο B και ισχύει

$$\left| \int_B f \right| \leq \int_B |f|.$$

Θεώρημα 7.2.5 (Κριτήριο Riemann). *Έστω B ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ και $f \colon B \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο B.

(ii) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $P \in \mathfrak{D}_B$ του B τέτοια ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.

Θεώρημα 7.2.6. *Έστω B ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ και συνάρτηση $f \colon B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο B τότε είναι και ολοκληρώσιμη στο B.*

7.3 Ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης πάνω σε συμπαγές σύνολο

Θεωρούμε τώρα ένα K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και μια φραγμένη συνάρτηση $f \colon K \to \mathbb{R}$. Εφόσον το K είναι συμπαγές, θα είναι και φραγμένο. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο B του $\mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $K \subseteq B$. Παίρνουμε τώρα την συνάρτηση

$$\tilde{f} \colon B \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & \overrightarrow{x} \in K \\ 0, & \overrightarrow{x} \in B \setminus K \end{cases}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε $\tilde{f} = f\,\chi_K$, όπου χ_K είναι η λεγόμενη **χαρακτηριστική συνάρτηση** του K και ορίζεται ως εξής

$$\chi_K \colon \mathbb{R}^d \to IR$$

$$\chi_K(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} 1, & \overrightarrow{x} \in K \\ 0, & \overrightarrow{x} \notin K \end{cases}$$

Ορισμός 7.3.1. *Η συνάρτηση $f \colon K \to \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι* **ολοκληρώσιμη** *στο K αν και μόνο αν η συνάρτηση $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο B. Σε αυτήν την περίπτωση το ολοκλήρωμα της f στο K είναι:*

$$\int_K f := \int_B \tilde{f}.$$

Ορισμός 7.3.2. *Αν K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε ορίζουμε τον όγκο του K:*

$$V_d(K) := \int_K 1$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.

7.4 Χαρακτηρισμός των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Γνωρίζουμε ήδη ότι κάθε συνάρτηση $f\colon B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο ορθογώνιο B είναι ολοκληρώσιμη (Θεώρημα 7.2.6). Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να διατυπώσουμε ένα χαρακτηρισμό των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με βάση το σύνολο των σημείων ασυνέχειας.

Ορισμός 7.4.1. *Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι το A έχει d-μέτρο ίσο με 0 ή ότι το A είναι μηδενικού d-μέτρου αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν ορθογώνια $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ στον $\mathbb{R}^d$ τα οποία καλύπτουν το A, $A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, και επιπλέον $\sum_{i=1}^{\infty} V_d(B_i) < \epsilon$.*

Θεώρημα 7.4.2. *Έστω B ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ και $f\colon B \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θέτουμε $A_f = \{\overrightarrow{x} \in B \,:\, f$ ασυνεχής στο $\overrightarrow{x}\}$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της συνάρτησης f. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο B.

(ii) Το σύνολο A_f των σημείων ασυνέχειας της f είναι μηδενικού d-μέτρου.

Πόρισμα 7.4.3. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f\colon K \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο K.

(ii) Το σύνορο ∂K του K είναι μηδενικού d-μέτρου.

Απόδειξη. Έστω B ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ που περιέχει το K και $\tilde{f}\colon K \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\tilde{f} = f\chi_K$. Τότε τα μόνα πιθανά σημεία ασυνέχειας της $\tilde{f}$ είναι τα σημεία που ανήκουν στο σύνορο του K. Το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο θεώρημα. □

Χρήσιμη στα επόμενα θα είναι η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.4.4. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $\varphi\colon K \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο K. Παίρνουμε το γράφημα της φ*

$$G_{\varphi} = \left\{ \left(\overrightarrow{x}, \varphi(\overrightarrow{x}) \right) \in \mathbb{R}^{d+1} \,:\, \overrightarrow{x} \in K \right\}.$$

Τότε το G_{φ}, το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$, είναι μηδενικού $d+1$-μέτρου.

Παρατηρήσεις - Ειδικές Περιπτώσεις.
(1) Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Τότε το γράφημα της ϕ:

$$G_{\phi} = \{(x, \phi(x)) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b\}$$

είναι μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 7.4.4 το σύνολο G_ϕ έχει εμβαδό 0.

Αν τώρα $\phi_1, \phi_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε ορίζεται το σύνολο D το οποίο περικλείεται από τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ και από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ϕ_1, ϕ_2. Δηλαδή

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\big\}.$$

Εφόσον το γράφημα κάθε συνάρτησης είναι σύνολο μηδενικού εμβαδού, προκύπτει ότι και το σύνορο του D είναι εμβαδού 0. Άρα, από το Πόρισμα 7.4.3 έχουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f \colon D \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο D.

7.5 Ασκήσεις

Άσκηση 7.5.1. *Έστω K, K_1 συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ ώστε $K_1 \subset K$ και $\partial K, \partial K_1$ έχουν μέτρο μηδέν. Αποδείξτε ότι αν $f \colon K \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_K f = \int_{K_1} f + \int_{K \setminus K_1} f.$$

Λύση. Έστω B ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ ώστε $K \subset B$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$\chi_K = \chi_{K_1} + \chi_{K \setminus K_1}.$$

Επομένως,

$$f \cdot \chi_K = f \cdot \chi_{K_1} + f \cdot \chi_{K \setminus K_1}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{gathered} \int_B f \cdot \chi_K = \int_B f \cdot \chi_{K_1} + \int_B f \cdot \chi_{K \setminus K_1} \Leftrightarrow \\ \int_K f = \int_{K_1} f + \int_{K \setminus K_1} f. \end{gathered}$$

■

Σχόλιο. Σε αυτές τις σημειώσεις, έχουμε ορίσει το ολοκλήρωμα μιας φραγμένης συνάρτησης σε ένα συμπαγές σύνολο (Ορισμός 7.3.1). Στην παραπάνω άσκηση όμως εμφανίζεται το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f πάνω στο σύνολο $K \setminus K_1$, το οποίο δεν είναι εν γένει συμπαγές. Ωστόσο, αυτό δεν είναι πρόβλημα, καθώς μπρούμε εύκολα να επεκτείνουμε τον Ορισμό 7.3.1 και για φραγμένα σύνολα που δεν είναι συμπαγή.
Πράγματι, αν D είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f \colon D \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, τότε παίρνουμε ένα ορθογώνιο B ώστε $D \subseteq B$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f \cdot \chi_D$. Λέμε

ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο D αν και μόνο αν η $f \cdot \chi_D$ είναι ολοκληρώσιμη στο B και σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε

$$\int_D f = \int_B f \cdot \chi_D.$$

Επιπλέον, το Πόρισμα 7.4.3 ισχύει και για την περίπτωση που έχουμε φραγμένο σύνολο D στη θέση του συμπαγούς K (δώστε λεπτομέρειες).

Κεφάλαιο 8

Διπλά Ολοκληρώματα

8.1 Εισαγωγή

Το προηγούμενο Κεφάλαιο μας εισήγαγε στην έννοια του ολοκληρώματος μιας φραγμένης συνάρτηση f ορισμένης σε ένα ορθογώνιο B του $\mathbb{R}^d$ ή σε ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Επιπλέον, μας εφοδίασε με κάποια σημαντικά Κριτήρια Ολοκληρωσιμότητας. Ωστόσο, δεν έχουμε ακόμη στα χέρια μας κάποια αποτελεσματική μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Έτσι, ο αμέσως επόμενος στόχος μας είναι να αναπτύξουμε μεθόδους για να υπολογίζουμε ολοκληρώματα.

Καταρχάς, σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με ολοκληρώματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Δηλαδή, θα έχουμε ένα ορθογώνιο B στο $\mathbb{R}^2$ (ή γενικότερα ένα $K \subseteq \mathbb{R}^2$ συμπαγές) και μια φραγμένη συνάρτηση $f\colon B \to \mathbb{R}$ (αντ. $f\colon K \to \mathbb{R}$). Το ολοκλήρωμα της f στο B (αντ. K), εφόσον βέβαια υπάρχει, λέγεται και **διπλό ολοκλήρωμα** της f και συμβολίζεται με

$$\int\int_B f.$$

Σε επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα **τριπλά ολοκληρώματα** (δηλαδή με ολοκληρώματα συναρτήσεων τριών μεταβλητών).

Δύο είναι τα βασικά εργαλεία που μας διευκολύνουν στον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων: το Θεώρημα του Fubini και η αλλαγή μεταβλητών. Στις επόμενες ενότητες θα προσπαθήσουμε να τα παρουσιάσουμε αναλυτικά.

8.2 Το Θεώρημα Fubini

Έστω $B = [a, b] \times [c, d]$ ένα ορθογώνιο στο $\mathbb{R}^2$ και $f\colon B \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν σταθεροποιήσουμε ένα x στο διάστημα $[a, b]$, τότε ορίζεται η παρακάτω συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$\begin{aligned} [c, d] &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x, y). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $[c, d]$ (διότι η f είναι συνεχής). Επομένως, είναι και Riemann ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$ και άρα έχει νόημα το

$$\int_c^d f(x, y)dy.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ένα απλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής. Η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται προφανώς από το $x \in [a, b]$ το οποίο έχουμε σταθεροποιήσει. Για να δηλώσουμε την εξάρτηση από το x ας το συμβολίσουμε με $F(x)$ και έτσι έχουμε $F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια νέα συνάρτηση

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy.$$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[a, b]$ (γιατί;) και επομένως έχει νόημα το ολοκλήρωμα της F στο $[a, b]$:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx.$$

Η παράσταση που εμφανίζεται

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx$$

είναι γνωστή ως **διαδοχικό ολοκλήρωμα**, διότι προκύπτει αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ολοκληρώσουμε το εξαγόμενο ως προς x.
Με τελείως ανάλογη διαδικασία ορίζεται και το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy$$

όπου πρώτα ολοκληρώνουμε ως προς x και μετά ως προς y.

Φυσιολογικά γεννιέται το εξής ερώτημα: Τι σχέση έχουν τα διαδοχικά ολοκληρώματα $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx$ και $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy$ με το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_B f$ της συνάρτησης f στο ορθογώνιο B; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από το Θεώρημα Fubini.

Θεώρημα 8.2.1 (Θεώρημα Fubini, Αρχή Cavalieri ή Θεώρημα Διαδοχικών Ολοκληρωμάτων)**.** *Έστω* $B = [a,b]\times[c,d]$ *ένα ορθογώνιο στο* $\mathbb{R}^2$ *και* $f\colon B \to \mathbb{R}$ *φραγμένη συνάρτηση. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:*

$$\underline{\int}_{B} f \le \underline{\int}_{a}^{b} \left(\underline{\int}_{c}^{d} f(x,y)dy \right) dx \le \underline{\int}_{a}^{b} \left(\overline{\int}_{c}^{d} f(x,y)dy \right) dx \le$$

$$\le \overline{\int}_{a}^{b} \left(\overline{\int}_{c}^{d} f(x,y)dy \right) dx \le \overline{\int}_{B} f$$

$$\underline{\int}_{B} f \le \underline{\int}_{c}^{d} \left(\underline{\int}_{a}^{b} f(x,y)dx \right) dy \le \underline{\int}_{c}^{d} \left(\overline{\int}_{a}^{b} f(x,y)dx \right) dy \le$$

$$\le \overline{\int}_{c}^{d} \left(\overline{\int}_{a}^{b} f(x,y)dx \right) dy \le \overline{\int}_{B} f$$

Πόρισμα 8.2.2 (Θεώρημα Fubini - version 2)**.** *Έστω* $B = [a,b] \times [c,d]$ *ένα ορθογώνιο στο* $\mathbb{R}^2$ *και* $f\colon B \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι για κάθε* $x \in [a,b]$ *η συνάρτηση (μιας μεταβλητής)*

$$[c,d] \to \mathbb{R}$$

$$y \mapsto f(x,y)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$*. Τότε ισχύει*

$$\int_B f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Αν, επιπλέον, για κάθε $y \in [c,d]$ *η συνάρτηση*

$$[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x,y)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$*, τότε ισχύει*

$$\int_B f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Αν η συνάρτηση $f\colon B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο B, από το Θεώρημα 7.2.6 γνωρίζουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο B. Επιπλέον, για κάθε $x \in [a,b]$ (σταθεροποιημένο) η συνάρτηση $[c,d] \to \mathbb{R}$ με $y \mapsto f(x,)$ είναι συνεχής (άρα, ολοκληρώσιμη). Ομοίως η συνάρτηση $[a,b] \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f(x,y)$. Έτσι προκύπτει άμεσα το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 8.2.3 (Θεώρημα Fubini - version 3)**.** *Έστω $B = [a,b] \times [c,d]$ ένα ορθογώνιο στο $\mathbb{R}^2$ και $f\colon B \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύει*

$$\int_B f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Σχόλιο. Από άποψη εφαρμογών, η πιο χρήσιμη μορφή του Θεωρήματος Fubini είναι αυτή που δίνεται στο Πόρισμα 8.2.3.

Η διαδοχική ολοκλήρωση είναι το κλειδί για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων. Σε πολλές όμως περιπτώσεις, οι συναρτήσεις μας δεν θα είναι ορισμένες σε ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$. Για το λόγο αυτό, επεκτείνουμε στη συνέχεια το Θεώρημα Fubini και στην περίπτωση συναρτήσεων με κάπως πιο γενικά πεδία ορισμού, τα λεγόμενα *απλά σύνολα*.

8.2.1 Απλά σύνολα στον $\mathbb{R}^2$ (Σύνολα τύπου I, II)

Ορισμός 8.2.4. *Έστω D ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το D λέμε ότι είναι x-απλό σύνολο (ή τύπου I) αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\},$$

όπου $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Παραδείγματα.

(1) Ένα ορθογώνιο $B = [a,b] \times [c,d]$ είναι x-απλό σύνολο, καθώς

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b,\, c \le y \le d\}.$$

Δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση οι συναρτήσεις ϕ_1, ϕ_2 του Ορισμού 8.2.4 είναι οι σταθερές συναρτήσεις $\phi_1(x) = c$ και $\phi_2(x) = d$.

(2) Ένας κυκλικός δίσκος στο επίπεδο είναι x-απλό σύνολο. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον δίσκο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1\}$. Τότε μπορούμε να γράψουμε αυτό το σύνολο ως εξής

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1,\, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}.$$

Δηλαδή, έχουμε $\phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$ και $\phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

(3) Παίρνουμε το σύνολο $D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1,\, y \ge 0\}$ που είναι η τομή του δίσκου D με το πάνω ημιεπίπεδο. Τότε, το D_+ είναι x-απλό σύνολο:

$$D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1,\, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}.$$

Επίσης, αν θέσουμε $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq 1, \, x \geq 0\}$ που είναι η τομή του D με το δεξί ημιεπίπεδο, τότε το D_R είναι x-απλό σύνολο. (Μπορείτε να γράψετε την κατάλληλη περιγραφή του D_R;)

Ορισμός 8.2.5. *Έστω D ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το D λέμε ότι είναι y-απλό σύνολο (ή τύπου II) αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

όπου $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Παρατήρηση. Έστω D ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι x-απλό ή y-απλό. Από την Πρόταση 7.4.4 (και τις παρατηρήσεις που την ακολουθούν) έπεται ότι το σύνορο του D έχει μέτρο 0. Συνεπώς, αν μια συνάρτηση $f\colon D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο D, τότε είναι και ολοκληρώσιμη (βλ. Πόρισμα 7.4.3).

Θεώρημα 8.2.6 (Το Θεώρημα Fubini σε απλά σύνολα)**.** *Έστω D ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f\colon D \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(i) Αν το D είναι x-απλό σύνολο, τότε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο D είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα:

$$\int\int_B f = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

(ii) Αν το D είναι y-απλό σύνολο, τότε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο D είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα:

$$\int\int_B f = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

8.3 Ασκήσεις

Άσκηση 8.3.1. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy.$$

Σχόλιο. *Η πρώτη σκέψη που κάνει κάποιος είναι να προσπαθήσει να υπολογίσει διαδοχικά τα δύο ολοκληρώματα. Αν όμως επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε το "μέσα" ολοκλήρωμα, τότε βλέπουμε ότι ερχόμαστε αντιμέτωποι με το $\int_y^1 e^{x^2} dx$. Ωστόσο, το ολοκλήρωμα αυτό* **δεν υπολογίζεται**!! *Επομένως, πώς θα λύσουμε την παραπάνω άσκηση;*

Λύση. Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le 1, y \le x \le 1\}.$$

(Το σύνολο D δεν προέκυψε αυθαίρετα. Καθορίζεται από τα άκρα στο ολοκλήρωμα I που θέλουμε να υπολογίσουμε.)
Το σύνολο D είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0), (1,0), (1,1)$. Το σύνολο αυτό είναι y-απλό. Παρατηρούμε όμως ότι είναι και x-απλό και μπορούμε μάλιστα να το γράψουμε στην μορφή

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Fubini (Θεώρημα 8.2.6), το ολοκλήρωμα I γράφεται ως εξής:

$$I = \int\int_D e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx.$$

Υπολογίζουμε τώρα διαδοχικά τα ολοκληρώματα (παρατηρείστε ότι η συνάρτηση e^{x^2} δεν εξαρτάται από το y και άρα βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα ως προς y):

$$I = \int_0^1 e^{x^2} \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 e^{x^2} x dx.$$

Τώρα όμως μέσα στο ολοκλήρωμα εκτός από το e^{x^2} έχει εμφανιστεί και το x και ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος είναι απλός:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

■

Σχόλιο...συνέχεια. *Τι ακριβώς συνέβη στην προηγούμενη άσκηση; Το ολοκλήρωμα I δεν μπορούσαμε να το υπολογίσουμε στην μορφή που μας είχε δοθεί. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini πετύχαμε να* **αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης** *και να καταλήξουμε σε ένα ολοκλήρωμα το οποίο μπορέσαμε να υπολογίσουμε. Αυτή η τεχνική της αλλαγής στη σειρά ολοκλήρωσης είναι πολύ χρήσιμη (και κατά πάσα πιθανότητα θα τη χρειαστείτε στην εξέταση).*

Άσκηση 8.3.2. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 x^3 y e^{xy^2} dx \right) dy.$$

Λύση. Παρατηρήστε ότι στο ολοκλήρωμα I, τα άκρα ολοκλήρωσης είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά της προηγούμενης άσκησης. Επομένως, θεωρούμε πάλι το ίδιο σύνολο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$, το οποίο μπορούμε να το γράψουμε και ως x-απλό

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini (Θεώρημα 8.2.6), αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα I:

$$\begin{aligned}
I =& \int\int_D x^3 y e^{xy^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^3 y e^{xy^2} dy \right) dx \\
=& \int_0^1 x^3 \left(\int_0^x y e^{xy^2} dy \right) dx = \int_0^1 x^3 \left(\int_0^x \frac{1}{2x} (e^{xy^2})' dy \right) dx \\
=& \int_0^1 x^3 \frac{1}{2x} \left[e^{xy^2} \right]_{y=0}^x dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} \left(e^{x^3} - 1 \right) dx \\
=& \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^2 e^{x^3} - x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} e^{x^3} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^1 \\
=& \frac{1}{2} \left[\frac{e}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{6} \left(e - 2 \right).
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 8.3.3. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - y^2)^{3/2} dy \right) dx.$$

Λύση. Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Το σύνολο D είναι το κομμάτι του μοναδιαίου δίσκου $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Είναι x-απλό σύνολο. Μπορούμε όμως να το περιγράψομε και ως y-απλό σύνολο ως εξής:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini, έχουμε

$$I = \int\int_D (1 - y^2)^{3/2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (1 - y^2)^{3/2} dx \right) dy.$$

Τώρα, υπολογίζουμε το τελευταίο διαδοχικό ολοκλήρωμα:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (1-y^2)^{3/2}\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx\right) dy \qquad (\text{διότι } (1-y^2)^{3/2} \text{δεν εξαρτάται από το } x)\\
&= \int_0^1 (1-y^2)^{3/2}\cdot\sqrt{1-y^2}dy\\
&= \int_0^1 (1-y^2)^2 dy\\
&= \int_0^1 (1-2y^2+y^4)dy\\
&= \int_0^1 (y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5)'dy\\
&= \left[y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} = \frac{8}{15}.
\end{aligned}
$$

■

Άσκηση 8.3.4. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{(1+x^5)^7}dx\right) dy.$$

Λύση. Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le y\le 1, \sqrt{y}\le x\le 1\}.$$

Το σύνολο D είναι το κομμάτι του επιπέδου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$ την παραβολή $y=x^2$ και την ευθεία $x=1$. Το σύνολο D είναι y-απλό. Μπορούμε όμως να το περιγράψουμε και ως x-απλό, ως εξής:

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini, το ολοκλήρωμα I γράφεται:

$$I = \int\int_D \frac{y}{(1+x^5)^7}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{y}{(1+x^5)^7}dy\right)dx.$$

Υπολογίζουμε τώρα το τελευταίο διαδοχικό ολοκλήρωμα.

$$
\begin{aligned}
I =& \int_0^1 \frac{1}{(1+x^5)^7}\left(\int_0^{x^2} y dy\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^5)^7}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{x^2} dx \\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^5)^7} dx \\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^7}\frac{1}{5} du \qquad (\text{θέσαμε } x^5 = u) \\
=&\frac{1}{10}\int_0^1 \frac{-1}{6}\left(\frac{1}{(1+u)^6}\right)' du \\
=&\frac{-1}{60}\left[\frac{1}{(1+u)^6}\right]_{u=0}^1 = \frac{-1}{60}\left(\frac{1}{2^6}-1\right) = \frac{63}{60\cdot 64} = \frac{63}{3840}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 8.3.5. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{y}} (1-x^3)^{1/2} dx\right) dy.$$

Λύση. Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le \sqrt[5]{y}\}.$$

Το σύνολο D αν το σχεδιάσουμε βλέπουμε ότι είναι το κομμάτι του επιπέδου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\phi_1(x) = x^2$ και $\phi_2(x) = x^5$ με $x \in [0,1]$. Το D μπορούμε να το περιγράψουμε και ως x-απλό σύνολο

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1, x^5 \le y \le x^2\}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Fubini, έχουμε

$$I = \int\int_D (1-x^3)^{1/2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^5}^{x^2} (1-x^3)^{1/2} dy\right) dx.$$

Υπολογίζουμε τώρα το τελευταίο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (1-x^3)^{1/2} \left(\int_{x^5}^{x^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 (1-x^3)^{1/2}(x^2-x^5)dx = \int_0^1 (1-x^3)^{1/2} x^2 (1-x^3) dx \\
&= \int_0^1 x^2 (1-x^3)^{3/2} dx \\
&= \int_0^1 (1-u)^{3/2} \frac{1}{3}\, du \qquad (\text{θέσαμε } x^3 = u) \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{-2}{5} \Big((1-u)^{5/2} \Big)' du \\
&= \frac{-2}{15} \Big[(1-u)^{5/2} \Big]_{u=0}^{1} = \frac{-2}{15}(-1) = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

8.4 Αλλαγή μεταβλητών

Σε αυτήν την ενότητα ασχολούμαστε με το δεύτερο σημαντικό εργαλείο για τον υπολογισμό πολλαπλών ολοκληρωμάτων που δεν είναι άλλο από την αλλαγή μεταβλητών. Ξεκινάμε με μια υπενθύμιση των όσων ισχύουν στην περίπτωση των απλών ολοκληρωμάτων και στη συνέχεια περνάμε στα διπλά ολοκληρώματα.

8.4.1 Η Αλλαγή μεταβλητής στο απλό ολοκλήρωμα - Υπενθύμιση

Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ (και άρα ολοκληρώσιμη σε αυτό το διάστημα). Θεωρούμε ακόμη μια συνάρτηση $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ η οποία είναι C^1, επί του $[a,b]$ και τέτοια ώστε $\phi'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [c,d]$. Τότε έχομε είτε $\phi'(t) > 0$ για κάθε $t \in [c,d]$ ή $\phi'(t) < 0$ για κάθε $t \in [c,d]$ (γιατί;). Συνεπώς, η ϕ είναι γνησίως μονότονη. Η αλλαγή μεταβλητής για το απλό ολοκλήρωμα μας δίνει τα ακόλουθα.

- Αν η ϕ είναι γνησίως αύξουσα, τότε $\phi(c) = a$ και $\phi(d) = b$ και επομένως

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

- Αν η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $\phi(c) = b$ και $\phi(d) = a$ και επομένως

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} \int_d^c f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} \int_d^c f(\phi(t))\phi'(t)dt = -\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt$$
$$\int_c^d f(\phi(t))(-\phi'(t))dt = \int_c^d f(\phi(t))|\phi'(t)|dt.$$

Επομένως, μπορούμε να συνοψίσουμε και τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις στην εξής ισότητα:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\phi(t))|\phi'(t)|dt. \tag{8.1}$$

Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι η ϕ είναι μια συνάρτηση από ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$. Επομένως, σύμφωνα με όσα έχουμε πει στα πλαίσια του μαθήματος, μπορούμε να μιλήσουμε για τον πίνακα Jacobi της ϕ. Ο πίνακας Jacobi για μια συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ είναι ένας 1×1 πίνακας και δεν είναι άλλος από

$$J_\phi(t) = \Big(\phi'(t)\Big).$$

Συνεπώς, η ορίζουσα του πίνακα Jacobi της ϕ που θα τη συμβολίζουμε με $\det J_\phi(t)$ είναι ίση με $\phi'(t)$ και άρα έχουμε

$$|\phi'(t)| = |\det J_\phi(t)|.$$

Σύμφωνα με αυτήν την παρατήρηση, η ισότητα 8.1 παίρνει τώρα τη μορφή

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\phi(t))|\det J_\phi(t)|dt. \tag{8.2}$$

Κρατήστε αυτήν την ισότητα στο μυαλό σας και θυμηθείτε την όταν διατυπώσουμε το Θεώρημα 8.4.1 για την αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα.

Τι κρύβεται στην ισότητα $dx = \phi'(t)dt$;

Στο υπόλοιπο αυτής της υποενότητας, θα προσπαθήσουμε να καταλάβουμε καλύτερα την αλλαγή μεταβλητής και να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα, κυρίως μέσα από την εξέταση κάποιων παραδειγμάτων. Ακολουθώντας τη συνήθη τακτική μας, θα ξεχάσουμε για λίγο το φορμαλισμό και την αυστηρή θεμελίωση.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι η $\phi(t) = ct$, όπου c μια μη-μηδενική σταθερά (μπορούμε να πάρουμε την περίπτωση $c > 0$). Τότε βέβαια $\phi'(t) = c$. Παίρνουμε ένα σημείο t_1 στο πεδίο ορισμού της ϕ και έστω $x_1 = \phi(t_1)$ η εικόνα του.

Μετακινούμαστε τώρα από το σημείο t_1 κατά ένα μικρό διάστημα Δt και φτάνουμε στο σημείο $t_1+\Delta t$. Αντίστοιχα, οι εικόνες μετακινούνται από το $x_1 = \phi(t_1)$ στο $x_2 = \phi(t_1+\Delta t)$. Αν θέλουμε να βρούμε τη μεταβολή Δx των εικόνων, έχουμε

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \phi(t_1 + \Delta t) - \phi(t_1) = c(t_1 + \Delta t) - ct_1 = c\Delta t.$$

Επομένως, όταν η μεταβλητή t υφίσταται μια μεταβολή κατά Δt, τότε η αντίστοιχη μεταβολή της μεταβλητής x είναι $\Delta x = c \cdot \Delta t = \phi'(t)\Delta t$. Παρατηρούμε επίσης ότι σε αυτήν την ειδική περίπτωση η μεταβολή Δx δεν εξαρτάται από το t_1 παρά μόνο από το Δt. Δηλαδή, αν πάρουμε ένα σημείο t_2 και μετακινηθούμε κατά Δt, τότε η μεταβολή της εικόνας είναι $\Delta x = c \cdot \Delta t$.

Ας πάρουμε τώρα μια δεύτερη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι $\phi(t) = t^2$ με $t \in (0, \infty)$. (Πρέπει να περιορίσουμε το t προκειμένου η συνάρτησή μας να είναι γνησίως μονότονη.) Θεωρούμε ένα σημείο t_1 στο πεδίο ορισμού της ϕ και έστω x_1 η εικόνα του. Μετακινούμαστε από το t_1 κατά ένα διάστημα Δt και θέλουμε να δούμε τη μεταβολή Δx των εικόνων.

Σε αυτήν την περίπτωση, τα πράγματα είναι λίγο πιο πολύπλοκα σε σχέση με την προηγούμενη, παρόλα αυτά μπορεί κανείς να υπολογίσει ακριβώς τη μεταβολή $\Delta x = \phi(t_1+\Delta t) - \phi(t_1)$. Σε πολύπλοκες όμως περιπτώσεις, αυτός ο υπολογισμός είναι δύσκολος ή και αδύνατος. Για το λόγο αυτό εργαζόμαστε ως εξής. Αν η μεταβολή Δt είναι πολύ μικρή, τότε από τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο t_1, έχουμε ότι η διαφορά $\phi(t_1 + \Delta t) - \phi(t_1)$ προσεγγίζεται αρκετά καλά από $\phi'(t_1) \cdot \Delta t$. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε

$$\Delta x = \phi(t_1 + \Delta t) - \phi(t_1) \approx \phi'(t_1) \cdot \Delta t = 2t_1 \cdot \Delta t.$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η μεταβολή Δx εξαρτάται από το σημείο t_1. Αν βρεθούμε σε άλλο σημείο t_2 και μεταβάλουμε το t κατά Δt, τότε η μεταβλητή x μεταβάλεται κατά $\Delta x \approx 2t_2 \cdot \Delta t$.

Χωρίς να επιμείνουμε περισσότερο σε αυτό το σημείο και χωρίς να μας ενδιαφέρει πολύ ο φορμαλισμός, μπορούμε να πούμε ότι η ισότητα $dx = \phi'(t)dt$ μας δείχνει πώς μεταβάλλεται το στοιχειώδες μήκος dx σε σχέση με το στοιχειώδες μήκος dt.

8.4.2 Αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα

Τις ιδέες που αναπτύξαμε διαισθητικά στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, θα επιχειρήσουμε τώρα να τις μεταφέρουμε στο διπλό ολοκλήρωμα. Καταρχάς, οι συναρτήσεις μας είναι πλέον συναρτήσεις δύο μεταβλητών $f(x, y)$. Συνεπώς, μια αλλαγή στις μεταβλητές θα έχει την εξής γενική μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array} \right\}$$

ή πιο συνοπτικά, έχουμε το μετασχηματισμό:

$$(x,y)=\overrightarrow{T}(u,v)=(\phi(u,v),\psi(u,v)).$$

Προκειμένου να έχουμε κάποια εποπτεία, μπορούμε να σχεδιάζουμε τον $\overrightarrow{T}$ από το uv-επίπεδο στο xy-επίπεδο.
Ας πάρουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f σε ένα ορθογώνιο B (μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε ένα συμπαγές σύνολο· δεν μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα αυτή τη στιγμή). Σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη ενότητα, προκειμένου να δούμε πώς επηρεάζεται το ολοκλήρωμα

$$\int\int_B f(x,y)dxdy$$

με την αλλαγή των μεταβλητών, πρέπει να δούμε πώς μεταβάλεται το στοιχειώδες εμβαδό $dxdy$ σε σχέση με το στοιχειώδες εμβαδό $dudv$. Εξετάζουμε και πάλι κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα.

Γραμμικός μετασχηματισμός

Θεωρούμε καταρχάς την περίπτωση που ο μετασχηματισμός $(x,y)=\overrightarrow{T}(u,v)$ είναι γραμμικός. Ως γνωστόν, κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $\overrightarrow{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ αντιστοιχεί σε έναν πίνακα ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$(x,y)=\overrightarrow{T}(u,v)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=(au+bv,cu+dv).$$

Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι διαφορετική από 0, δηλαδή:

$$\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0.$$

(Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι αν η παραπάνω ορίζουσα είναι 0, τότε ο $\overrightarrow{T}$ δεν είναι αντιστρέψιμος και άρα δεν είναι 1-1. Προκειμένου όμως να εφαρμόσουμε αλλαγή μεταβλητής θέλουμε ο μετασχηματισμός μας να είναι 1-1. Θυμηθείτε για παράδειγμα την περίπτωση του απλού ολοκληρώματος που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.)

Παρατηρούμε επίσης ότι η απεικόνιση $\overrightarrow{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ είναι C^1 (για την ακρίβεια είναι C^∞). Επομένως, έχει νόημα να μιλήσουμε για τον πίνακα Jacobi της $\overrightarrow{T}$. Εύκολα υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι και βρίσκουμε

$$\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Δηλαδή ο πίνακας Jacobi ταυτίζεται με τον πίνακα που αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό $\overrightarrow{T}$.

Ας εξετάσουμε πρώτα την ειδική περίπτωση που ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι διαγώνιος. Έχουμε δηλαδή

$$(x, y) = \overrightarrow{T}(u, v) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (au, dv).$$

Για λόγους ευκολίας, υποθέτουμε ότι $a > 0$ και $d > 0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι μέσω του μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}$ μια ευθεία στο uv-επίπεδο παράλληλη στον u-άξονα (π.χ. η $v = v_0$) απεικονίζεται στο xy-επίπεδο σε μια ευθεία παράλληλη στον x-άξονα (ειδικότερα στην ευθεία $y = dv_0$). Ομοίως μια ευθεία παράλληλη στον v-άξονα απεικονίζεται στο xy-επίπεδο σε μια ευθεία παράλληλη στον y-άξονα. Ειδικότερα, ένα ορθογώνιο στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες απεικονίζεται σε ένα ορθογώνιο στο xy-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Αλλάζουν όμως οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Πιο συγκεκριμένα, αν το ορθογώνιο στο uv-επίπεδο έχει μήκος Δu και πλάτος Δv, τότε η εικόνα του στο xy-επίπεδο έχει διαστάσεις $\Delta x = a\Delta u$ και $\Delta y = d\Delta v$. Επομένως, καταλήγουμε στη σχέση

$$\Delta x \Delta y = ad\Delta u \Delta v.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το γινόμενο ad είναι η ορίζουσα του πίνακα Jacobi της $\overrightarrow{T}$ και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta x \Delta y = |\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u, v)| \Delta u \Delta v.$$

Θα δούμε τώρα την περίπτωση που ο πίνακας του μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}$ δεν είναι διαγώνιος. Αν έχουμε ένα ορθογώνιο στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες και διαστάσεις $\Delta u, \Delta v$, τότε η εικόνα του μέσω του $\overrightarrow{T}$ είναι ένα ορθογώνιο στο xy-επίπεδο το οποίο όμως τώρα δεν έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες. Το εμβαδό του ορθογωνίου αυτού δίνεται από τη σχέση (άσκηση)

$$\Delta x \Delta y = |\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| \Delta u \Delta v.$$

Επομένως, καταλήγουμε και πάλι στη σχέση

$$\Delta x \Delta y = |\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u, v)| \Delta u \Delta v.$$

Πολικός Μετασχηματισμός

Ως τελευταίο παράδειγμα, θα εξετάσουμε ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό. Ειδικότερα, θα ασχοληθούμε με τον πολικό μετασχηματισμό, ο οποίος όπως θα δούμε παίζει σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων με αλλαγή μεταβλητής. Τον μετασχηματισμό αυτόν ορίσαμε για πρώτη φορά στην Παράγραφο 3.6. Υπενθυμίζουμε ότι ο πολικός μετασχηματισμός ορίζεται ως εξής

$$\overrightarrow{T} \colon (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$(r,\theta) \mapsto \overrightarrow{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Ο $\overrightarrow{T}$ είναι 1-1, επί του $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (για το σημείο $(0,0)$ δεν ορίζονται πολικές συντεταγμένες). Επίσης, ο μετασηματισμός $\overrightarrow{T}$ είναι C^∞ και μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους και να βρούμε τον πίνακα Jacobi. Πράγματι, έχουμε

$$\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα Jacobi είναι

$$\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Υπενθυμίζουμε ακόμη από το Κεφάλαιο 3 ότι αν πάρουμε τα σημεία (r,θ) στο r,θ-επίπεδο με $r = r_0 > 0$, τότε οι εικόνες τους είναι τα σημεία $(x,y) = (r_0\cos\theta, r_0\sin\theta)$ για τα οποία ισχύει $\|(x,y)\| = \sqrt{r_0^2\cos^2\theta + r_0^2\sin^2\theta} = r_0$. Συνεπώς, η ευθεία $r = r_0$ απεικονίζεται στο xy-επίπεδο στον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα r_0. Επιπλέον, αν πάρουμε τα σημεία (r,θ) με $\theta = \theta_0 \in [0,2\pi)$, τότε οι εικόνες τους είναι τα σημεία $(x,y) = (r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$ τα οποία βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία με αρχή το $(0,0)$ που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των x γωνία θ_0.

Παίρνουμε τώρα ένα ορθογώνιο στο $r\theta$-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες και ας πούμε ότι οι κορυφές του είναι τα σημεία (r_0,θ_0), $(r_0+\Delta r,\theta_0)$, $(r_0,\theta_0+\Delta\theta)$ και $(r_0+\Delta r,\theta_0+\Delta\theta)$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εικόνα του ορθογωνίου μέσω του πολικού μετασχηματισμού είναι το κομμάτι του xy-επιπέδου το οποίο περικλείεται από τους κύκλους με ακτίνες r_0 και $r_0+\Delta r$ και από τις ημιευθείες με αρχή το $(0,0)$ που σχηματίζουν γωνίες θ_0 και $\theta_0+\Delta\theta$ με τον θετικό ημιάξονα των x. Αν τα $\Delta r, \Delta\theta$ είναι πάρα πολύ μικρά, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό το σχήμα είναι πάλι κατά προσέγγιση ένα ορθογώνιο με μήκη πλευρών $\Delta x = r_0 + \Delta r - r_0 = \Delta r$ και $\Delta y = r_0\Delta\theta$. Συνεπώς, το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$$\Delta x \cdot \Delta y = r_0\Delta\theta\Delta r.$$

Παρατηρούμε καταρχάς ότι σε αυτήν την περίπτωση το εμβαδό δεν μεταβάλλεται με τον ίδιο τρόπο, αλλά η μεταβολή εξαρτάται από το σημείο (r_0,θ_0) με κορυφή το οποίο έχουμε γράψει το ορθογώνιο. Συνεπώς, αν ξεκινήσουμε με το σημείο $(r, theta)$, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται $\Delta x\Delta y = r_0\Delta r\Delta\theta$.

Δεύτερον, παρατηρούμε ότι $r = \det\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(r,\theta)$ και, επομένως, ισχύει και πάλι η σχέση που είχαμε γράψει στην περίπτωση του γραμμικού μετασχηματισμού, δηλαδή

$$\Delta x \cdot \Delta y = |\det\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(r,\theta)|\Delta r\Delta\theta.$$

Από τα παραπάνω παραδείγματα, περιμένουμε πλέον το εξής αποτέλεσμα: Αν έχουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_B f(x,y)dxdy$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητών $x = \phi(u,v)$, $y =$

$\psi(u,v)$ τότε ισχύει η ισότητα

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int\int_{\tilde{B}} f(\phi(u,v),\psi(u,v)) \cdot |\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v)|dudv.$$

Στην παραπάνω σχέση $\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v)$ είναι ο πίνακας Jacobi του μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}(u,v) = (\phi(u,v),\psi(u,v))$ και $\tilde{B}$ είναι η εικόνα του B μέσω του $\overrightarrow{T}^{-1}$ (ο $\overrightarrow{T}$ πρέπει να είναι ένα προς ένα).

Το παραπάνω αποτέλεσμα, στο οποίο καταλήξαμε εμπειρικά μελετώντας κάποιες ειδικές περιπτώσεις, μπορεί να αποδειχθεί με αυστηρό τρόπο και για πιο γενικές περιπτώσεις. Έτσι έχουμε το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής για το διπλό ολοκλήρωμα.

Θεώρημα 8.4.1. *(Αλλαγή μεταβλητής στο διπλό ολοκλήρωμα) Έστω D ένα x-απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f\colon D \to \mathbb{R}$*

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\overrightarrow{T}: D^* \to D$

$$(u,v) \mapsto \overrightarrow{T}(u,v) = (\phi(u,v),\psi(u,v))$$

όπου D^* να είναι u-απλό σύνολο και η $\overrightarrow{T}$ είναι ένα προς ένα, επί του D, C^1-συνάρτηση με $\det\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v) \neq 0$ για κάθε $(u,v) \in D^*$.
(Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $\overrightarrow{T}$ μας δίνει την αλλαγή μεταβλητών $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$.)
Τότε ισχύει

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D^*} f(\phi(u,v),\psi(u,v)) \cdot |\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v)|dudv. \tag{8.3}$$

Στην σχέση (8.3), με $|\det\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v)|$ συμβολίζουμε την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα Jacobi του μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}(u,v) = (\phi(u,v),\psi(u,v))$. Θυμίζουμε ότι ο πίνακας Jacobi είναι

$$\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Επειδή ο μετασχηματισμός $\overrightarrow{T}$ μας δίνει την αλλαγή μεταβλητών $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ είναι βολικό να συμβολίζουμε τον πίνακα Jacobi με $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$. Δηλαδή έχουμε

$$\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

8.5 Τι υπολογίζουμε με το διπλό ολοκλήρωμα

Εμβαδό υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$
Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, τότε το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1 πάνω στο K μας δίνει το εμβαδό του K. Δηλαδή

$$V_2(K) = \int\int_K 1\, dxdy.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με όσα είπαμε στην Παράγραφο 7.1, με $V_2(K)$ συμβολίζουμε το εμβαδό του K.)

Όγκος στερεού σώματος
Έστω $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $f(x,y) \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in D$. Τότε το γράφημα της f

$$G_f = \{(x, y, f(x,y)) \,:\, (x,y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$$

είναι μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Επομένως, ορίζεται το στερεό B το οποίο περικλείεται από το σύνολο D στο xy-επίπεδο και το γράφημα της f. Με άλλα λόγια

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in D,\, 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}.$$

Ο όγκος αυτού του στερεού δίνεται από το ολοκλήρωμα της f, δηλαδή

$$V(B) = \int\int_D f(x,y)\, dxdy.$$

8.6 Ασκήσεις

8.6.1 Προετοιμασία για τις ασκήσεις

Ο πολικός μετασχηματισμός. Η αλλαγή από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή η αλλαγή μεταβλητών:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta.$$

χρησιμοποιείται ευρέως στον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων. Η ορίζουσα του πίνακα Jacobi έχει ήδη υπολογιστεί σε προηγούμενες ενότητες, αλλά θα επαναλάβουμε τον υπολογισμό:

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Επειδή $r > 0$, η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι πάλι r. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.4.1 ισχύει

$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy = \int\int_{D^*} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\, r\, drd\theta.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να το χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη. Σε κάθε άλλη περίπτωση αλλαγής μεταβλητών χρειάζεται φυσικά να υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα Jacobi.

Πώς βρίσκουμε το σύνολο D^*; Η αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα παρουσιάζει μια μεγάλη δυσκολία σε σχέση με τα απλά ολοκληρώματα, την οποία έχουμε επιμελώς αποφύγει να αναφέρουμε. Αν θέλουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (Θεώρημα 8.4.1) χρειάζεται να βρούμε το νέο σύνολο D^* πάνω στο οποίο θα γίνει πλέον η ολοκλήρωση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.4.1 το σύνολο D^* είναι η αντίστροφη εικόνα του D μέσω του μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}$, δηλαδή $D^* = \overrightarrow{T}^{-1}(D)$. Ωστόσο, η εικόνα ή η αντίστροφη εικόνα μιας συνάρτησης $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ δεν είναι εύκολο να βρεθεί.

Στη συνέχεια, θα δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα για τον πολικό μετασχηματισμό. Θα μας δίνεται δηλαδή ένα σύνολο D και θα προσπαθήσουμε να βρούμε την αντίστροφη εικόνα του μέσω του πολικού μετασχηματισμού. Σε γενικές γραμμές, υπάρχουν δύο τρόποι για να εργαστούμε: ο γεωμετρικός και ο αλγεβρικός. Ο γράφων αυτές τις σημειώσεις είναι υπέρμαχος του γεωμετρικού τρόπου, ωστόσο ο συνδυασμός και των δύο είναι η πιο ισχυρή επιλογή.

Παράδειγμα (1): δίσκος με κέντρο το $(0,0)$. Έστω ότι έχουμε τον δίσκο $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le a^2\right\}$ με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $a>0$. Για τα σημεία του δίσκου παρατηρούμε γεωμετρικά ότι είναι τα σημεία για τα οποία η γωνία θ κινείται σε όλο το διάστημα $[0,2\pi)$ και η απόσταση r από την αρχή των αξόνων ικανοποιεί $0<r\le a$. (Υπάρχει βέβαια και το σημείο $(0,0) \in D$ για το οποίο δεν ορίζονται οι πολικές συντεταγμένες. Όμως, όπως γνωρίζουμε ήδη από τα απλά ολοκληρώματα, ένα σημείο δεν παίζει ρόλο στην ολοκλήρωση. Συνεπώς, το σημείο αυτό παύει να μας απασχολεί!) Επομένως, για το σύνολο D, το αντίστοιχο σύνολο D^* είναι

$$D^* = \{(r,\theta) \,:\, 0<r\le a,\, \theta \in [0,2\pi)\}.$$

Το σύνολο D^* είναι r-απλό και θ-απλό. Η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες δίνει

$$\begin{aligned}\int\int_D f(x,y)\,dxdy &= \int\int_{D^*} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\, r\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\, r\,dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{a}\left(\int_0^{2\pi} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\, r\,d\theta\right)dr.\end{aligned}$$

Παράδειγμα (2): ο δίσκος με κέντρο το $(1,0)$ και ακτίνα $a=1$. Ο δίσκος περιγράφεται με καρτεσιανές συντεταγμένες ως εξής

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Πώς βρίσκουμε πού κινείται η γωνία θ; Παρατηρούμε ότι ο κατακόρυφος άξονα είναι η *εφαπτομένη* του κύκλου στο σημείο $(0,0)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι η γωνία θ κινείται στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Πώς βρίσκουμε πού κινείται η απόσταση r σπό την αρχή των αξόνων; Παρατηρούμε ότι η εξίσωση του κύκλου κέντρου $(1,0)$ και ακτίνας 1 (που είναι το σύνορο του D) είναι $(x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x=0$. Επομένως, σε πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση γίνεται

$$r^2-2r\cos\theta=0 \Leftrightarrow r=2\cos\theta.$$

Αυτό σημαίνει ότι αν βρισκόμαστε πάνω στην ημιευθεία που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε η απόσταση r από την αρχή των αξόνων κινείται μεταξύ 0 και $r\cos\theta$. Συνεπώς,

$$D^* = \left\{(r,\theta)\,:\,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\,0<r\le 2\cos\theta\right\}.$$

Το σύνολο D^* είναι θ-απλό (όχι όμως r-απλό). Η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες δίνει

$$\begin{aligned}\int\int_D f(x,y)\;dxdy &= \int\int_{D^*} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\,r\,drd\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\,r\,dr\right)d\theta.\end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι σε αυτήν την περίπτωση συνδυάσαμε τον γεωμετρικό με τον αλγεβρικό τρόπο.

Δεν θα αναφέρουμε άλλα παραδείγματα. Θα τα δούμε μέσω των ασκήσεων που ακολουθούν.

8.6.2 Ασκήσεις

Άσκηση 8.6.1. 1. *Να υπολογιστεί το εμβαδό $A(D)$ όπου D είναι ο κυκλικός δίσκος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $a>0$, δηλαδή $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2\le a^2\}$.*

2. *Να υπολογιστεί το εμβαδό $A(D)$, όπου D είναι το χωρίο που περικλείεται από μια έλλειψη, δηλαδή $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$ (με $a,b>0$).*

3. *Να υπολογιστεί το εμβαδό $A(K)$, όπου K είναι το καρδιοειδές $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2\le a(\sqrt{x^2+y^2}+x)\}$ (με $a>0$).*

Λύση.
1. Το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$A(D)=\int\int_D 1\,dxdy.$$

Για τον υπολογισό του παραπάνω ολοκληρώματος, θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες: $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$. Γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα του πολικού μετασχηματισμού είναι

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

Επιπλέον, για τα σημεία του δίσκου $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le a^2\right\}$ η απόσταση r από την αρχή των αξόνων παίρνει τιμές μεταξύ 0 και a ($r = \sqrt{x^2+y^2} \le a$) και η γωνία θ κινείται στο $[0, 2\pi)$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$A(D) = \int\int_D 1\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}d\theta = 2\pi\frac{a^2}{2} = \pi a^2.$$

(Όπως αναμενόταν προέκυψε ο γνωστός τύπος για το εμβαδό κυκλικού δίσκου ακτίνας a.)

2. Το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$A(D) = \int\int_D 1\,dxdy.$$

Επειδή το χωρίο D περικλείεται από μια έλλειψη, ο πολικός μετασχηματισμός δεν είναι ιδιαίτερα βολικός. Ωστόσο, μια μικρή παραλλαγή αυτού του μετασχηματισμού, μπορεί να μας λύσει το πρόβλημα. Ειδικότερα, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$x = a\,r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = b\,r\sin\theta.$$

Υπολογίζουμε τώρα την ορίζουσα του πίνακα Jacobi αυτού του μετασχηματισμού

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta. \end{vmatrix} = abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr.$$

Επειδή $a > 0$, $b > 0$ και $r > 0$, έχουμε ότι η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας είναι abr. Επιπλέον, για τα σημεία του χωρίου D, η γωνία θ κινείται σε όλο το διάστημα $[0, 2\pi)$. Για το r παρατηρούμε ότι $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2} = r^2$. Επομένως, έχουμε $0 < r \le 1$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} A(D) &= \int\int_D 1\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\,drd\theta = ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\,drd\theta \\ &= ab\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta = ab\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta = ab\pi. \end{aligned}$$

3. Για πληροφορίες σχετικά με την καρδιοειδή καμπύλη $x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2+y^2} + x)$ παραπέμπουμε στο Παράρτημα 11.1. Εδώ θα υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείει η καμπύλη.

Το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$A(K) = \int\int_K 1\, dxdy.$$

[Ανοίγουμε μια παρένθεση για να αναφέρουμε τον παρακάτω
Γενικό κανόνα: *Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε εμβαδό και το χωρίο παρουσιάζει οποιουδήποτε είδους συμμετρία, τότε εκμεταλλευόμαστε πάντοτε τη συμμετρία αυτή.*
Σε κάποιες περιπτώσεις, η άσκηση μπορεί να λυθεί και χωρίς να λάβουμε υπόψιν τη συμμετρία του σχήματος. Ακόμη όμως και σε αυτές τις περιπτώσεις, η εκμετάλλευση της συμμετρίας κάνει τον υπολογισμό συνήθως πιο απλό.]

Παρατηρούμε ότι το χωρίο K είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα $x'x$. Επομένως,

$$A(K) = \int\int_K 1\, dxdy = 2\int\int_{K^+} 1\, dxdy,$$

όπου με K^+ συμβολίζουμε το κομμάτι του χωρίου K που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή $K^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq a(\sqrt{x^2+y^2}+x) \text{ και } x \geq 0\}$. Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta.$$

Η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού είναι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. Μένει να βρούμε τα καινούρια άκρα ολοκλήρωσης. Το χωρίο K^+ περικλείεται από την καμπύλη $x^2+y^2 = a\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)$, όπου $y > 0$, και τον άξονα $x'x$. Η εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$x^2+y^2 = a\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right) \Leftrightarrow r^2 = a\left(r + r\cos\theta\right) \Leftrightarrow r = a\left(1+\cos\theta\right).$$

Επιπλέον, ο άξονας $x'x$ είναι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(0,0)$ (αυτό μπορείτε είτε να το πιστέψετε ή να ανατρέξετε στο Παράρτημα 11.1 για να δείτε μια απόδειξη). Επομένως, για τα σημεία του χωρίου K^+, η γωνία θ κινείται στο διάστημα $[0,\pi]$. Όταν τώρα βρισκόμαστε πάνω στην ημιευθεία με αρχή το O η οποία σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\theta \in [0,\pi]$, τότε παρατηρούμε ότι για τα σημεία του K^+ ισχύει $0 < r < a(1+\cos\theta)$. Επομένως, το νέο σύνολο ολοκλήρωσης είναι

$$K^* = \left\{(r,\theta) \,:\, \theta \in [0,\pi],\ 0 < r < a(1+\cos\theta)\right\}.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$
\begin{aligned}
A(K) &= 2\int\int_{K^+} 1\,dxdy = 2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,drd\theta \\
&= 2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} \frac{1}{2}(r^2)'\,drd\theta = \int_0^{\pi}\left[r^2\right]_{r=0}^{a(1+\cos\theta)}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \qquad (\text{διότι } \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}) \\
&= a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\theta=0}^{\pi} \\
&= \frac{3}{2}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

■

Άσκηση 8.6.2. *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int_D \left(1 - x^2 - 4y^2\right)^{3/2} dxdy,$$

όπου D είναι το χωρίο $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+4y^2 \le 1\right\}$.

Λύση. Το χωρίο D περικλείεται από μια έλλειψη:

$$x^2+4y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη άσκηση, σε τέτοιες περιπτώσεις δεν βοηθάει ο πολικός μετασχηματισμός, αλλά μια παραλλαγή αυτού. Ειδικότερα, θέτουμε

$$x = r\cos\theta \quad y = \frac{1}{2}r\sin\theta.$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα Jacobi:

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & \frac{1}{2}r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}r\cos^2\theta + \frac{1}{2}r\sin^2\theta = \frac{1}{2}r.$$

Η εξίσωση της έλλειψης γίνεται

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2 \sin^2\theta}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1.$$

Επομένως, για τα σημεία στο σύνολο D, η γωνία θ κινείται στο διάστημα $[0, 2\pi)$ και το r παίρνει τιμές $0 < r \leq 1$. Έτσι το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_D \left(1 - x^2 - 4y^2\right)^{3/2} dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\cos^2\theta - 4\frac{1}{4}r^2\sin^2\theta\right)^{3/2} \frac{1}{2} r\, drd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{3/2} r\, drd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{3/2} r\, dr\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{3/2} r\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \quad \text{(το ‘μέσα’ ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από } \theta\text{)} \\
&= \frac{1}{2}2\pi\int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{3/2} r\, dr = \pi\int_0^1 \frac{2}{-10}\left[\left(1 - r^2\right)^{5/2}\right]' dr \\
&= \pi\left(-\frac{1}{5}\right)\left[\left(1 - r^2\right)^{5/2}\right]_{r=0}^1 = \frac{\pi}{5}
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 8.6.3. *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int_D x^2\sqrt{4x^2 + 9y^2}\, dxdy,$$

όπου D είναι το χωρίο $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$.

Λύση. Το χωρίο D περικλείεται από μία έλλειψη

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Όπως και σε προηγούμενες ασκήσεις, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$x = 3r\cos\theta \quad y = 2r\sin\theta.$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα Jacobi:

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 3\cos\theta & -3r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 6r\cos^2\theta + 6r\sin^2\theta = 6r.$$

Η εξίσωση της έλλειψης γίνεται

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3^2r^2\cos^2\theta}{3^2} + \frac{2^2r^2\sin^2\theta}{2^2} \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1.$$

Επομένως, για τα σημεία του χωρίου D, η γωνία θ κινείται στο διάστημα $[0, 2\pi)$ και το r παίρνει τιμές $0 < r \leq 1$. Έτσι, από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταλητών, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
I =& \int\int_D x^2\sqrt{4x^2+9y^2}\,dxdy \\
=& \int_0^{2\pi}\int_0^1 9r^2\cos^2\theta\sqrt{4\cdot 9r^2\cos^2\theta + 9\cdot 4r^2\sin^2\theta}\,\cdot\, 6r\,drd\theta \\
=& \int_0^{2\pi}\int_0^1 9r^2\cos^2\theta\sqrt{36r^2}\,\cdot\, 6r\,drd\theta \\
=& 9\cdot 6\cdot 6\cdot \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos^2\theta\,drd\theta \\
=& 324\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\left(\int_0^1 r^4\,dr\right)d\theta \\
=& 324\left(\int_0^1 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right) \\
=& 324\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right) \\
=& 324\cdot\frac{1}{5}\cdot\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\theta=0}^{2\pi} \\
=& \frac{324}{5}\cdot\frac{2\pi}{2} \\
=& \frac{324}{5}\cdot\pi.
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 8.6.4. *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy,$$

όπου D είναι το χωρίο $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \geq 4 \text{ και } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16} \leq 1\right\}$.

Λύση. Το χωρίο D βρίσκεται εκτός της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 4$ και εντός της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Επειδή στην περίπτωση που έχουμε δίσκο βοηθάει ο πολικός μετασχηματισμός, ενώ στην περίπτωση της έλλειψης βοηθάει μια παραλλαγή αυτού, δεν θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα I απευθείας, αλλά θα το σπάσουμε σε δύο ολοκληρώματα, ως εξής: Θέτουμε $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ να είναι ο δίσκος κέντρου $O(0, 0)$ ακτίνας 2, και $D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right\}$ να είναι το εσωτερικό της έλλειψης. Τότε το ολοκλήρωμα I γράφεται

$$I = \int\int_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\int_{D_2} \left(x^2 + y^2\right) dxdy - \int\int_{D_1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = I_2 - I_1.$$

(Το γεγονός ότι μπορούμε να σπάσουμε το ολοκλήρωμα I σε δύο ολοκληρώματα είναι φυσιολογικό και αναμενόμενο. Ωστόσο, το έχουμε αποδείξει και με αυστηρό τρόπο, βλ. Άσκηση 7.5.1)
Υπολογίζουμε τώρα χωριστά τα ολοκληρώματα I_1 και I_2.

Υπολογισμός του I_1:
Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Η ορίζουσα του πίνακα Jacobi είναι $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα I_1 γίνεται

$$I_1 = \int\int_{D_1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\int_{D_1^*} \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right) r\, drd\theta = \int\int_{D_1^*} r^3\, drd\theta.$$

Για να βρούμε το σύνολο D_1^* παρατηρούμε ότι για τα σημεία του δίσκου D_1, η γωνία θ των πολικών συντεταγμένων κινείται σε όλο το διάστημα $[0, 2\pi]$. Επιπλέον, όσον αφορά την απόσταση r από την αρχή των αξόνων ισχύει $0 \leq r \leq 2$. Άρα, $D_1^* = \{(r, \theta) \,:\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 2\}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I_1 = \int\int_{D_1^*} r^3\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\, drd\theta = \int_0^2 r^3\, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^2 \cdot 2\pi = 8\pi.$$

Υπολογισμός του I_2:
Επειδή το σύνολο $D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right\}$ είναι το εσωτερικό μιας έλλειψης, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών: $x = 3r\sin\theta$, $y = 4r\sin\theta$. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα Jacobi:

$$\det\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} 3\cos\theta & -3r\sin\theta \\ 4\sin\theta & 4r\cos\theta \end{vmatrix} = 12r\cos^2\theta + 12r\sin^2\theta = 12r.$$

Επιπλέον, για τα σημεία του χωρίου D_2 η γωνία θ κινείται σε όλο το διάστημα $[0, 2\pi]$. Ακόμη, η εξίσωση της έλλειψης γίνεται

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3^2r^2\cos^2\theta}{3^2} + \frac{2^2r^2\sin^2\theta}{2^2} \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1.$$

Επομένως, για τα σημεία του χωρίου D, η μεταβλητή r παίρνει τιμές $0 \leq r \leq 1$. Έτσι, από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταλητών, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int\int_{D_2} \left(x^2+y^2\right)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(9r^2\cos^2\theta + 16r^2\sin^2\theta\right) 12r\, drd\theta \\
&= 12\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(9\cos^2\theta + 16\sin^2\theta\right) r^3\, drd\theta = 12\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(9+7\sin^2\theta\right) r^3\, drd\theta \\
&= 12\int_0^{2\pi} \left(9+7\sin^2\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\, dr\right) d\theta = 12\int_0^{2\pi} \left(9+7\sin^2\theta\right)\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^1 d\theta \\
&= \frac{12}{4}\int_0^{2\pi} \left(9+7\sin^2\theta\right) d\theta = 3\int_0^{2\pi}\left(9+7\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\left(\frac{25}{2} - \frac{7}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = 3\int_0^{2\pi}\left(\frac{25}{2}\theta - \frac{7}{4}\sin 2\theta\right)' d\theta \\
&= 3\left[\frac{25}{2}\theta - \frac{7}{4}\sin 2\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi} = 75\pi.
\end{aligned}$$

Υπολογισμός του I:
Τελικά, για το ζητούμενο ολοκλήρωμα I παίρνουμε

$$I = I_2 - I_1 = 75\pi - 8\pi = 67\pi.$$

■

Άσκηση 8.6.5. *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int_D x\, dxdy,$$

όπου D είναι το χωρίο $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ και } x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$.

Λύση. Το χωρίο D είναι η τομή δύο κυκλικών δίσκων: $D = D_1 \cap D_2$, όπου $D_1 = \left\{(x,y) \,:\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}$ είναι ο δίσκος με κέντρο το σημείο $(1,0)$ και ακτίνα 1, και $D_2 = \left\{(x,y) \,:\, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$ ο δίσκος με κέντρο το σημείο $(0,1)$ και ακτίνα 1.
Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε τον πολικό μετασχηματισμό: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, η ορίζουσα του οποίου είναι

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int\int_D x\, dxdy = \int\int_{D^*} r\cos\theta \cdot r\, drd\theta = \int\int_{D^*} r^2\cos\theta\, drd\theta.$$

Μένει να βρούμε το σύνολο D^* πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι το χωρίο D βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου. Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η εφαπτομένη του δίσκου D_2 στο σημείο $(0,0)$ και ο άξονας $y'y$ είναι η εφαπτομένη του D_1 στο σημείο $(0,0)$, συμπεραίνουμε ότι για τα σημεία του χωρίου D η γωνία θ των πολικών συντεταγμένων κινείται σε όλο το διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Θα βρούμε τώρα για τα σημεία του D πού κινείται η απόσταση r από την αρχή των αξόνων. Για την περιφέρεια C_1: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, η εξίσωσή της σε πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$\begin{aligned} C_1 :\ (x-1)^2 + y^2 = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r\cos\theta = 0 \Leftrightarrow r^2 = 2r\cos\theta \\ &\Leftrightarrow r = 2\cos\theta. \end{aligned}$$

Για την περιφέρεια C_2: $x^2 + (y-1)^2 = 1$, η εξίσωσή της σε πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$\begin{aligned} C_2 :\ x^2 + (y-1)^2 = 1 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta = 0 \Leftrightarrow r^2 = 2r\sin\theta \\ &\Leftrightarrow r = 2\sin\theta. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι οι δύο περιφέρειες C_1 και C_2 τέμνονται στην αρχή των αξόνων και στο σημείο $(1,1)$ το οποίο βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας. Βλέπουμε τώρα ότι αν η γωνία θ είναι μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{4}$, τότε το χωρίο D φράσσεται από την περιφέρεια C_2. Με άλλα λόγια, αν κινηθούμε πάνω σε μια ημιευθεία με αρχή $O(0,0)$ που σχηματίζει γωνία $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ με τον ημιάξονα Ox, τότε για τα σημεία του χωρίου D ισχύει $0 < r < 2\sin\theta$.

Αν τώρα η γωνία θ κινείται στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε το D φράσσεται από την περιφέρεια C_1. Επομένως, αν $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε $0 < r < 2\cos\theta$. Συνεπώς, το σύνολο D^* είναι

$$D^* = \left\{(r,\theta) \,:\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\, 0 < r < 2\sin\theta\right\} \cup \left\{(r,\theta) \,:\, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\, 0 < r < 2\cos\theta\right\}.$$

Άρα, το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$I = \int\int_{D^*} r^2\cos\theta\, dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sin\theta} r^2\cos\theta\, dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2\cos\theta\, dr d\theta.$$

Υπολογίζουμε τώρα χωριστά καθένα από τα ολοκληρώματα.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cos\theta \, dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left(\int_0^{2\sin\theta} r^2 \, dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{2\sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \cdot \frac{2^3 \sin^3\theta}{3} \, d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \cdot \sin^3\theta \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta (\sin\theta)' \, d\theta \\
&= \frac{8}{3} \left[\frac{\sin^4\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{12} \sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{12} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \cos\theta \, dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left(\int_0^{2\cos\theta} r^2 \, dr \right) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{2\cos\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{2^3 \cos^3\theta}{3} \, d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta\right)^2 \, d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{8}{12} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) \, d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right)' d\theta \\
&= \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$
I = I_1 + I_2 = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
$$

■

Η επόμενη άσκηση είναι παρόμοια με την Άσκηση 8.6.5.

Άσκηση 8.6.6. *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int_D xy\,dxdy,$$

όπου D *είναι το χωρίο* $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 \leq 4$ *και* $x^2 + (y-2)^2 \leq 4\big\}$.

Λύση. Το χωρίο D είναι η τομή δύο κυκλικών δίσκων: $D = D_1 \cap D_2$, όπου $D_1 = \big\{(x,y) \,:\, (x-2)^2 + y^2 \leq 4\big\}$ είναι ο δίσκος με κέντρο το σημείο $(2,0)$ και ακτίνα 2, και $D_2 = \big\{(x,y) \,:\, x^2 + (y-2)^2 \leq 4\big\}$ ο δίσκος με κέντρο το σημείο $(0,2)$ και ακτίνα 2.
Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε τον πολικό μετασχηματισμό: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, η ορίζουσα του οποίου είναι

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int\int_D xy\,dxdy = \int\int_{D^*} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r\,drd\theta = \int\int_{D^*} r^3 \sin\theta\cos\theta\,drd\theta.$$

Μένει να βρούμε το σύνολο D^* πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση. Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια συλλογιστική με την Άσκηση 8.6.5, προκύπτει ότι το σύνολο D^* είναι:

$$D^* = \Big\{(r,\theta) \,:\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\, 0 < r < 4\sin\theta\Big\} \cup \Big\{(r,\theta) \,:\, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 < r < 4\cos\theta\Big\}.$$

Άρα, το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \int\int_{D^*} r^3\sin\theta\cos\theta\,drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4\sin\theta} r^3\sin\theta\cos\theta\,drd\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta} r^3\sin\theta\cos\theta\,drd\theta. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα χωριστά καθένα από τα ολοκληρώματα.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4\sin\theta} r^3\sin\theta\cos\theta\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta\left(\int_0^{4\sin\theta} r^3\,dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{4\sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta\cdot\frac{4^4\sin^4\theta}{4}\,d\theta \\ &=64\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5\theta\cos\theta\,d\theta = 64\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5\theta(\sin\theta)'\,d\theta \\ &=64\left[\frac{\sin^6\theta}{6}\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{64}{6}\sin^6\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 = &\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} r^3 \sin\theta\cos\theta\, dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \left(\int_0^{4\cos\theta} r^3\, dr \right) d\theta \\
= &\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{4\cos\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{4^4\cos^4\theta}{4}\, d\theta \\
= &64 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin\theta\, d\theta = -64 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta (\cos\theta)'\, d\theta \\
= &-64 \left[\frac{\cos^6\theta}{6} \right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{64}{6} \left(\cos^6\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^6\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{32}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^6 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$
I = I_1 + I_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.
$$

■

Άσκηση 8.6.7. *(i) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$
I = \int\int_D \sin(x^2 + y^2)\, dxdy,
$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου και φράσσεται από τις περιφέρειες $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ (με $0 < a < b$) και από τις ευθείες $y = 0$ και $x = \sqrt{3}y$.

(ii) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$
J = \int\int_D \ln(x^2 + y^2)\, dxdy,
$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου και φράσσεται από τις περιφέρειες $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ (με $0 < a < b$).

Λύση. (i) Το σύνολο D είναι τμήμα ενός δακτυλίου

$$
D = \left\{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}} x \right\}.
$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Η ορίζουσα του πολικού μετασχηματισμού είναι $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$. Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \int\int_D \sin(x^2+y^2)\,dxdy = \int\int_{D^*} \sin(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) r\,drd\theta \\ &= \int\int_{D^*} r\cdot\sin(r^2)\,drd\theta. \end{aligned}$$

Μένει να προσδιορίσουμε το σύνολο D^*. Εδώ τα πράγματα είναι σχετικά απλά. Η ευθεία $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία ίση με $\frac{\pi}{6}$. Συνεπώς, για τα σημεία του χωρίου D η γωνία θ των πολικών συντεταγμένων κινείται στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Επιπλέον, η εξίσωση της περιφέρειας $x^2+y^2=a^2$ σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow r^2=a^2 \Leftrightarrow r=a.$$

Αντίστοιχα, η εξίσωση της περιφέρειας $x^2+y^2=b^2$ είναι $r=b$. Συνεπώς, για τα σημεία του συνόλου D ισχύει $a\le r\le b$. Τελικά, δηλαδή έχουμε

$$D^* = \left\{(r,\theta) \mid a\le r\le b,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{6}\right\}.$$

(Παρατηρείστε ότι το σύνολο D^* είναι ένα ορθογώνιο στο (r,θ)-επίπεδο.)
Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} I &= \int\int_{D^*} r\cdot\sin(r^2)\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_a^b r\cdot\sin(r^2)\,drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_a^b r\cdot\sin(r^2)\,dr\right)d\theta = \left(\int_a^b r\cdot\sin(r^2)\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\left(\int_a^b r\cdot\sin(r^2)\,dr\right) = \frac{\pi}{6}\left(\int_a^b -\frac{1}{2}\cdot(\cos(r^2))'\,dr\right) \\ &= -\frac{\pi}{12}\left[\cos(r^2)\right]_{r=a}^b \\ &= \frac{\pi}{12}\left(\cos(a^2)-\cos(b^2)\right). \end{aligned}$$

(ii) Για το ολοκλήρωμα J παρατηρούμε ότι το σύνολο D είναι το κομμάτι του δακτυλίου $\Delta(O;a,b)$ το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο (όπου $\Delta(O;a,b)$ συμβολίζουμε τον δακτύλιο με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ μικρή ακτίνα a και μεγάλη ακτίνα b, δηλαδή $\Delta(O;a,b) = \{(x,y) : a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$). Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες: $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$. Η ορίζουσα του πολικού μετασχηματισμού είναι κατά τα γνωστά $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$J = \int\int_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy = \int\int_{D^*}\ln(r^2)r\,drd\theta = 2\int\int_{D^*} r\ln r\,drd\theta.$$

Το χωρίο D^* προσδιορίζεται απλά σε αυτήν την περίπτωση. Για τα σημεία του D η γωνία θ των πολικών συντεταγμένων κινείται στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επιπλέον, για την απόσταση r από την αρχή των αξόνων ισχύει $a \le r \le b$. Συνεπώς,

$$D^* = \left\{(r, \theta), : \ a \le r \le b, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Το σύνολο D^* είναι ένα ορθογώνιο στο (r, θ)-επίπεδο. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
J &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b r \ln r \, dr d\theta = 2\left(\int_a^b r \ln r \, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\int_a^b r \ln r \, dr\right) = \frac{\pi}{2}\left(\int_a^b 2r \ln r \, dr\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_a^b (r^2)' \ln r \, dr\right) = \frac{\pi}{2}\left(\left[r^2 \ln r\right]_{r=a}^b - \int_a^b r^2 \frac{1}{r} \, dr\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(b^2 \ln b - a^2 \ln a - \int_a^b r \, dr\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(b^2 \ln b - a^2 \ln a - \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=a}^b\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(b^2 \ln b - a^2 \ln a - \frac{b^2 - a^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 8.6.8. *Θεωρούμε το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης* 1 *στο σύνολο* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le x, \ x \le 1\}$, *δηλαδή*

$$I = \int\int_D dx dy.$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I *με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο να χρησιμοποιήσετε καρτεσιανές συντεταγμένες και στον δεύτερο πολικές συντεταγμένες.*

Λύση. Το σύνολο D στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ και $B(1, 1)$ μαζί με το εσωτερικό του τριγώνου. Επομένως, το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1 θα μας δώσει το εμβαδό του τριγώνου.

Πρώτος τρόπος: καρτεσιανές συντεταγμένες. Το σύνολο D είναι x-απλό και y-απλό. Ας το δούμε ως x-απλό:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \, 0 \le y \le x\right\}.$$

Από το Θεώρημα Fubini (Θεώρημα 8.2.6), παίρνουμε

$$I = \int\int_D dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 [y]_{y=0}^x \, dx = \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}.$$

(Όπως αναμενόταν, προέκυψε το εμβαδό του τριγώνου.)

Δεύτερος τρόπος: πολικές συντεταγμένες. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int\int_D dxdy = \int\int_{D^*} r \, drd\theta.$$

Βρίσκουμε τώρα το σύνολο D^*. Παρατηρούμε ότι η πλευρά OA του τριγώνου βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ ενώ η πλευρά OB πάνω στη διχοτόμο $y = x$. Επομένως, για τα σημεία του συνόλου D, η γωνία θ των πολικών συντεταγμένων κινείται μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{4}$. Όσον αφορά την απόσταση r από την αρχή των αξόνων, έχουμε τα εξής. Η πλευρά AB του τριγώνου βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x = 1$. Σε πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση της ευθείας παίρνει τη μορφή

$$x = 1 \Leftrightarrow r\cos\theta = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Αν τώρα κινηθούμε πάνω στην ημιευθεία με αρχή O που σχηματίζει γωνία $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ με τον ημιάξονα Ox, τότε για τα σημεία του D παρατηρούμε ότι ισχύει $0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$. Τελικά έχουμε

$$D^* = \left\{ (r,\theta) \,:\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\, 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta} \right\}.$$

Το σύνολο D^* είναι θ-απλό σύνολο στο (r,θ)-επίπεδο. Επομένως, το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_D dxdy = \int\int_{D^*} r \, drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r \, drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{\frac{1}{\cos\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2\theta} \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan\theta)' \, d\theta = \frac{1}{2} \left[\tan\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(Όπως αναμενόταν, προέκυψε πάλι το εμβαδό του τριγώνου.)

■

Άσκηση 8.6.9. *Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int_K \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy,$$

όπου $K = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ 1 \leq 2y \leq 2\}$.

Λύση. Το χωρίο K είναι το κομμάτι του δισκού $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\big\}$ το οποίο βρίσκεται πάνω από την οριζόντια ευθεία $y = \frac{1}{2}$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε τον πολικό μετασχηματισμό

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta.$$

Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int\int_K \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy = \int\int_{K^*} \frac{r^3\sin^3\theta}{(r^2)^{3/2}} \cdot r\,drd\theta = \int\int_{K^*} r\sin^3\theta\,drd\theta.$$

Μένει να προσδιορίσουμε το σύνολο K^* στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση. Το σύνολο K είναι το κομμάτι του δίσκου D το οποίο βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = \frac{1}{2}$. Η ευθεία αυτή τέμνει την περιφέρεια του δίσκου στα σημεία $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Η ημιευθεία με αρχή το O που διέρχεται από το σημείο A σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ίση με $\frac{\pi}{6}$. (Πράγματι $\widehat{AOx} = \widehat{OAL}$, όπου $L(0,\frac{1}{2})$ και $\sin\widehat{OAL} = \frac{1}{2}$.) Επίσης, η ημιευθεία με αρχή το O η οποία διέρχεται από το σημείο B σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Συνεπώς, για τα σημεία του χωρίου K η γωνία θ των πολικών συντεταγμένων κινείται στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Θα βρούμε τώρα πού κινείται η απόσταση r από την αρχή των αξόνων. Καταρχάς, η εξίσωση της περιφέρειας $x^2+y^2 = 1$ σε πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1.$$

Επίσης, η εξίσωση της ευθείας $y = \frac{1}{2}$ σε πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r\sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\sin\theta}.$$

Αν τώρα κινούμαστε πάνω στην ημιευθεία με αρχή το O η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα Ox, τότε για τα σημεία του χωρίου K παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{2\sin\theta} \leq r \leq 1.$$

Συνεπώς, το σύνολο K^* είναι

$$K^* = \left\{(r,\theta) : \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6},\ \frac{1}{2\sin\theta} \leq r \leq 1\right\}.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα I. Έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_{K^*} r\sin^3\theta\, dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} r\sin^3\theta\, dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3\theta \left(\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} r\, dr\right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3\theta \left(1-\frac{1}{4\sin^2\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\sin^3\theta - \frac{1}{4}\sin\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta \left(\sin^2\theta - \frac{1}{4}\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta \left(1-\cos^2\theta - \frac{1}{4}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta \left(\frac{3}{4} - \cos^2\theta\right) d\theta \qquad (\text{θέτουμε } \cos\theta = u) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\frac{sqrt3}{2}}^{\frac{-\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - u^2\right) du = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - u^2\right) du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}u - \frac{u^3}{3}\right]_{u=-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3\cdot 2^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3\cdot 2^3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

■

Άσκηση 8.6.10. *(i) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int_K \frac{(x+y)^4}{(x-y)^{5/2}}\, dxdy,$$

όπου $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 1,\ 1 \leq x-y \leq 3\}$.

(ii) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$J = \int\int_K \frac{(x+2y)^3}{(2x+5y^2+2xy)^{3/2}}\, dxdy,$$

όπου $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+5y^2+2xy \leq 1,\ \frac{1}{2} \leq x+2y \leq 1\}$.

Λύση. (i) Το χωρίο K βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες $y=-x-1$, $y=-x+1$ και ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες $y=x-1$ και $y=x-3$. Με κάποιους στοιχειώδεις υπολογισμούς βλέπουμε ότι το K είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,0)$, $(0,-1)$, $(1,-2)$ και $(2,-1)$.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα I δεν μας βοηθάει ούτε ο πολικός μετασχηματισμός ούτε και κάποια παραλλαγή αυτού. Ωστόσο, μια προσεκτική ματιά στο σύνολο K και μια δεύτερη προσεκτική ματιά στην υπό ολοκλήρωση συνάρτηση αποκαλύπτουν τον κατάλληλο μετασχηματισμό: Θέτουμε

$$x + y = u \quad \text{και} \quad x - y = v$$

ή ισοδύναμα

$$x = \frac{u+v}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Υπολογίζουμε τώρα την ορίζουσα του πίνακα Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού:

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 8.4.1 χρειαζόμαστε την απόλυτη τιμή της παραπάνω ορίζουσας, δηλαδή $|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| = \frac{1}{2}$. Άρα, το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$I = \int\int_K \frac{(x+y)^4}{(x-y)^{5/2}}\,dxdy = \int\int_{K^*} \frac{u^4}{v^{5/2}}\,\frac{1}{2}\,dudv = \frac{1}{2}\int\int_{K^*} \frac{u^4}{v^{5/2}}\,dudv.$$

Μένει να βρούμε το σύνολο K^*. Εδώ όμως τα πράγματα είναι μάλλον απλά. Αν θυμηθούμε το σύνολο $K = \{(x,y) \,:\, -1 \le x+y \le 1,\, 1 \le x-y \le 3\}$ και το μετασχηματισμό που έχουμε κάνει, προκύπτει εύκολα ότι

$$K^* = \{(u,v) \,:\, -1 \le u \le 1,\, 1 \le v \le 3\}.$$

Άρα, το σύνολο K^* είναι ένα ορθογώνιο στο uv-επίπεδο. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\int_{K^*} \frac{u^4}{v^{5/2}}\,dudv = \frac{1}{2}\int_1^3\int_{-1}^1 \frac{u^4}{v^{5/2}}\,dudv = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{v^{5/2}}\left(\int_{-1}^1 u^4\,du\right)dv \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{v^{5/2}}\left[\int_{-1}^1 \frac{u^5}{5}\right]_{u=-1}^1 dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\int_1^3 \frac{1}{v^{5/2}}dv = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{v^{5/2}}\left[\int_{-1}^1 \frac{u^5}{5}\right]_{u=-1}^1 dv \\ &= \frac{1}{5}\int_1^3 v^{-\frac{5}{2}}dv = \frac{1}{5}\cdot\frac{-2}{3}\left[v^{-\frac{3}{2}}\right]_{v=1}^3 dv = \frac{-2}{15}\left(3^{-\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2}{15}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

■

Άσκηση 8.6.11. *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I_\alpha = \int\int_{D_\alpha} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy,$$

όπου $D_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le \alpha^2\right\}$ *(*$\alpha > 0$*).*

Λύση. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, κάνουμε αλλάγη σε πολικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta.$$

Ως γνωστόν, η ορίζουσα του πίνακα Jacobi είναι

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0.$$

Το σύνολο D_α στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση είναι ο δίσκος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\alpha > 0$. Για τα σημεία αυτού του δίσκου η γωνία θ κινείται στο $[0, 2\pi)$ και για την απόσταση r από την αρχή των αξόνων ισχύει $0 < r < \alpha$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int\int_{D_\alpha} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^\alpha e^{-r^2}\cdot r\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\alpha e^{-r^2}\cdot r\,dr\right)d\theta \\ &= \left(\int_0^\alpha e^{-r^2}\cdot r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{-2}\cdot\int_0^\alpha\left(e^{-r^2}\right)'dr \\ &= -\pi\left[e^{-r^2}\right]_{r=0}^{\alpha} = -\pi\left(e^{\alpha^2}-1\right) = \pi\left(1-e^{-\alpha^2}\right) \end{aligned}$$

■

Άσκηση 8.6.12. *Να αποδείξετε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Λύση. Για κάθε πραγματικό αριθμό $a > 0$ θεωρούμε τα παρακάτω σχήματα.

- D_a είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $a > 0$. Δηλαδή

$$D_a = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le a^2\right\}.$$

- K_a είναι το τετράγωνο

$$K_a = [-a,a]\times[-a,a]\,.$$

- $D_{a\sqrt{2}}$ είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $a\sqrt{2} > 0$. Δηλαδή

$$D_a\sqrt{2} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 2a^2\right\}.$$

Η σχέση μεταξύ αυτών των σχημάτων είναι η εξής.

1. Οι πλευρές του τετραγώνου K_a εφάπτονται στον δίσκο D_a. (Στη Γεωμετρία, λέμε ότι ο δίσκος είναι εγγεγραμένος στο τετράγωνο.)

2. Η περιφέρεια του δίσκου $D_{a\sqrt{2}}$ περνά απότ τις κορυφές του τετραγώνου K_a. (Στη Γεωμετρία, λέμε ότι το τετράγωνο είναι εγγεγραμένο στον κύκλο.)

Ειδικότερα, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ότι τα χωρία αυτά ικανοποιούν τους εγκλεισμούς:

$$D_a \subset K_a \subset D_{a\sqrt{2}}. \tag{8.4}$$

Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής (άρα ολοκληρώσιμη σε κάθε ορθογώνιο ή γενικότερα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$). Από τη σχέση (8.4) και επειδή η f είναι παντού θετική, προκύπτει ότι

$$\int\int_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int\int_{K_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int\int_{D_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \tag{8.5}$$

Από την προηγούμενη άσκηση, έχουμε

$$\int\int_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right),$$

και όμοια

$$\int\int_{D_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi\left(1 - e^{-(a\sqrt{2})^2}\right) = \pi\left(1 - e^{-2a^2}\right).$$

Επιπλέον, K_a είναι το τετράγωνο $K_a = [-a,a]\times[-a,a]$. Άρα, από Θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}\int\int_{K_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)dy \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2}dy.\end{aligned}$$

Το πώς θα συμβολίσουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης δεν επηρεάζει το ολοκλήρωμα. Επομένως, καθένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ίσο με $\int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt$. Άρα,

$$\int\int_{K_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt\right)^2.$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (8.5) βρίσκουμε

$$\pi\left(1 - e^{-a^2}\right) \leq \left(\int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt\right)^2 \leq \pi\left(1 - e^{-2a^2}\right),$$

ή ισοδύναμα

$$\sqrt{\pi}\sqrt{1 - e^{-a^2}} \leq \int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt \leq \sqrt{\pi}\sqrt{1 - e^{-2a^2}}.$$

Περνάμε στο όριο για $a \to +\infty$:

$$\sqrt{\pi} \lim_{a\to\infty} \sqrt{1-e^{-a^2}} \le \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-t^2} dt \le \sqrt{\pi} \lim_{a\to\infty} \sqrt{1-e^{-2a^2}},$$

δηλαδή

$$\sqrt{\pi} \le \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \le \sqrt{\pi}.$$

Άρα, τελικά

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

■

Σχόλιο. Στα πλαίσια του Απειροστικού Λογισμού, έχουμε διατυπώσει το Θεώρημα Fubini και το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών μόνο για σύνολα που είναι x-απλά ή y-απλά. Ειδικότερα, τέτοια σύνολα είναι και συμπαγή και άρα φραγμένα.
Ωστόσο χρησιμοποιώντας γνώσεις Θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης Lebesgue μπορούμε να αποδείξουμε αυτά τα θεωρήματα και για πιο γενικά χωρία του $\mathbb{R}^2$. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι **θετική** και συνεχής συνάρτηση (ή Lebesgue ολοκληρώσιμη), τότε

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta,$$

που είναι ο τύπος αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες για το διπλό ολοκλήρωμα, όταν το ολοκλήρωμα ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}^2$.
Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, η λύση της Άσκησης 8.6.12 απλοποιείται αρκετά, καθώς δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε τα σχήματα $D_a, K_a, D_{a\sqrt{2}}$ όπως κάναμε προηγουμένως. Δίνουμε παρακάτω αυτήν την λύση.

Λύση της Άσκησης 8.6.12. Θεωρούμε τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini στο $\mathbb{R}^2$, υπολογίζουμε

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

(το πώς θα συμβολίσουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης δεν παίζει ρόλο)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)^2.$$

Υπολογίζουμε τώρα το ίδιο ολοκλήρωμα με πολικές συντεταγμένες.

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, drd\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = 2\pi \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} e^{-r^2}\, r\, dr \\ &= 2\pi \lim_{M\to\infty}\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{M} = -\pi \lim_{M\to\infty}\left(e^{-M^2}-1\right) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \pi$$

και άρα τελικά

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

Άσκηση 8.6.13. *Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον λημνίσκο* $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$, *όπου* $a>0$.

Λύση. Για πληροφορίες σχετικά με την καμπύλη $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$ που λέγεται λημνίσκος, παραπέμπουμε στο Παράρτημα 11.2. Εδώ θα υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό.
Αν συμβολίσουμε με K το χωρίο που περικλείει ο λημνίσκος, τότε το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = \int\int_K 1\, dxdy.$$

Ακολουθώντας τον γενικό κανόνα που αναφέραμε στην Άσκηση 8.6.1, θα εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία που παρουσιάζει το χωρίο K. Έχουμε, λοιπόν, ότι

$$E = 4\int\int_{K^+} dxdy,$$

όπου K^+ είναι το κομμάτι του K που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή $K^+ = K\cap\{(x,y)\ :\ x\geq 0,\, y\geq 0\}$. Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες: $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$. Η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού είναι ως γνωστόν $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\int_{K^+} dxdy = \int\int_{K^*} r\, drd\theta.$$

Μένει να βρούμε το σύνολο K^* στο οποίο γίνεται τώρα η ολοκλήρωση. Αν πάρουμε το κομμάτι του λημνίσκου $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$ το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, τότε η καμπύλη αυτή έχει εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$ την ευθεία $y=x$ (για να δείτε μια απόδειξη ανατρέξτε στο Παράρτημα 11.2). Επομένως, για τα σημεία του χωρίου K^+, η γωνία θ των πολικών συντεταγμένων κινείται μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{4}$.
Θα βρούμε τώρα πού κινείται η απόσταση r από την αρχή των αξόνων. Η εξίσωση του λημνίσκου σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right) &\Leftrightarrow (r^2)^2 = 2a^2\left(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right)\\ &\Leftrightarrow (r^2)^2 = 2a^2r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right) \Leftrightarrow r^2 = 2a^2\cos(2\theta)\\ &\Leftrightarrow r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}.\end{aligned}$$

Επομένως, αν σταθεροποιήσουμε μια γωνία $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και κινηθούμε πάνω στην ημιευθεία με αρχή O που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα Ox, τότε βλέπουμε ότι για τα σημεία του K^+ η απόσταση r ικανοποιεί $0 \le r \le a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}$. Έτσι, το σύνολο K^* στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση είναι

$$K^* = \left\{(r,\theta)\,:\, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\, 0\le r\le a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}\right\}.$$

Το σύνολο K^* είναι θ-απλό και το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int\int_{K^*} r\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}} r\,drd\theta.$$

Υπολογίζουμε τώρα το τελευταίο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}} r\,drd\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\left[r^2\right]_{r=0}^{a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\,d\theta\\ &= \frac{a^2}{2}\left[\sin 2\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) = \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Θυμηθείτε τώρα ότι το ζητούμενο εμβαδό E είναι το τετραπλάσιο του παραπάνω ολοκληρώματος. Άρα, τελικά για το εμβαδό του χωρίου που περικλείει ο λημνίσκος έχουμε

$$E = 4\cdot\frac{a^2}{2} = 2a^2.$$

■

Άσκηση 8.6.14. *Για κάθε $\epsilon>0$ συμβολίζουμε με Δ_ϵ τον δακτύλιο με κέντρο $(0,0)$, μικρή ακτίνα ϵ και μεγάλη ακτίνα 1. Δηλαδή,*

$$\Delta_\epsilon = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,\epsilon^2 < x^2+y^2 < 1\right\}.$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1.

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{\|(x,y)\|}\,dxdy$$

2.

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{\|(x,y)\|^2}\,dxdy$$

Λύση. Υπενθυμίζουμε καταρχάς ότι για κάθε διάνυσμα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, η νόρμα του ορίζεται ως εξής:

$$\|(x,y)\| = \sqrt{(x,y)\cdot(x,y)} = \sqrt{x^2+y^2}$$

(όπου $(x,y)\cdot(x,y)$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο).

1. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{\|(x,y)\|}\,dxdy = \int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

Θέτουμε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$. Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$. Τέλος, είναι εύκολο να δούμε ότι για τα σημεία του δακτυλίου Δ_ϵ οι πολικές τους συντεταγμένες ικανοποιούν $0\le\theta\le 2\pi$ και $\epsilon\le r\le 1$. Άρα, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1\frac{1}{r}\,r\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 drd\theta = 2\pi\left(1-\epsilon\right).$$

Επομένως,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{\|(x,y)\|}\,dxdy = \lim_{\epsilon\to 0^+}2\pi\left(1-\epsilon\right) = 2\pi.$$

2. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε

$$\begin{aligned}\int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{\|(x,y)\|^2}\,dxdy &= \int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1\frac{1}{r^2}\,r\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1\frac{1}{r}\,drd\theta = \int_0^{2\pi} -\ln\epsilon\,d\theta = -2\pi\ln\epsilon.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\int_{\Delta_\epsilon}\frac{1}{\|(x,y)\|^2}\,dxdy = \lim_{\epsilon\to 0^+} -2\pi\ln\epsilon = \infty.$$

■

Κεφάλαιο 9

Το Θεώρημα Green

9.1 Εισαγωγή

Ο στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να μελετήσουμε όσο γίνεται πιο αναλυτικά ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της Διανυσματικής Ανάλυσης, το Θεώρημα Green.

Πολλά είναι τα στοιχεία εκείνα που συνηγορούν στη σπουδαιότητα αυτού του θεωρήματος. Πρώτον, όπως θα φανεί από τη διατύπωσή του, το Θεώρημα Green συνδέει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με το διπλό ολοκλήρωμα. Δεύτερον, συνδέει τον ολοκληρωτικό λογισμό με τον διαφορικό λογισμό. Τρίτον, έχει σημαντικές εφαρμογές σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, όπως για παράδειγμα στη Μιγαδική Ανάλυση. Τέταρτον, έχει πολλές και σημαντικές εφαρμογές σε άλλες επιστήμες πέραν των Μαθηματικών.

Αναφέρουμε εν συντομία ένα ενδεικτικό παράδειγμα από τη Φυσική. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο στο επίπεδο

$$\overrightarrow{F}: A \to \mathbb{R},$$

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

όπου A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι $\overrightarrow{F}$ είναι C^1 συνάρτηση. Το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα πεδίο δυνάμεων (π.χ. ηλεκτρικό ή μαγνητικό) το οποίο δρα στο υποσύνολο A του επιπέδου. Επίσης, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα πεδίο ταχυτήτων.
Θεωρούμε τώρα μια καμπύλη Γ *μέσα στο σύνολο* A, η οποία παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη είναι κλειστή, απλή, C^1 και λεία. Μπορούμε τώρα να πάρουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (β′ είδους) του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στην καμπύλη Γ, $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$. Στην περίπτωση που το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι ένα πεδίο δυνάμεων το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ υπολογίζει το έργο που παράγει η δύναμη κατά

μήκος της καμπύλης Γ. Στην περίπτωση ενός πεδίου ταχυτήτων, το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζει τη ροή του πεδίου κατά μήκος της καμπύλης Γ.

Υπενθυμίζουμε τώρα ότι ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ ορίζεται ως εξής

$$\operatorname{curl}\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^3$$
$$\operatorname{curl}\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}.$$

Το Θεώρημα Green μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ χρησιμοποιώντας τον στροβιλισμό του $\overrightarrow{F}$ (χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε το ίδιο το $\overrightarrow{F}$).

9.2 Τα σύνολα στο Θεώρημα Green - Ο θετικός προσανατολισμός του συνόρου

Προτού περάσουμε στη διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος, αφιερώνουμε αυτήν την ενότητα στα σύνολα για τα οποία ισχύει το Θεώρημα Green.
Υπενθυμίζουμε ότι αν $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ είναι μια παραμετρική καμπύλη στο επίπεδο, τότε η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ λέγεται κλειστή αν η αρχή και το πέρας της συμπίπτουν, δηλαδή $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{r}(b)$. Επίσης, η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ λέγεται απλή αν δεν τέμνει τον εαυτό της, δηλαδή $\overrightarrow{r}(t_1) \neq \overrightarrow{r}(t_2)$ για κάθε $t_1, t_2 \in [a,b)$. Τέλος, αν η $\overrightarrow{r}$ είναι C^1, τότε λέμε ότι είναι λεία αν $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$.
Το Θεώρημα Green ισχύει για ανοικτά και φραγμένα σύνολα $G \subseteq \mathbb{R}^2$ που το σύνορό τους αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος καμπύλες οι οποίες είναι απλές, κλειστές, κατά τμήματα C^1. Στη συνέχεια, θα δούμε μερικά παραδείγματα τέτοιων συνόλων.

Παραδείγματα.
(1) Ο δίσκος $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < a^2\}$ (όπου $a > 0$) είναι ένα τέτοιο σύνολο. Το σύνορο του δίσκου είναι η περιφέρεια $\partial G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2\}$ και είναι μια απλή, κλειστή, C^1 καμπύλη.
(2) Το εσωτερικό μιας έλλειψης, $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$ είναι ένα ακόμη παράδειγμα. Το σύνορο του G είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ η οποία είναι απλή, κλειστή, C^1 καμπύλη.
(3) Σχεδιάζουμε ένα οποιοδήποτε τρίγωνο ή ορθογώνιο στο επίπεδο και παίρνουμε G να είναι το εσωτερικό του. Το σύνορο του G είναι μια απλή, κλειστή, κατά τμήματα C^1 καμπύλη.
(4) Γενικότερα, σχεδιάζουμε μια οποιαδήποτε απλή, κλειστή, κατά τμήματα C^1 καμπύλη Γ στο επίπεδο και παίρνουμε G να είναι το εσωτερικό της. Τότε το σύνορο του G είναι η καμπύλη Γ, που έχει όλες τις επιθυμητές ιδιότητες.

(5) Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα, το σύνορο του G αποτελείται από μία μόνο καμπύλη. Υπάρχουν φυσικά και περιπτώσεις, όπου το σύνορο του G αποτελείται από δύο ή περισσότερες καμπύλες. Για παράδειγμα, ας πάρουμε έναν δακτύλιο

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < b^2\right\},$$

όπου $0 < a < b$. Το σύνορο του G αποτελείται από δύο απλές, κλειστές, C^1 καμπύλες, που είναι οι περιφέρειες με κέντρο το σημείο (x_0, y_0) και ακτίνες a και b.
(6) Γενικότερα, σχεδιάστε δύο απλές, κλειστές, κατά τμήματα C^1, λείες καμπύλες Γ_1 και Γ_2 στο επίπεδο ώστε η Γ_1 να βρίσκεται στο εσωτερικό της Γ_2. Θέτουμε G να είναι χωρίο που περικλείεται από τις δυο καμπύλες. Τότε το ∂G αποτελείται από τις δύο καμπύλες Γ_1 και Γ_2 που έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες.
(7) Θέτουμε $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 5^2,\, (x-2)^2 + y^2 > 1 \text{ και } x^2 + (y-2)^2 > 1\right\}$. Το σύνολο G είναι το χωρίο που βρίσκεται εντός της περιφέρειας με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα 5 και έξω από την περιφέρεια κέντρου $(2, 0)$ ακτίνας 1 και την περιφέρεια κέντρου $(0, 2)$ ακτίνας 1. Το σύνορο του G αποτελείται από τις τρεις αυτές περιφέρειες.
(8) Γενικότερα, σχεδιάστε στο επίπεδο μια απλή, κλειστή, κατά τμήματα C^1 καμπύλη Γ και στο εσωτερικό αυτής N καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ οι οποιές είναι επίσης απλές, κλειστές, κατά τμήματα C^1 και δεν τέμνονται ανά δύο. Παίρνουμε G το σύνολο που βρίσκεται εντός της μεγάλης καμπύλης Γ και έξω από τις μικρότερες καμπύλες $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$. Τότε το σύνορο του G αποτελείται από $N + 1$ απλές, κλειστές, λείες καμπύλες, $\partial G = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_N$.

9.2.1 Ο θετικός προσανατολισμός του συνόρου

Έστω Γ μια καμπύλη Jordan στο xy-επίπεδο, δηλαδή μια απλή και κλειστή καμπύλη. Όπως αναφέραμε στην Παράγραφο 6.6, όταν την καμπύλη Γ τη διατρέχουμε με τέτοιο τρόπο ώστε το εσωτερικό της να βρίσκεται στα αριστερά μας, τότε η καμπύλη Γ λέγεται *θετικά προσανατολισμένη* (ως προς το εσωτερικό της).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα από τα σύνολα που αναφέραμε στα παραπάνω παραδείγματα, δηλαδή ένα ανοικτό, φραγμένο σύνολο G του οποίου το σύνορο αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος απλές, κλειστές, κατά τμήματα C^1 καμπύλες. Για να ισχύει το Θεώρημα Green, πρέπει το σύνορο του συνόλου G να επιλεγεί **θετικά προσανατολισμένο**. Το τέχνασμα για να βρίσκουμε τον σωστό προσανατολισμό του συνόρου είναι το ακόλουθο.

Φανταστείτε τον εαυτό σας να είναι ένα σημείο στο επίπεδο, και να περπατάτε πάνω στο σύνορο του συνόλου G. Αν κινούμενοι πάνω στο σύνορο, το σύνολο G βρίσκεται στα αριστερά σας, τότε λέμε ότι το σύνορο του G είναι θετικά προσανατολισμένο ή ότι έχει τη θετική φορά.

Συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό ∂G^+ προκειμένου να δείξουμε ότι στο σύνορο του G θεωρούμε τη θετική φορά, όπως περιγράφεται στο τέχνασμα. Μερικά παραδείγματα θα ξεκαθαρίσουν το τοπίο.

Παραδείγματα.
(1) Ας πάρουμε την περίπτωση που το σύνολο G είναι ένας δίσκος. Τότε, το σύνορο του G είναι μια περιφέρεια. Αν κινηθούμε πάνω στην περιφέρεια με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού, τότε το σύνολο G βρίσκεται συνέχεια στα αριστερά μας. Συνεπώς, η θετική φορά στο ∂G είναι η αντιωρολογιακή. [1]
Ακριβώς τα ίδια ισχύουν στην περίπτωση που το σύνολο G είναι μια έλλειψη ή γενικότερα το εσωτερικό μιας απλής κλειστής καμπύλης.

(2) Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν το σύνολο G είναι ένας δακτύλιος με κέντρο κάποιο σημείο (x_0, y_0) μεγάλη ακτίνα R και μικρή ακτίνα r. Όταν κινούμαστε στην εξωτερική περιφέρεια, για να βρίσκεται το σύνολο G στα αριστερά μας, πρέπει να κινούμαστε με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού. Όταν όμως κινούμαστε στην μικρή περιφέρεια κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r, για να βρίσκεται το G στα αριστερά μας, πρέπει να κινηθούμε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Συνεπώς, στην μεν εξωτερική περιφέρεια η θετική φορά είναι η αντιωρολογιακή, στην δε εσωτερική περιφέρεια η θετική φορά είναι αυτή των δεικτών του ρολογιού.

(3) Γενικότερα, θεωρήστε μια απλή κλειστή καμπύλη Γ και στο εσωτερικό αυτής δύο πιο μικρές απλές κλειστές καμπύλες γ_1 και γ_2. Έστω G το σύνολο που περικλείεται από από αυτές τις καμπύλες, δηλαδή

$$G = \varepsilon\sigma\Gamma \cap \varepsilon\xi\gamma_1 \cap \varepsilon\xi\gamma_2.$$

Το σύνορο του G αποτελείται από τις καμπύλες Γ, γ_1 και γ_2:

$$\partial G = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \gamma_2.$$

Μπορείτε να βρείτε την κατάλληλη φορά σε κάθε καμπύλη, ώστε το ∂G να είναι θετικά προσανατολισμένο;
Απάντηση: Στην εξωτερική καμπύλη Γ πρέπει να πάρουμε την αντιωρολογιακή φορά, ενώ στις καμπύλες γ_1 και γ_2 πρέπει να κινηθούμε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

9.3 Το Θεώρημα Green στο επίπεδο

Αφού εκθειάσαμε τόσο πολύ το Θεώρημα Green, δεν θα παρατείνουμε και άλλο την αγωνία σας. Περνάμε κατευθείαν στη διατύπωση του θεωρήματος (μπορείτε δίπλα στο θεώρημα να συμπληρώσετε όσα αστεράκια θέλετε).

Θεώρημα 9.3.1 (Το θεώρημα Green). *Έστω D ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ώστε το σύνορο του D, ∂D, να αποτελείται από k το πλήθος ($k \in \mathbb{N}$) απλές, κλειστές, κατά τμήματα C^1 καμπύλες. Έστω ακόμη $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ ένα διανυσματικό πεδίο το οποίο*

[1] Στους αγώνες στίβου, οι δρομείς τρέχουν στους διαδρόμους με τέτοιο τρόπο, ώστε ο στίβος να βρίσκεται συνέχεια στα αριστερά τους. Άρα, διαγράφουν τη διαδρομή ακολουθώντας τη θετική φορά.

είναι C^1 σε περιοχή του $\overline{D}$. Τότε ισχύει ο τύπος

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Παρατηρήσεις.

(1) Υπενθυμίζουμε ότι αν έχουμε μια καμπύλη Γ και πάρουμε την αντίθετη καμπύλη, τότε $\int_{-\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ (δείτε την Παράγραφο 6.5). Συνεπώς, για να ισχύει ο τύπος του Green, πρέπει στο σύνορο του D να έχουμε πάρει τη σωστή φορά. Δηλαδή, πρέπει το ∂D να είναι θετικά προσανατολισμένο, σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

(2) Στην πράξη, το Θεώρημα Green εφαρμόζεται σε κάθε ‘‘λογικό’’ χωρίο του $\mathbb{R}^2$. Είναι μάλλον απίθανο να συναντήσετε χωρίο στο οποίο δεν ισχύει το θεώρημα. Επομένως, πρέπει να προσέχουμε δύο πράγματα. Πρώτον, στο σύνορο του συνόλου να παίρνουμε τον σωστό προσανατολισμό. Δεύτερον, το διανυσματικό πεδίο να είναι C^1 σε περιοχή του $\overline{D}$.

Προετοιμασία για την απόδειξη. Σε αυτό το σημείο, φρεσκάρουμε κάποιες γνώσεις στις οποίες θα στηριχτεί η απόδειξη του Θεωρήματος Green (ως γνωστόν, η επανάληψη είναι η μητέρα της μάθησης).

(1) Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.(Θ.Θ.Απ.Λ.) Αν $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε η ϕ' να είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε ισχύει

$$\int_a^b \phi'(t)\, dt = \phi(b) - \phi(a).$$

(2) Το Θεώρημα Fubini. (Θεώρημα 8.2.6) Έστω D ένα x-απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Δηλαδή $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, όπου $\phi_1, \phi_2\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $f\colon D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει το διπλό ολοκλήρωμα της f στο σύνολο D και είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

(3) Άσκηση. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ συμπαγές σύνολο και $f\colon D \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x, y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in D$. Αν $\int\int_D f(x, y)\, dxdy = 0$ τότε η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο D.

(4) Το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο, το οποίο είναι και πολυγωνικά συνεκτικό. Έστω ακόμη $f\colon D \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\nabla f(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in D$. Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(5) Ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου. Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και $\overrightarrow{F}\colon A \to \mathbb{R}^3$ ένα C^1-διανυσματικό πεδίο με

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))\,.$$

Ο *στοβιλισμός* του $\overrightarrow{F}$ είναι ένα νέο διανυσματικό πεδίο, $\mathrm{curl}\overrightarrow{F}\colon A\to\mathbb{R}^3$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{curl}\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left|\begin{matrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{matrix}\right|_{(x,y,z)}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $(x,y,z)\in A$. Το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ λέμε ότι είναι *αστρόβιλο στο* A αν ισχύει $\mathrm{curl}\overrightarrow{F}(x,y,z)=(0,0,0)$ για κάθε $(x,y,z)\in A$.

Έστω τώρα A ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}\colon A\to\mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ για κάθε $(x,y)\in A$. Τότε το $\overrightarrow{F}$ μπορούμε να το δούμε ως διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ με

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=(P(x,y),Q(x,y),0)\,.$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω ορισμό για τον στροβιλισμό διανυσματικού πεδίου, βρίσκουμε ότι ο στροβιλισμός του $\overrightarrow{F}$ δίνεται από

$$\mathrm{curl}\overrightarrow{F}(x,y)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

για κάθε $(x,y)\in A$. Επομένως, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}\colon A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ είναι αστρόβιλο στο A αν

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial P}{\partial y}(x,y),$$

για κάθε $(x,y)\in A$.

(6) Ορισμός του επικαμπυλίου ολοκληρώματος διανυσματικού πεδίου. Έστω $A\subset\mathbb{R}^2$ και $\overrightarrow{F}\colon A\to\mathbb{R}^2$ ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο με $\overrightarrow{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$. Θεωρούμε μια καμπύλη Γ μέσα στο σύνολο A η οποία παραμετρικοποιείται από την C^1-συνάρτηση $\overrightarrow{r}\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{r}(t)=(x(t),y(t))$. Τότε, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος της Γ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}&=\int_a^b\overrightarrow{F}\,(\overrightarrow{r}(t))\cdot\overrightarrow{r}'(t)\,dt\\&=\int_a^b\Big[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big]\,dt.\end{aligned}$$

Πολλές φορές συμβολίζουμε το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με $\int_\Gamma Pdx+Qdy$. Δηλαδή, έχουμε

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy=\int_a^b\Big[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big]\,dt,$$

όπου $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ είναι μια παραμέτρηση της Γ.

(7) Συντηρητικό διανυσματικό πεδίο. Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F} A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ καλείται *συντηρητικό* αν υπάρχει συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in A$. Αν επιπλέον, η f είναι C^1 συνάρτηση (δηλαδή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους), τότε το $\vec{F}$ είναι συνεχές και έχει νοήμα να μιλήσουμε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ κατά μήκος μιας καμπύλης $\Gamma \subset A$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε αποδείξει ότι (Θεώρημα 6.6.5)

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = f\big(\vec{r}(b)\big) - f\big(\vec{r}(a)\big).$$

Ειδικότερα, αν η καμπύλη Γ είναι κλειστή, τότε

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Υπενθυμίζουμε, τέλος, ότι αν ένα C^1 διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό, τότε συνεπάγεται ότι είναι και αστρόβιλο. Το αντίθετο δεν είναι εν γένει σωστό (βλέπε Πόρισμα 6.6.6).

Απόδειξη του Θεωρήματος Green.
Περίπτωση 1. Παίρνουμε πρώτα την περίπτωση που το σύνολο D είναι x-απλό και το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι της μορφής $\vec{F} = (P, 0)$ (δηλαδή η συνάρτηση $Q(x,y)$ είναι ταυτοτικά μηδέν). Θα δείξουμε ότι ισχύει ο τύπος του Green σε αυτήν την ειδική περίπτωση, δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$\int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Καταρχάς, αφού το D είναι x-απλό σύνολο, γράφεται στη μορφή

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b,\, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\},$$

όπου $\phi_1, \phi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υπολογίζουμε πρώτα το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}
\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= -\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dxdy \qquad (\text{διότι } Q = 0) \\
&= -\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dy \right) dx \quad (\text{Θεώρημα Fubini}) \\
&= -\int_a^b \Big[P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x)) \Big] dx \quad (\text{από Θ.Θ.Απ.Λ.})
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = -\int_a^b \Big[P(x,\phi_2(x)) - P(x,\phi_1(x))\Big]\, dx. \tag{9.1}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Υπενθυμίζουμε ότι στο σύνορο του D πρέπει να επιλέξουμε τη θετική φορά. Εδώ τα πράγματα είναι απλά. Αφού το D είναι x-απλό, το σύνορό του αποτελείται από μια απλή κλειστή καμπύλη. Για να μένει το σύνολο D στα αριστερά μας, πρέπει στην καμπύλη αυτή να κινηθούμε με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Άρα, η θετική φορά είναι η αντιωρολογιακή. Γράφουμε, τώρα, το σύνορο του D ως άθροισμα τεσσάρων καμπυλών

$$\partial D = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4,$$

όπου:
• Γ_1 είναι το κομμάτι του ∂D^+ που ξεκινάει από το σημείο $(a,\phi_1(a))$ και καταλήγει στο σημείο $(b,\phi_1(b))$ (ουσιαστικά είναι το γράφημα της ϕ_1).
• Γ_2 είναι το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $(b,\phi_1(b))$ και πέρας το $(b,\phi_2(b))$.
• Γ_3 είναι το κομμάτι του ∂D^+ με αρχή το σημείο $(b,\phi_2(b))$ και πέρας το σημείο $(a,\phi_2(a))$ (είναι δηλαδή το γράφημα της ϕ_2 μόνο που το διατρέχουμε με αντίθετη φορά).
• Γ_4 είναι το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $(a,\phi_2(a))$ και πέρας το σημείο $(a,\phi_1(a))$.
Έτσι, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\overrightarrow{F}$ πάνω στο ∂D^+ σπάει σε τέσσερα ολοκληρώματα:

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\Gamma_4} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}.$$

Υπολογίζουμε τώρα καθένα από αυτά τα τέσσερα ολοκληρώματα.
• Η καμπύλη Γ_1 είναι το γράφημα της ϕ_1. Επομένως, παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r}_1(t) = (t,\phi_1(t))$ με $t\in[a,b]$. Άρα, $\overrightarrow{r}'_1(t) = (1,\phi_1'(t))$ και

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \int_a^b \overrightarrow{F}\big(\overrightarrow{r}_1(t)\big)\cdot \overrightarrow{r}'_1(t)dt \overset{(Q=0)}{=} \int_a^b \Big(P(\overrightarrow{r}_1(t)),0\Big)\cdot(1,\phi_1'(t))\,dt\\ &= \int_a^b P\big(\overrightarrow{r}_1(t)\big)\,dt = \int_a^b P\big(t,\phi_1(t)\big)\,dt.\end{aligned}$$

• Η καμπύλη Γ_2 είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r}_2(t) = (b,t)$ όπου $t\in\big(\phi_1(b),\phi_2(b)\big)$. Συνεπώς, $\overrightarrow{r}'_2(t) = (0,1)$ για κάθε t και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} \overrightarrow{F}\big(\overrightarrow{r}_2(t)\big)\cdot \overrightarrow{r}'_2(t)\;dt = \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} \big(P(b,t),0\big)\cdot(0,1)\,dt\\ &= \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} 0dt = 0.\end{aligned}$$

• Η καμπύλη Γ_3 είναι το γράφημα της ϕ_2 που το οποίο όμως διατρέχουμε με αντίθετη φορά. Άρα, η αντίθετη καμπύλη $-\Gamma_3$ παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r}_3(t) = (t, \phi_2(t))$ με $t \in [a, b]$. Επομένως, $\overrightarrow{r}'_3(t) = (1, \phi_2'(t))$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_a^b \overrightarrow{F}\big(\overrightarrow{r}_3(t)\big) \cdot \overrightarrow{r}'_3(t)dt \overset{(Q=0)}{=} \int_a^b \Big(P\big(\overrightarrow{r}_3(t)\big), 0\Big) \cdot (1, \phi_2'(t))\, dt \\ &= \int_a^b P\big(\overrightarrow{r}_3(t)\big)\, dt = \int_a^b P\big(t, \phi_2(t)\big)\, dt.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{-\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_a^b P\big(t, \phi_2(t)\big)\, dt.$$

• Η καμπύλη Γ_4 είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r}_4(t) = (a, t)$ όπου $t \in \big(\phi_2(a), \phi_1(a)\big)$. Συνεπώς, $\overrightarrow{r}_4(t) = (0, 1)$ για κάθε t και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_4} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{\phi_2(a)}^{\phi_1(a)} \overrightarrow{F}\big(\overrightarrow{r}_4(t)\big) \cdot \overrightarrow{r}'_4(t)\ dt = \int_{\phi_2(a)}^{\phi_1(a)} \big(P(a, t), 0\big) \cdot (0, 1)\, dt \\ &= \int_{\phi_2(a)}^{\phi_1(a)} 0dt = 0.\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\Gamma_4} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \\ &= \int_a^b P\big(t, \phi_1(t)\big)\, dt - \int_a^b P\big(t, \phi_2(t)\big)\, dt.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \Big[P\big(t, \phi_1(t)\big) - P\big(t, \phi_2(t)\big)\Big]\, dt. \tag{9.2}$$

Από τις ισότητες (9.1) και (9.2) έχουμε το ζητούμενο.

Περίπτωση 2. Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν το σύνολο D είναι y-απλό και το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι της μορφής $\overrightarrow{F} = (0, Q)$ (δηλαδή η συνάρτηση P είναι ταυτοτικά μηδέν στο D). Εργαζόμενοι με έναν παρόμοιο τρόπο όπως και στην Περίπτωση 1, μπορούμε να δούμε ότι ισχύει ο τύπος του Green και σε αυτήν την περίπτωση.

Περίπτωση 3. Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι το σύνολο D είναι και x-απλό και y-απλό, και το $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο (δηλαδή δεν έχουμε κάποια ειδική μορφή για το $\overrightarrow{F}$). Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\overrightarrow{F} = (P, Q) = (P, 0) + (0, Q),$$

και συνδυάζοντας τις Περιπτώσεις 1 και 2 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{\partial D^+} (P,0) \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\partial D^+} (0,Q) \cdot d\overrightarrow{r} \\ &= \int\int_D \left(0 - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - 0\right) dxdy \\ &= \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.\end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει το Θεώρημα Green και σε αυτήν την περίπτωση. □

Σημείωση. Αποδείξαμε το Θεώρημα Green μόνο στην περίπτωση που το σύνολο D είναι x-απλό και y-απλό. Ωστόσο, ο τύπος του Green

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

ισχύει και στη γενικότερη περίπτωση που το σύνορο του D αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος απλές, κλειστές, λείες καμπύλες. Για να κάνουμε την απόδειξη σε αυτήν την περίπτωση, χωρίζουμε το σύνολο D σε απλά σύνολα και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Green σε καθένα από αυτά. Επομένως, αυτό το μέρος της απόδειξης είναι γεωμετρικό και δεν χρησιμοποιεί καινούρια εργαλεία από πλευράς Ανάλυσης. Για το λόγο αυτό, δεν θα μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες.

Πότε χρησιμοποιούμε τον τύπο του Green.
(1) Αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παρουσιάζει "δυσκολίες ", τότε με τον τύπο του Green μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα για να το υπολογίσουμε. Αλλά και ντίστροφα, αν το διπλό ολοκλήρωμα παρουσιάζει "δυσκολίες ", τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επικαμπύλιο για να το υπολογίσουμε.

(2) Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Green στα αστρόβιλα διανυσματικά πεδία που δεν είναι συντηρητικά.

9.4 Ασκήσεις

9.4.1 Απλές εφαρμογές του Θεωρήματος Green

Άσκηση 9.4.1. *Να επαληθευτεί ο τύπος του Green όταν το σύνολο D είναι ο μοναδιαίος δίσκος, δηλαδή $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, και για το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y, y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Σε αυτήν την άσκηση μας δίνεται ένα σύνολο D και ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P,Q)$ και μας ζητείται να επαληθεύσουμε τον τύπο του Green. Αυτό που πρέπει να κάνουμε σε τέτοιου είδους ασκήσεις είναι

1. Να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στο θετικά προσανατολισμένο σύνορο του D.

2. Να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

3. Να διαπιστώσουμε ότι τα αποτελέσματα που βγάλαμε είναι ίσα.

Λύση. Υπολογίζουμε καταρχάς το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$. Εδώ βρίσκεται το πιο λεπτό σημείο της άσκησης. Πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί ώστε να πάρουμε το σύνορο του D με τη θετική φορά. Ανατρέξτε στην Παράγραφο 9.2.1 και βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να βρίσκετε σωστά τον θετικό προσανατολισμό στο σύνορο ενός συνόλου.

Στη συγκεκριμένη άσκηση, το σύνολο D είναι ο μοναδιαίος δίσκος. Επομένως, το σύνορο ∂D^+ του D είναι η περιφέρεια κέντρου O ακτίνας 1 την οποία διατρέχουμε με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Μια παραμέτρηση για αυτήν την καμπύλη είναι $\overrightarrow{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t)$. Η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι C^1 με $\overrightarrow{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\cos t, \sin t\right) \cdot \left(-\sin t, \cos t\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos t + \sin t, \sin t\right) \cdot \left(-\sin t, \cos t\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\cos t \sin t - \sin^2 t + \sin t \cos t\right)\, dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = \frac{-1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{t=0}^{2pi} = -\pi.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$. Έχουμε $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y, y)$, οπότε $P(x,y) = x + y$ και $Q(x,y) = y$. Επομένως, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ και το διπλό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D (-1)\, dxdy = (-1) \cdot \text{εμβαδό}(D) = -\pi.$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς βλέπουμε ότι πράγματι ισχύει ο τύπος του Green:

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

■

Άσκηση 9.4.2. *Να επαληθευτεί ο τύπος του Green στην ακόλουθη περίπτωση:*
- *το σύνολο D είναι το* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 4,\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \geq 1\right\}$,
- *το διανυσματικό πεδίο είναι* $\overrightarrow{F}(x,y) = (4x-2y, 2x+6y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση. Το σύνολο D είναι το χωρίο που βρίσκεται εντός της περιφέρειας $x^2+y^2=4$ κέντρου O και ακτίνας 2 και εκτός της έλλειψης $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1$. Επομένως, το σύνορο του D αποτελείται από δύο καμπύλες, έναν κύκλο και μια έλλειψη, και πρέπει να είμαστε προσεκτικοί για να βρούμε το θετικό προσανατολισμό.
Όταν κινούμαστε πάνω στον κύκλο με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, τότε το σύνολο D βρίσκεται στα αριστερά μας. Άρα, η σωστή φορά για τον κύκλο είναι η αντιωρολογιακή. Αντίθετα, όταν κινούμαστε στην έλλειψη, για να βρίσκεται το D στα αριστερά μας, πρέπει να πάμε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Αρα,

$$\partial D^+ = \Gamma_1 - \Gamma_2,$$

όπου, με Γ_1 συμβολίζουμε τον κύκλο $x^2+y^2=4$ και με Γ_2 την έλλειψη $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1$ όταν τις καμπύλες αυτές τις διαγράφουμε με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. [Παρατηρήστε ότι προτιμούμε συνήθως να συμβολίζουμε με Γ_2 την καμπύλη (έλλειψη στην προκειμένη περίπτωση) όταν τη διατρέχουμε με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού και έπειτα αν χρειάζεται να αλλάξουμε φορά, παίρνουμε την αντίθετη καμπύλη $-\Gamma_2$, δηλαδή $\partial D^+ = \Gamma_1 - \Gamma_2$.]

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$. Επειδή $\partial D^+ = \Gamma_1 - \Gamma_2$, έχουμε

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\Gamma_1-\Gamma_2} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} - \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = I_1 - I_2.$$

Υπολογισμός του $I_1 = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$: Η καμπύλη Γ_1 είναι η περιφέρεια κέντρου O ακτίνας 2 που τη διαγράφουμε με φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού. Μια παραμέτρηση της καμπύλης είναι $\overrightarrow{r}_1 \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{r}_1(t) = 2(\cos t, \sin t)$ και $\overrightarrow{r}'_1(t) = 2(-\sin t, \cos t)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}_1(t)\right)\cdot \overrightarrow{r}'_1(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(2\cos t, 2\sin t\right)\cdot 2\left(-\sin t, \cos t\right)\,dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(8\cos t - 4\sin t, 4\cos t + 12\sin t\right)\cdot\left(-\sin t, \cos t\right)\,dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(-8\sin t\cos t + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 12\sin t\cos t\right)\,dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin t\cos t\right)\,dt = 2\int_0^{2\pi} \left(4 - 2\sin 2t\right)\,dt \\
&= 2\left[4t + \cos 2t\right]_{t=0}^{2\pi} = 16\pi.
\end{aligned}$$

Υπολογισμός του $I_2 = \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$: Η καμπύλη Γ_2 είναι η έλλειψη $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ που τη διαγράφουμε με φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού. Μια παραμέτρηση της καμπύλης αυτής είναι $\overrightarrow{r}_2 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{r}_2(t) = (2\cos t, \sin t)$ και $\overrightarrow{r}'_2(t) = (-2\sin t, \cos t)$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}_2(t)) \cdot \overrightarrow{r}'_2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(2\cos t, \sin t) \cdot (-2\sin t, \cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (8\cos t - 2\sin t, 4\cos t + 6\sin t) \cdot (-2\sin t, \cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-16\sin t\cos t + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 6\sin t\cos t\right)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4 - 10\sin t\cos t)\ dt = \int_0^{2\pi} (4 - 5\sin 2t)\ dt \\
&= \left[4t + \frac{5}{2}\cos 2t\right]_{t=0}^{2\pi} = 8\pi.
\end{aligned}
$$

Τελικά, έχουμε

$$
\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = I_1 - I_2 = 16\pi - 8\pi = 8\pi.
$$

Υπολογίζουμε τώρα το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$. Έχουμε $\overrightarrow{F}(x, y) = (4x - 2y, 2x + 6y)$, οπότε $P(x, y) = 4x - 2y$ και $Q(x, y) = 2x + 6y$. Επομένως, $\frac{\partial P}{\partial y} = -2$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$ και το διπλό ολοκλήρωμα γίνεται

$$
\begin{aligned}
\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy &= \int\int_D (2 - (-2))\, dxdy = 4 \cdot \text{εμβαδό}(D) \\
&= 4\,(\text{εμβαδό δίσκου} - \text{εμβαδό έλλειψης}) \\
&= 4(4\pi - 2\pi) = 4 \cdot 2\pi = 8\pi.
\end{aligned}
$$

(Για να θυμηθείτε πώς υπολογίζεται το εμβαδό που περικλείεται από μια έλλειψη, ανατρέξτε στην Άσκηση 8.6.1.)

Από τους παραπάνω υπολογισμούς βλέπουμε ότι πράγματι ισχύει ο τύπος του Green:

$$
\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy
$$

■

Άσκηση 9.4.3. *Να επαληθευτεί ο τύπος του Green στην ακόλουθη περίπτωση:*

- *το σύνολο D είναι $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \le 1\right\}$,*
- *το διανυσματικό πεδίο είναι $\overrightarrow{F}(x, y) = (y, -x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Λύση. Καταρχάς, υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$. Το σύνολο D είναι ο δίσκος με κέντρο το σημείο $(1,0)$ και ακτίνα 1. Το θετικά προσανατολισμένο σύνορο είναι η περιφέρεια κέντρου $(1,0)$ ακτίνας 1 την οποία διαγράφουμε με φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού. Μια παραμέτρηση του ∂D^+ είναι $\overrightarrow{r}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{r}(t) = (1+\cos t, \sin t)$. Η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι C^1 με $\overrightarrow{r}'(t) = (1-\sin t, \cos t)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(1+\cos t, \sin t\right) \cdot (1-\sin t, \cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin t, -1-\cos t) \cdot (1-\sin t, \cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin t - \sin^2 t - \cos t - \cos^2 t\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin t - \cos t - 1)\ dt \\
&= \left[-\cos t - \sin t - t\right]_{t=0}^{2\pi} \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$. Έχουμε $\overrightarrow{F}(x,y) = (y,-x)$, οπότε $P(x,y) = y$ και $Q(x,y) = -x$. Επομένως, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ και το διπλό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D (-1-1)\, dxdy = -2 \cdot \text{εμβαδό}(D) = -2\pi.$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς βλέπουμε ότι πράγματι ισχύει ο τύπος του Green:

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

■

Άσκηση 9.4.4. *Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, *όπου:*
- $\overrightarrow{F}$ *είναι το διανυσματικό πεδίο* $\overrightarrow{F}(x,y) = (xy - x^2, x^2y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
- *το σύνολο* D *είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία* $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ *μαζί με το εσωτερικό του τριγώνου.*

Το σύνορο του συνόλου D αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα για τα οποία μπορούμε εύκολα να γράψουμε παραμέτρηση. Επίσης, για το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$, οι συντεταγμένες συναρτήσεις P και Q είναι πολυώνυμα ως προς x, y. Επομένως, ο υπολογισμός του ζητούμενου ολοκληρώματος μπορεί να γίνει με χρήση του ορισμού του επικαμπυλίου ολοκληρώματος δευτέρου είδους. Επειδή αυτός ο τρόπος απαιτεί αρκετές πράξεις, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με βάση το θεώρημα Green και αφήνουμε ως άσκηση τον υπολογισμό με βάση τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Λύση. Για το σύνολο D και το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Green. Από το θεώρημα αυτό παίρνουμε

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Άρα, για να υπολογίσουμε το ζητούμενο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, αρκεί να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους. Εφόσον $\overrightarrow{F}(x,y) = (xy - x^2, x^2 y)$, έχουμε ότι $P(x,y) = xy - x^2$ και $Q(x,y) = x^2 y$. Επομένως, $\frac{\partial P}{\partial y} = x$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$ και το διπλό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\int_D (2xy - x)\, dxdy.$$

Το σύνολο D είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$ και $(0,1)$. Επομένως, το D είναι και x-απλό και y-απλό σύνολο. Ως x-απλό σύνολο γράφεται στη μορφή

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, x \le y \le 1 \right\}.$$

Άρα, από το Θεώρημα Fubini το ολοκλήρωμα είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int\int_D (2xy - x)\, dxdy &= \int_0^1 \int_x^1 (2xy - x)\, dydx = \int_0^1 \left[xy^2 - xy \right]_{y=x}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 - x^2 - x + x \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{1}{12}.$$

■

Άσκηση. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ της προηγούμενης άσκησης χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. (Αναμένεται ότι θα βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα.)

Άσκηση 9.4.5. *Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, *όπου:*
- $\overrightarrow{F}$ *είναι το διανυσματικό πεδίο* $\overrightarrow{F}(x,y) = (x - xy, y^3 + 1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
- *το σύνολο* D *είναι το τετράγωνο* $D = [1,2] \times [0,1]$.

Ο υπολογισμός του ζητούμενου ολοκληρώματος μπορεί να γίνει μόνο με τη βοήθεια του ορισμού του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Ωστόσο αυτός ο τρόπος λύσης απαιτεί αρκετές πράξεις. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα πολύ πιο σύντομα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green.

Λύση. Καταρχάς, για το σύνολο D και το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Green. Από το θεώρημα αυτό παίρνουμε

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Εφόσον $\overrightarrow{F}(x,y) = (x - xy, y^3 + 1)$, έχουμε ότι $P(x,y) = x - xy$ και $Q(x,y) = y^3 + 1$. Επομένως, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ και το διπλό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D x\, dxdy.$$

Το σύνολο D είναι ένα τετράγωνο με πλευρές παράλληλες στους άξονες: $D = [1,2] \times [0,1] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 1\right\}$. Άρα, από το Θεώρημα Fubini το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα:

$$\int\int_D x\, dxdy = \int_0^1 \int_1^2 x\, dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{2} dy = \frac{3}{2}\int_0^1 dy = \frac{3}{2}.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{3}{2}.$$

■

Άσκηση. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ της προηγούμενης άσκησης χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. (Αναμένεται ότι θα βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα, θα έχετε όμως να κάνετε πολλές πράξεις!)

9.4.2 Υπολογισμός Εμβαδού με τη βοήθεια του Θεωρήματος Green

Ξεκινάμε αυτήν την υποενότητα με ένα ερώτημα:

Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Green με σκοπό να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός επίπεδου χωρίου $D \subset \mathbb{R}^2$;

Η απάντηση είναι ναι, αρκεί όμως να πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις. Ειδικότερα,

1. Το σύνολο D πρέπει να είναι ‘ καλό ’ σύνολο, δηλαδή να ορίζεται το εμβαδό του D. (Υπάρχουν σύνολα για τα οποία δεν ορίζεται το εμβαδό, ωστόσο είναι αρκετά περίεργα σύνολα και δεν εμφανίζονται σε ασκήσεις. Άρα, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται.)

2. Πρέπει το σύνολο D να ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Green.

3. Πρέπει να **επιλέξουμε** κατάλληλο C^1 διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = c$ όπου $c \neq 0$ είναι μια σταθερά.

Αν λοιπόν ισχύουν όλα τα παραπάνω, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Green για το σύνολο D και το πεδίο $\overrightarrow{F}$ παίρνουμε

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\int_D c\, dxdy = c \cdot \text{εμβαδό}(D).$$

Άρα, το εμβαδό του συνόλου D δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\text{εμβαδό}(D) = \frac{1}{c} \int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Αν τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, τότε είμαστε σε θέση να βρούμε το εμβαδό του D. Διανυσματικά πεδία που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την παραπάνω διαδικασία είναι για παράδειγμα τα ακόλουθα:

- $\overrightarrow{F}_1(x, y) = (y, 0)$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq 0$.
- $\overrightarrow{F}_2(x, y) = (0, x)$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq 0$.
- $\overrightarrow{F}_3(x, y) = (-y, x)$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \neq 0$.

Σε κάθε περίπτωση το πεδίο $\overrightarrow{F}$ που θα επιλέξουμε εξαρτάται και από το σύνορο του συνόλου D και πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να γίνεται εφικτός ο υπολογισμός του επικαμπυλίου ολοκληρώματος $\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

Άσκηση 9.4.6. *Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου:*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \leq 1 \right\}.$$

Θα υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Ο αναγνώστης μπορεί να δοκιμάσει και άλλους τρόπους, π.χ. με διπλό ολοκλήρωμα ή με απλό ολοκλήρωμα (για να χρησιμοποιήσετε απλό ολοκλήρωμα παρατηρήστε καταρχάς ότι λόγω συμμετρίας ισχύει $A(D) = 4A(D^+)$, όπου D^+ είναι το κομμάτι του D στο πρώτο τεταρτημόριο, και επιπλέον, το D^+ είναι το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$, $x \in [0,1]$). Σε κάθε περίπτωση, το ολοκλήρωμα που θα έχετε να υπολογίσετε θα είναι αρκετά δύσκολο!

Λύση. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y) = (-y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^1 και ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1-(-1) = 2$. Επομένως, από το θεώρημα Green παίρνουμε

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D 2\,dxdy = 2 \cdot A(D).$$

Επομένως, το εμβαδό $A(D)$ του χωρίου D δίνεται από

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Μένει να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Το θετικά προσανατολισμένο σύνορο ∂D^+ του συνόλου D παραμετρικοποιείται από την συνάρτηση $\overrightarrow{r}(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$, με $t \in [0,2\pi]$. Έχουμε $\overrightarrow{r}'(t) = \left(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t\right)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right) \cdot \left(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t\right)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^3 t, \cos^3 t\right) \cdot \left(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t\right)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3\cos^2 t \sin^4 t + 3\sin^2 t \cos^4 t\right)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} 3\cos^2 t \sin^2 t \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\,dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \left(\sin t \cos t\right)^2\,dt = 3\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\,dt \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt \\
&= \frac{3}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{3\pi}{8}.$$

■

Σχόλιο. Στην παραπάνω άσκηση επιλέξαμε το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y) = (-y,x)$. Αντί αυτού μπορείτε να δοκιμάσετε τα πεδία $\overrightarrow{F}(x,y) = (y,0)$ και $\overrightarrow{F}(x,y) = (0,x)$. (Προκειμένου να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα που θα προκύψει, θα χρειαστεί να κάνετε κάποιες παραπάνω πράξεις και να θυμηθείτε ορισμένες τριγωνομετρικές ταυτότητες. Όμως, το αποτέλεσμα στο οποίο θα καταλήξετε, πρέπει να είναι το ίδιο.)

Άσκηση 9.4.7. *Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου $D \subset \mathbb{R}^2$, το οποίο περιβάλλεται από την ευθεία $y = 0$ και την καμπύλη Γ με παραμέτρηση $\overrightarrow{r}: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, όπου $x(t) = a\,(t - \sin t)$, $y(t) = a\,(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.*

Σημείωση. Θεωρήστε έναν κύκλο ακτίνας $a > 0$ και ένα σημείο M πάνω στον κύκλο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο κύκλος είναι πάνω στο xy-επίπεδο ώστε το κέντρο του να είναι το σημείο $(a,0)$ και το σημείο M να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια, ο κύκλος αρχίζει να κυλάει πάνω στον άξονα $x'x$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1$. Η τροχιά που διαγράφει το σημείο M είναι η καμπύλη Γ της άσκησης και περιγράφεται από τις εξισώσεις $x(t) = a\,(t - \sin t)$ και $y(t) = a\,(1 - \cos t)$. Για $t = \pi$, το σημείο M φτάνει στο μέγιστο ύψος (είναι το σημείο $(\pi a, 2a)$) και για $t = 2\pi$ το σημείο M βρίσκεται πάλι στον $x'x$ και συμπίπτει με το $(2\pi a, 0)$.

Λύση. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y) = (-y,0)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^1 και ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - (-1) = 1$. Επομένως, από το θεώρημα Green παίρνουμε

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D 1\, dxdy = A(D).$$

Επομένως, το εμβαδό $A(D)$ του χωρίου D δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$A(D) = \int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Μένει να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα. Το θετικά προσανατολισμένο σύνορο ∂D^+ του D αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $O(0,0)$ και πέρας το σημείο $A(2\pi a, 0)$ και την καμπύλη $-\Gamma$. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\partial D^+ = [OA] - \Gamma. \tag{9.3}$$

[*Προσοχή στη φορά των καμπυλών!! Η καμπύλη Γ, για την οποία μας έχει δοθεί και η παραμέτρηση, διατρέχει το ίχνος της ξεκινώντας από το σημείο O και καταλήγοντας στο σημείο A. Όμως, στο σύνορο του D θέλουμε τη θετική φορά, με άλλα λόγια όταν κινούμαστε πάνω στο σύνορο πρέπει το D να βρίσκεται στα αριστερά μας. Άρα, το σύνορο του D πρέπει να το διαγράψουμε με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού που σημαίνει ότι πρέπει να πάρουμε την αντίθετη $-\Gamma$ της καμπύλης και όχι την καμπύλη Γ.*]

Λόγω της ισότητας (9.3), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$A(D) = \int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{[OA]} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} - \int_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = I_1 - I_2.$$

Υπολογίζουμε τώρα καθένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα.

Υπολογισμός του I_1: Το ευθύγραμμο τμήμα $[OA]$ με αρχή το $O(0,0)$ και πέρας το $A(2\pi a, 0)$ παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r}_1(t) = (t, 0)$ με $t \in [0, 2\pi a]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{[OA]} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi a} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}_1(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'_1(t) dt = \int_0^{2\pi a} \overrightarrow{F}(t,0) \cdot (1,0) dt \\ &= \int_0^{2\pi a} (0,0) \cdot (1,0) dt = 0. \end{aligned}$$

Υπολογισμός του I_2: Για την καμπύλη Γ μας έχει δοθεί η παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)) = a\,(t - \sin t, 1 - \cos t)$. Έχουμε $\overrightarrow{r}'(t) = a\,(1 - \cos t, \sin t)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\right) \cdot (1 - \cos t, \sin t)\ dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \left(-a(1 - \cos t), 0\right) \cdot (1 - \cos t, \sin t)\ dt \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\ dt = -a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\ &= -a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{t=0}^{2\pi} \\ &= -3\pi a^2. \end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε

$$A(D) = I_1 - I_2 = 3\pi a^2.$$

■

9.4.3 Εφαρμογή του Θεωρήματος Green σε αστρόβιλα διανυσματικά πεδία

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και $\overrightarrow{F}: A \to \mathbb{R}^3$ ένα C^1-διανυσματικό πεδίο με

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) .$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο *στοβιλισμός* του $\overrightarrow{F}$ είναι ένα νέο διανυσματικό πεδίο, $\mathrm{curl}\overrightarrow{F}: A \to \mathbb{R}^3$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{curl}\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{(x,y,z)} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $(x,y,z) \in A$. Το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ λέμε ότι είναι *αστρόβιλο στο* A αν ισχύει $\mathrm{curl}\overrightarrow{F}(x,y,z) = (0,0,0)$ για κάθε $(x,y,z) \in A$.

Έστω τώρα A ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}: A \to \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ για κάθε $(x,y) \in A$. Τότε, το $\overrightarrow{F}$ μπορούμε να το δούμε ως διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ με

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0) .$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω ορισμό για τον στροβιλισμό διανυσματικού πεδίου, βρίσκουμε ότι ο στροβιλισμός του $\overrightarrow{F}$ δίνεται από

$$\mathrm{curl}\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \overrightarrow{k}$$

για κάθε $(x,y) \in A$. Επομένως, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι αστρόβιλο στο A αν

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y),$$

για κάθε $(x,y) \in A$.

Άσκηση 9.4.8. *Δίνεται το διανυσματικό πεδίο*

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(i) Να δείξετε ότι το $\overrightarrow{F}$ είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(ii) *Να δείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο.*

(iii) *Έστω Γ_1 απλή, κλειστή, C^1 καμπύλη στο επίπεδο, τέτοια ώστε το σημείο $(0,0)$ να βρίσκεται στο εξωτερικό της καμπύλης. Να αποδείξετε ότι*

$$I_1 = \int_{\Gamma_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

(iv) *Έστω Γ_2 απλή, κλειστή, C^1 καμπύλη στο επίπεδο, τέτοια ώστε το σημείο $(0,0)$ να βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης. Να αποδείξετε ότι*

$$I_2 = \int_{\Gamma_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi.$$

(v) *Είναι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ συντηρητικό;*

Λύση. Θέτουμε, ως συνήθως,

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(i) Το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ αν και μόνο αν (εξ' ορισμού) οι συναρτήσεις P και Q έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Παρατηρούμε ότι καθεμία από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι ένα κλάσμα με αριθμητή ένα πολυώνυμο ως προς x, y και παρονομαστή $(x^2+y^2)^2$. Επειδή ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ συμπεραίνουμε ότι καθεμία από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχής (άρα το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^1) και επιπλέον έχει μερικές παραγώγους ως προς x και y, δηλαδή με άλλα λόγια υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης των P, Q. Καθεμία από τις δεύτερες μερικές παραγώγους είναι επίσης ένα κλάσμα με αριθμητή ένα πολυώνυμο των x, y και παρονομαστή $(x^2+y^2)^4$. Επομένως και οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και έχουν μερικές παραγώγους κοκ. Συνεχίζοντας με την ίδια λογική, βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις P, Q έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, και επομένως το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(ii) Έχουμε ήδη υπολογίσει τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των P, Q στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ισχύει

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Συνεπώς, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(iii) Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.6.4, η καμπύλη Γ_1 χωρίζει το επίπεδο σε δύο κομμάτια. Συμβολίζουμε με D το εσωτερικό της καμπύλης Γ_1, δηλαδή $D = \varepsilon\sigma\Gamma_1$. Τότε, το σύνολο D είναι ανοικτό, φραγμένο και το σύνορό του είναι η καμπύλη Γ_1 η οποία είναι απλή κλειστή και C^1. Επιπλέον, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^1 σε περιοχή του $\overline{D}$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Green, από το οποίο παίρνουμε

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Όμως, από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Άρα,

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D 0\, dxdy = 0,$$

δηλαδή,

$$\int_{\Gamma_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

(iv) Όπως προηγουμένως, ας συμβολίσουμε με D το εσωτερικό της καμπύλης Γ_2. Παρατηρούμε ότι **δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε** το Θεώρημα Green για το σύνολο D και το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$. Ο λόγος είναι ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ δεν είναι C^1 σε περιοχή του D. Ειδικότερα, το σημείο $(0,0)$ ανήκει στο D και είναι αυτό που δημιουργεί το πρόβλημα, αφού το $\overrightarrow{F}$ δεν ορίζεται καν στο $(0,0)$.

Για να λύσουμε αυτό το ερώτημα, εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου η καμπύλη Γ_2 είναι ο κύκλος C_a με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα $a > 0$. Μια παραμέτρηση της καμπύλης C_a^+ είναι ως γνωστόν

$$\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, a\sin t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα $\int_{C_a^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{C_a^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a\sin t}{a^2\cos^2 t + a^2 \sin^2 t}, \frac{a\cos t}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} \right) \cdot (-a\sin t, a\cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{a}, \frac{\cos t}{a} \right) \cdot (-a\sin t, a\cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα την πιο γενική περίπτωση, όπου η Γ_2 είναι μια τυχαία απλή κλειστή C_1 καμπύλη στο επίπεδο και το σημείο $(0,0)$ βρίσκεται στο εσωτερικό της. Τότε, μπορούμε να βρούμε $a > 0$ ώστε ο κύκλος C_a με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $a > 0$ να περιέχεται στο εσωτερικό της καμπύλης Γ_2. (Η ύπαρξη αυτού του $a > 0$ οφείλεται στο γεγονός ότι η καμπύλη Γ_2 είναι κλειστό σύνολο.)
Συμβολίζουμε με G το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ των δύο καμπυλών Γ_2 και C_a, με άλλα λόγια

$$G = \varepsilon\sigma\Gamma_2 \cap \varepsilon\xi C_a.$$

Τότε για το σύνολο G και το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ **μπορούμε να εφαρμόσουμε** το Θεώρημα Green! Έτσι, έχουμε

$$\int_{\partial G^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Όμως, το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Άρα, προκύπτει ότι

$$\int_{\partial G^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

Το σύνορο του G αποτελείται από την καμπύλη Γ_2, την οποία πρέπει να πάρουμε με φορά αντίθετη από των δεικτών του ρολογιού, και από την περιφέρεια C_a, την οποία πρέπει να πάρουμε με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Δηλαδή

$$\partial G^+ = \Gamma_2^+ - C_a^+.$$

Επομένως,

$$\int_{\partial G^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\partial \Gamma_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} - \int_{C_a^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Επειδή $\int_{\partial G^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$, έπεται ότι

$$\int_{\partial \Gamma_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_a^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi.$$

(v) Αν το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ ήταν συντηρητικό, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 6.6.5 θα έπρεπε για κάθε απλή, κλειστή, C^1 καμπύλη Γ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ να ισχύει

$$\int_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

Από το ερώτημα (iv) γνωρίζουμε ότι αυτό δεν ισχύει όταν η καμπύλη Γ έχει το $(0,0)$ στο εσωτερικό της. Άρα, το πεδίο $\overrightarrow{F}$ δεν είναι συντηρητικό. ■

Άσκηση 9.4.9. *Δίνεται το διανυσματικό πεδίο*

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(i) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}]$ όπου τα σημεία $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ ανήκουν στο πρώτο τεταρτημόριο του $\mathbb{R}^2$ και βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία με αρχή το $(0,0)$ ($\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \neq \overrightarrow{0}$).

(ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στην καμπύλη Γ_1 η οποία παραμετρικοποιείται από την $\overrightarrow{r}_1(t) = (\rho\cos t, \rho\sin t)$ με $t \in [\theta, \varphi]$, όπου $0 < \theta < \varphi < \frac{\pi}{2}$ και $\rho > 0$. (Η καμπύλη Γ_1 είναι ένα κυκλικό τόξο.)

(iii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στην καμπύλη Γ_2 με παραμέτρηση $\overrightarrow{r}_2(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [\theta, \varphi]$, όπου $0 < \theta < \varphi < \frac{\pi}{2}$ και $a, b > 0$.

Λύση. Το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ που μας δίνεται είναι ακριβώς το ίδιο με την Άσκηση 9.4.8. Επομένως, θα πάρουμε ως δεδομένο ότι είναι C^∞ και αστρόβιλο στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Επίσης, έχουμε

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

(i) Τα σημεία $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία με αρχή το $(0,0)$. Η εξίσωση της ημιευθείας έχει τη μορφή $y = \lambda x$, για κάποιον πραγματικό αριθμό $\lambda > 0$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ στη μορφή $\overrightarrow{c} = (c_1, \lambda c_1)$ και $\overrightarrow{d} = (d_1, \lambda d_1)$. Μια παραμέτρηση του ευθυγράμμου τμήματος $[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}]$ είναι η:

$$\overrightarrow{r}(t) = (t, \lambda t)\,,\ t \in [c_1, d_1].$$

(*Σχόλιο.* Η συνήθης παραμέτρηση που χρησιμοποιούμε για το ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}]$ είναι $\overrightarrow{\gamma}(t) = (1-t)\overrightarrow{c} + t\,\overrightarrow{d}$. Ωστόσο, στην συγκεκριμένη περίπτωση θέλουμε να εκμεταλλευτούμε την επιπλέον υπόθεση ότι τα $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ βρίσκονται σε ημιευθεία με αρχή το $(0,0)$. Έτσι, η παραμέτρηση $\overrightarrow{r}$ που πήραμε είναι πιο βολική.)
Υπολογίζουμε τώρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Έχουμε:

$$\overrightarrow{r}'(t) = (1, \lambda),\ t \in [c_1, d_1].$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_{[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}]} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{c_1}^{d_1} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt \\
&= \int_{c_1}^{d_1} \overrightarrow{F}(t, \lambda t) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt \\
&= \int_{c_1}^{d_1} \left(\frac{-\lambda t}{t^2 + \lambda^2 t^2}, \frac{t}{t^2 + \lambda^2 t^2} \right) \cdot (1, \lambda)\,dt \\
&= \int_{c_1}^{d_1} \left(\frac{-\lambda t}{t^2 + \lambda^2 t^2} + \frac{\lambda t}{t^2 + \lambda^2 t^2} \right) dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii) Η καμπύλη Γ_1 που μας δίνεται είναι τόξο του κύκλου με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα ρ. Έχουμε

$$\overrightarrow{r}'_1(t) = (-\rho \sin t, \rho \cos t)\,,\ t \in [\theta, \varphi].$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{\theta}^{\varphi} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}_1(t)) \cdot \overrightarrow{r}'_1(t)\,dt \\
&= \int_{\theta}^{\varphi} \overrightarrow{F}(\rho\cos t, \rho \sin t) \cdot \overrightarrow{r}'_1(t)\,dt \\
&= \int_{\theta}^{\varphi} \left(\frac{-\rho \sin t}{\rho^2 \cos^2 t + \rho^2 \sin^2 t}, \frac{\rho \cos t}{\rho^2 \cos^2 t + \rho^2 \sin^2 t} \right) \cdot (-\rho \sin t, \rho \cos t)\ dt \\
&= \int_{\theta}^{\varphi} \left(\frac{-\sin t}{\rho}, \frac{\cos t}{\rho} \right) \cdot (-\rho \sin t, \rho \cos t)\ dt \\
&= \int_{\theta}^{\varphi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t \right)\ dt \\
&= \int_{\theta}^{\varphi} dt = \varphi - \theta.
\end{aligned}$$

(iii) Η καμπύλη Γ_2 που μας δίνεται βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι κομμάτι της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Μπορεί κάποιος να δοκιμάσει να υπολογίσει το ζητούμενο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Σίγουρα όμως θα χρειαστεί να υπολογίσει κάποια δύσκολα ολοκληρώματα.
Εδώ θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green, τα προηγούμενα ερωτήματα και μια τεχνική που είναι παρόμοια με την Άσκηση 9.4.8(iv).

Καταρχάς, συμβολίζουμε με $\overrightarrow{c}$ την αρχή της καμπύλης Γ_2 και με $\overrightarrow{d}$ το πέρας της καμπύλης, δηλαδή
$$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{r}_2(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta),\quad \overrightarrow{d}=\overrightarrow{r}_2(\varphi)=(a\cos\varphi, b\sin\varphi).$$
Παίρνουμε $\rho>0$ αρκετά μικρό ώστε ο κύκλος C_ρ με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα ρ να βρίσκεται στο εσωτερικό της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Η ημιευθεία που έχει αρχή το $(0,0)$ και περνάει από το σημείο $\overrightarrow{c}$ τέμνει τον κύκλο σε κάποιο σημείο που το συμβολίζουμε με $\overrightarrow{c}_0$. Ανάλογα, συμβολίζουμε με $\overrightarrow{d}_0$ το σημείο τομής του κύκλου με την ημιευθεία που ξεκινά από το $(0,0)$ και περνά από το $\overrightarrow{d}$. Συμβολίζουμε τέλος με Γ^* το τόξο του κύκλου C_ρ το οποίο ξεκινάει από το σημείο $\overrightarrow{c}_0$ και καταλήγει στο σημείο $\overrightarrow{d}_0$.
Θεωρούμε τώρα το σύνολο G που περικλείεται από την καμπύλη Γ^*, το ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{c}_0,\overrightarrow{c}]$, την καμπύλη Γ_2 και το ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{d}_0,\overrightarrow{d}]$. Το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^1 σε περιοχή του $\overline{G}$ και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Green, από το οποίο παίρνουμε:
$$\int_{\partial G^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int\int_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$
Από την Άσκηση 9.4.8 γνωρίζουμε ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Συνεπώς,
$$\int_{\partial G^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=0.$$
Το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του G αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{c}_0,\overrightarrow{c}]$, την καμπύλη Γ_2, το ευθύγραμμο τμήμα $[\overrightarrow{d}_0,\overrightarrow{d}]$ το οποίο όμως διατρέχουμε με αντίθετη φορά, και την καμπύλη Γ^* την οποία επίσης διατρέχουμε με αντίθετη φορά. Δηλαδή
$$\partial G^+=[\overrightarrow{c}_0,\overrightarrow{c}]+\Gamma_2-[\overrightarrow{d}_0,\overrightarrow{d}]-\Gamma^*.$$
Επομένως,
$$\int_{\partial G^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_{[\overrightarrow{c}_0,\overrightarrow{c}]}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}+\int_{\Gamma_2}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}-\int_{[\overrightarrow{d}_0,\overrightarrow{d}]}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}-\int_{\Gamma^*}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}.$$
Γνωρίζουμε ότι $\int_{\partial G^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=0$. Επιπλέον, από το πρώτο ερώτημα προκύπτει ότι $\int_{[\overrightarrow{c}_0,\overrightarrow{c}]}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=0$ και $\int_{[\overrightarrow{d}_0,\overrightarrow{d}]}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=0$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση

παίρνουμε

$$\int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\Gamma^*} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Από το δεύτερο ερώτημα, γνωρίζουμε ότι $\int_{\Gamma^*} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi - \theta$. Άρα, τελικά έχουμε

$$\int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi - \theta.$$

■

Άσκηση 9.4.10. *Δίνεται το διανυσματικό πεδίο*

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{x^2}{[x^2+(y-1)^2]^2}\Big(y-1, -x\Big) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο.

(ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στον (θετικά προσανατολισμένο) κύκλο $\Gamma : x^2 + (y-1)^2 = a^2$ (όπου $a > 0$).

(iii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $\overrightarrow{F}$ πάνω στην (θετικά προσανατολισμένη) έλλειψη $E : 9x^2 + 4y^2 = 36$.

Λύση. Θέτουμε $\overrightarrow{F} = (P,Q)$, όπου

$$P(x,y) = \frac{x^2(y-1)}{[x^2+(y-1)^2]^2}, \quad Q(x,y) = \frac{-x^3}{[x^2+(y-1)^2]^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις P, Q είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων ως προς x, y είναι εύκολο να δούμε (με την ίσια συλλογιστική όπως στην Άσκηση 9.4.8(i)) ότι οι P, Q έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$. Άρα, το διανυσματικο πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$.

(i) Για να δείξουμε ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο, πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ για καθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^2[x^2+(y-1)^2]^2 - x^2(y-1)2[x^2+(y-1)^2]2(y-1)}{[x^2+(y-1)^2]^4} \\
&= \frac{x^2[x^2+(y-1)^2] - 4x^2(y-1)^2}{[x^2+(y-1)^2]^3} \\
&= \frac{x^4 - 3x^2(y-1)^2}{[x^2+(y-1)^2]^3}.
\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-3x^2[x^2+(y-1)^2]^2 + x^3 2[x^2+(y-1)^2]2x}{[x^2+(y-1)^2]^4}\\ &= \frac{-3x^2[x^2+(y-1)^2]+4x^4}{[x^2+(y-1)^2]^3}\\ &= \frac{x^4-3x^2(y-1)^2}{[x^2+(y-1)^2]^3}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$

(ii) Ο κύκλος $x^2+(y-1)^2=a^2$ έχει κέντρο το σημείο $(0,1)$ και ακτίνα $a>0$. Μια παραμέτρηση του κύκλου είναι:

$$\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, a\sin t + 1)\,,\ t\in[0,2\pi].$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t)\,,\ t\in[0,2\pi].$$

Υπολογίζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right)\cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(a\cos t, a\sin t+1\right)\cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(a\cos t, a\sin t+1\right)\cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2\cos^2 t(a\sin t+1-1)}{a^4}, \frac{-a^3\cos^3 t}{a^4}\right)\cdot(-a\sin t, a\cos t)\ dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2 t\sin t}{a}, \frac{-\cos^3 t}{a}\right)\cdot(-a\sin t, a\cos t)\ dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\cos^2 t\sin^2 t-\cos^4 t\right)\ dt\\ &= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} -\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = -\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = -\pi.\end{aligned}$$

(iii) Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Green, το προηγούμενο αποτέλεσμα και την τεχνική της Άσκησης 9.4.8(iv).

Η έλλειψη $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(2,0)$, $(-2,0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $(0,3)$ και $(0,-3)$. Παίρνουμε ένα $a>0$ αρκετά μικρό ώστε ο κύκλος

$\Gamma: x^2+(y-1)^2=a^2$ να περιέχεται στο εσωτερικό της έλλειψης (για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $a=1$). Θέτουμε τώρα G να είναι το χωρίο που περικλείεται από τις δύο αυτές καμπύλες, την έλλειψη E και τον κύκλο Γ, δηλαδή

$$G = \varepsilon\sigma E \cap \varepsilon\xi\Gamma.$$

Το σύνολο G είναι ανοικτό, φραγμένο. Το σύνορό του αποτελείται από απλές, κλειστές, C^1 καμπύλες και το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι C^1 σε περιοχή του G. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε Θεώρημα Green, από το οποίο παίρνουμε

$$\int_{\partial G} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Όμως από το πρώτο ερώτημα, γνωρίζουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο στο $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,1)\}$. Συνεπώς, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ στο G, από όπου προκύπτει ότι

$$\int_{\partial G^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

Το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του G αποτελείται από την έλλειψη E την οποία διαγράφουμε με φορά αντίθετη από των δεικτών του ρολογιού και από την περιφέρεια Γ που όμως τη διαγράφουμε με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Δηλαδή

$$\partial G^+ = E - \Gamma.$$

Επομένως,

$$\int_{\partial G^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_E \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} - \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Επειδή $\int_{\partial G^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$, προκύπτει ότι

$$\int_E \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Από το ερώτημα (ii) έχουμε τελικά

$$\int_E \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\pi.$$

■

9.5 Άλλες μορφές του Θεωρήματος Green

Σε όλη την παρακάτω ενότητα το D συμβολίζει ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, του οποίου το σύνορο ∂D είναι μια απλή κλειστή C^1 καμπύλη. Επιπλέον, θεωρούμε μια παραμέτρηση αυτής της καμπύλης $\overrightarrow{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, και υποθέτουμε ότι $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$ (δηλαδή η καμπύλη είναι λεία). Τέλος, θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, το οποίο ορίζεται σε περιοχή του $\overline{D}$ και είναι C^1.

Για κάθε $t \in [a,b]$, το $\overrightarrow{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο $\overrightarrow{r}(t)$. Το διάνυσμα

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}, \ t \in [a,b],$$

το οποίο έχει μήκος 1 και είναι παράλληλο στο $\overrightarrow{r}(t)$ καλείται το *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα* της καμπύλης στο σημείο $\overrightarrow{r}(t)$. Επίσης, το διάνυσμα

$$\overrightarrow{n}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}, \ t \in [a,b],$$

έχει μήκος 1 και είναι κάθετο στο $\overrightarrow{r}'(t)$ και καλείται το *μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα* της καμπύλης στο σημείο $\overrightarrow{r}(t)$.

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να αποδείξουμε τα επόμενα δύο θεωρήματα, τα οποία είναι ουσιαστικά αναδιατυπώσεις του Θεωρήματος Green.

Θεώρημα 9.5.1. *Για σύνολο D και διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ όπως προηγουμένως, ισχύει ο τύπος*

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_D \mathrm{curl}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{k}\, dxdy. \tag{9.4}$$

Απόδειξη. Το πρώτο μέλος της ισότητας (9.4) ισούται με το $\int_{\partial D^+} Pdx + Qdy$ (θυμηθείτε την ενότητα 6.5). Δηλαδή,

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy.$$

Όσον αφορά το δεύτερο μέλος, υπενθυμίζουμε ότι ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου $F = (P,Q)\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ δίνεται από

$$\mathrm{curl}\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) \overrightarrow{k}.$$

Επειδή $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$, προκύπτει ότι

$$\mathrm{curl}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Άρα, το δεύτερο μέλος της (9.4) γίνεται

$$\int\int_D \operatorname{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{k}\,dxdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Από το Θεώρημα Green γνωρίζουμε ότι

$$\int_{\partial D^+} Pdx+Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

και έπεται η ισότητα (9.4). □

Σχόλιο. Το Θεώρημα Green μπορεί να γενικεύει σε διδιάστατες επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ και μας δίνει το θεώρημα του**Stokes**. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε μια επιφάνεια στο xy-επίπεδο, το Θεώρημα Stokes παίρνει την μορφή της εξίσωσης (9.4). Το Θεώρημα Stokes είναι εκτός ύλης. Για περισσότερες πληροφορίες, παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία.

Θεώρημα 9.5.2. *Για σύνολο D και διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ όπως προηγουμένως, ισχύει ο τύπος*

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,ds = \int\int_D \operatorname{div}\overrightarrow{F}(x,y)\,dxdy \tag{9.5}$$

(όπου $\int_{\partial D^+}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,ds$ είναι το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D^+}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,ds = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot\overrightarrow{n}(t)\|\overrightarrow{r}'(t)\|dt$).

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι για ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$ του $\mathbb{R}^3$, η απόκλιση είναι ένα βαθμωτό πεδίο, που ορίζεται από τη σχέση

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ειδικότερα, αν έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}=(P,Q)$ του $\mathbb{R}^2$, τότε

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι

$$\overrightarrow{n}(t) = \frac{(y'(t),-x'(t))}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|},$$

επομένως,

$$\overrightarrow{n}(t)\|\overrightarrow{r}'(t)\| = (y'(t),-x'(t))\,.$$

Έτσι, ξεκινώντας από το πρώτο μέλος της (9.5) παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{n}(t) \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt \\
&= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot (y'(t), -x'(t))\, dt \\
&= \int_a^b (P(\overrightarrow{r}(t)), Q(\overrightarrow{r}(t))) \cdot (y'(t), -x'(t))\, dt \\
&= \int_a^b [P(\overrightarrow{r}(t)) y'(t) - Q(\overrightarrow{r}(t)) x'(t)]\, dt \\
&= \int_{\partial D^+} -Q dx + P dy \\
&\text{(εφαρμόζουμε το Θεώρημα Green για το πεδίο } \overrightarrow{F}_1 = (P_1, Q_1) = (-Q, P)) \\
&= \int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \int\int_D \operatorname{div} \overrightarrow{F}(x, y)\, dxdy
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Σχόλιο. Το ανάλογο του Θεωρήματος Green στον $\mathbb{R}^3$ είναι το Θεώρημα του Gauss. Κατ΄ αναλογία με το Θεώρημα Green, το Θεώρημα Gauss συνδέει το τριπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^3$ με το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο του Ω. Μια από τις μορφές του θεωρήματος του Gauss είναι ανάλογη της εξίσωσης (9.5). Το Θεώρημα Gauss είναι εκτός ύλης. Για περισσότερες πληροφορίες, παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία.

9.6 Ταυτότητες Green για δύο μεταβλητές

Στόχος μας σε αυτήν την ενότητα είναι να αποδείξουμε τις ταυτότητες Green για δύο μεταβλητές. Ειδικότερα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 9.6.1. *Έστω D ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ του οποίου το σύνορο ∂D είναι μια απλή, κλειστή, κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Έστω ακόμη f, g δύο συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σε μια ανοικτή περιοχή του $\overline{D}$ και είναι C^2. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(i) **Πρώτη ταυτότητα Green**

$$\begin{aligned} \int\int_D f\nabla^2 g + \int\int_D \nabla f\cdot\nabla g &= \int_{\partial D^+} -f\,\frac{\partial g}{\partial y}\,dx + f\,\frac{\partial g}{\partial x}\,dy \\ &= \int_{\partial D^+} (f\nabla g)\cdot\overrightarrow{n}\,ds. \end{aligned} \tag{9.6}$$

(ii) **Δεύτερη ταυτότητα Green**

$$\int\int_D f\nabla^2 f + \int\int_D \|\nabla f\|^2 = \int_{\partial D^+} -f\,\frac{\partial f}{\partial y}\,dx + f\,\frac{\partial f}{\partial x}\,dy. \tag{9.7}$$

Πριν δώσουμε την απόδειξη, υπενθυμίζουμε καταρχάς, ότι με $\overrightarrow{n}$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη ∂D^+. Δηλαδή αν $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ είναι μια παραμέτρηση της καμπύλης, τότε

$$\overrightarrow{n}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}.$$

Ειδικότερα, έπεται ότι $\overrightarrow{n}(t)\|\overrightarrow{r}'(t)\| = (y'(t), -x'(t))$. Επιπλέον, για ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ ισχύει

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,ds = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot\overrightarrow{n}(t)\|\overrightarrow{r}'(t)\|\,dt = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot(y'(t), -x'(t))\;dt.$$

Τέλος, για μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με $\nabla^2 f$ συμβολίζουμε την Λαπλασιανή της f (η οποία συμβολίζεται επίσης και με Δf), δηλαδή

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι.

Απόδειξη. *(i)* Καταρχάς, η ισότητα

$$\int_{\partial D^+} -f\,\frac{\partial g}{\partial y}\,dx + f\,\frac{\partial g}{\partial x}\,dy = \int_{\partial D^+} (f\nabla g)\cdot\overrightarrow{n}\,ds,$$

προκύπτει εύκολα. Πράγματι, αν $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ είναι μια παραμέτρηση του

∂D^+, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} (f\nabla g)\cdot \overrightarrow{n}\, ds &= \int_{\partial D^+} \left(f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}\right)\cdot \overrightarrow{n}\, ds \\ &= \int_a^b \left(f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}\right)\cdot (y'(t), -x'(t))\; dt \\ &= \int_a^b \left[f\frac{\partial g}{\partial x}y'(t) - f\frac{\partial g}{\partial y}x'(t)\right] dt \\ &= \int_{\partial D^+} -f\,\frac{\partial g}{\partial y}\,dx + f\,\frac{\partial g}{\partial x}\,dy.\end{aligned}$$

(Στην δεύτερη και τρίτη σειρά του παράπάνω υπολογισμού, η συνάρτηση f καθώς και οι μερικές παράγωγοι της g υπολογίζονται στο σημείο $\overrightarrow{r}(t)$.)
Μένει να αποδείξουμε την ισότητα

$$\int\int_D f\nabla^2 g + \int\int_D \nabla f\cdot\nabla g = \int_{\partial D^+} -f\,\frac{\partial g}{\partial y}\,dx + f\,\frac{\partial g}{\partial x}\,dy.$$

Ξεκινάμε από το δεύτερο μέλος και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Green για το σύνολο D και το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P,Q) = \left(-f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial x}\right)$, το οποίο είναι C^1, αφού οι f, g είναι C^2. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} -f\,\frac{\partial g}{\partial y}\,dx + f\,\frac{\partial g}{\partial x}\,dy &= \int\int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy \\ &= \int\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-f\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] dxdy \\ &= \int\int_D \left[\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right] dxdy \\ &= \int\int_D \left[f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial y}\right] dxdy \\ &= \int\int_D \left[f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g\right] dxdy \\ &= \int\int_D f\nabla^2 g + \int\int_D \nabla f\cdot\nabla g,\end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο.

(*ii*) Η δεύτερη ταυτότητα Green προκύπτει από την εξίσωση (9.6) θέτοντας $g = f$. (Θυμηθείτε ότι για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{x}$ ισχύει $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{x}\|^2$. Επομένως, $\nabla f\cdot\nabla f = \|\nabla f\|^2$.)

□

Πόρισμα 9.6.2. *(i) Έστω D υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος και επιπλέον είναι πολυγωνικά συνεκτικό. Έστω ακόμη f μια συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτή περιοχή του $\overline{D}$ και είναι C^2 αρμονική. Αν $f(x,y)=0$ για κάθε $(x,y)\in\partial D$, τότε ισχύει ότι $f(x,y)=0$ και για κάθε $(x,y)\in D$.*

(ii) Αν f_1, f_2 είναι αρμονικές συναρτήσεις σε ανοικτή περιοχή του $\overline{D}$ και $f_1=f_2$ στο ∂D, τότε $f_1=f_2$ σε όλο το D.

Απόδειξη. (i) Από το προηγούμενο θεώρημα, γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση f ισχύει

$$\int\int_D f\nabla^2 f+\int\int_D \|\nabla f\|^2=\int_{\partial D^+} -f\,\frac{\partial f}{\partial y}\,dx+f\,\frac{\partial f}{\partial x}\,dy. \tag{9.8}$$

Όμως, η συνάρτηση f είναι αρμονική στο D. Αυτό σημαίνει ότι η Λαπλασιανή είναι ίση με 0, δηλαδή

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \quad \text{στο} \quad D.$$

Επομένως,

$$\int\int_D f\nabla^2 f=0.$$

Επιπλέον, από υπόθεση έχουμε ότι η f είναι 0 στο σύνορο του D, $f(x,y)=0$ για κάθε $(x,y)\in D$. Συνεπώς,

$$\int_{\partial D^+} -f\,\frac{\partial f}{\partial y}\,dx+f\,\frac{\partial f}{\partial x}\,dy=0.$$

Έτσι, από την εξίσωση (9.8) παίρνουμε

$$\int\int_D \|\nabla f\|^2 dxdy=0.$$

Η συνάρτηση $\|\nabla f\|^2=\|\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\|^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ είναι **συνεχής** (διότι η f είναι C^2), μη αρνητική ($\|\nabla f\|^2\geq 0$), και το ολοκλήρωμα στο σύνολο D ισούται με 0. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\|\nabla f\|^2$ είναι ταυτοτικά 0 στο D και άρα

$$\nabla f(x,y)=0 \quad \text{για κάθε} \quad (x,y)\in D,$$

δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \quad \text{για κάθε} \quad (x,y)\in D.$$

Εφόσον το D είναι πολυγωνικά συνεκτικό, έπεται από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο D,

$$f(x,y)=0 \quad \text{για κάθε} \quad (x,y)\in D.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\overline{D}$, έπεται ότι $f(x,y)=c$ για κάθε $(x,y)\in\partial D$. Συνεπως, έχουμε $c=0$ και τελικά

$$f(x,y)=0 \quad \text{για κάθε} \quad (x,y)\in D.$$

(ii) Προκύπτει από το (i) αν το εφαρμόσουμε για την αρμονική συνάρτηση $f=f_1-f_2$.
$\square$

Σχόλιο. Οι αρμονικές συναρτήσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην Ανάλυση, τις Διαφορικές Εξισώσεις, αλλά και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών και άλλων επιστημών. Το παραπάνω πόρισμα μας δίνει μια πολύ σημαντική ιδιότητα των αρμονικών συναρτήσεων. Αν D είναι ένα ανοικτό, φραγμένο πολυγωνικά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ του οποιού το σύνορο είναι μια απλή, κλειστή, κατά τμήματα C^1 καμπύλη, και f,g είναι δύο συναρτησείς αρμονικές σε περιοχή του $\overline{D}$, αν οι f,g ταυτίζονται στο σύνορο του D, τότε οι f,g συμπίπτουν σε όλο το D.
Αυτήν είναι μια αξιοσημείωτη ιδιότητα των αρμονικών συναρτήσεων και καλό είναι να τη θυμόμαστε (όχι μόνο επειδή μπορεί να πέσει θέμα σε κάποια εξέταση).

Κεφάλαιο 10

Τριπλά ολοκληρώματα

10.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 7 μελετήσαμε την έννοια του ολοκληρώματος μιας φραγμένης συνάρτησης f που ορίζεται σε ένα ορθογώνιο $B \subset \mathbb{R}^d$ ή, γενικότερα, σε ένα συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^d$. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 8, επικεντρωθήκαμε στο διπλό ολοκλήρωμα, δηλαδή στο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών η οποία ορίζεται σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Εκεί είδαμε δύο σημαντικά θεωρήματα, το Θεώρημα Fubini και το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών, τα οποία μας έδωσαν αποτελεσματικές μεθόδους υπολογισμού διπλών ολοκληρωμάτων.

Στο παρόν κεφάλαιο, μελετούμε το τριπλό ολοκλήρωμα, δηλαδή ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης που ορίζεται σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Η παρουσίασή μας ακολουθεί τις γραμμές του Κεφαλαίου 8, οπότε είναι μια καλή ευκαιρία να θυμηθείτε και το διπλό ολοκλήρωμα (είτε άμεσα, είτε καθώς θα προχωράει το κεφάλαιο).

Καταρχάς, όσα έχουμε πει στο Κεφάλαιο 7 σχετικά με τον ορισμό του πολλαπλού ολοκληρώματος και τον χαρακτηρισμό των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ισχύουν και για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.2.6, αν B είναι ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^3$ και $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

10.2 Το Θεώρημα Fubini

Το Θεώρημα του Fubini ισχύει και για το τριπλό ολοκλήρωμα. Δεν θα διατυπώσουμε την πιο γενική μορφή του θεωρήματος, αλλά αυτή που είναι η πιο χρήσιμη από άποψη εφαρμογών και αντιστοιχεί στο Πόρισμα 8.2.3.

Θεώρημα 10.2.1 (Θεώρημα Fubini για τριπλά ολοκληρώματα.)**.** *Έστω $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^3$ και $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο B υπάρχει και είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα*

$$\int\int\int_B f = \left(\int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx\right) dy\right) dz\right).$$

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για όλα τα διαδοχικά ολοκληρώματα που προκύπτουν αν αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα, ισχύει ότι

$$\int\int\int_B f = \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right) dx\right) dy\right).$$

Μπορείτε να γράψετε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς; (Συνολικά είναι έξι.)

Στην ισότητα του Θεωρήματος 10.2.1, μπορούμε στο δεύτερο μέλος να αντικαταστήσουμε δύο διαδοχικά ολοκληρώματα με ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$. Έτσι, προκύπτει μια άλλη μορφή του Θεωρήματος Fubini:

Θεώρημα 10.2.2. *Έστω $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^3$ και $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ μια συνεχής συνάρτηση. Συμβολίζουμε με $\widetilde{B}$ το ορθογώνιο $\widetilde{B} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Τότε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο B είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα*

$$\int\int\int_B f = \left(\int_{a_3}^{b_3} \left(\int\int_{\widetilde{B}} f(x,y,z)dxdy\right) dz\right).$$

Ανάλογες ισότητες προκύπτουν αν πάρουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς. Για παράδειγμα

$$\int\int\int_B f = \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int\int_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)dydz\right) dx\right).$$

Ωστόσο, ο υπολογισμός ενός διπλού ολοκληρώματος ανάγεται συνήθως στον υπολογισμό διαδοχικών ολοκληρωμάτων. Έτσι, από άποψη ασκήσεων, η πιο χρήσιμη μορφή του Θεωρήματος Fubini είναι αυτή του Θεωρήματος 10.2.1.

Σημείωση. Το Θεώρημα Fubini δεν ισχύει μόνο για διπλά και τριπλά ολοκληρώματα. Ισχύει γενικά για πολλαπλά ολοκληρώματα, δηλαδή για ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων $f\colon B \to \mathbb{R}$ όπου B είναι ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$. Ωστόσο, στα πλαίσια του μαθήματος, θα ασχοληθούμε με διπλά και τριπλά ολοκληρώματα.

10.3 Απλά σύνολα στον $\mathbb{R}^3$-Θεώρημα Fubini για απλά σύνολα

Στην προηγούμενη παράγραφο, διατυπώσαμε το Θεώρημα του Fubini για συνεχείς συναρτήσεις $f\colon B \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού ένα ορθογώνιο B στον $\mathbb{R}^3$. Ωστόσο, δεν θα είμαστε πάντα τόσο τυχεροί ώστε το σύνολο ολοκλήρωσης να είναι ορθογώνιο. Για το λόγο αυτό, όπως κάναμε και για το διπλό ολοκλήρωμα, επεκτείνουμε το Θεώρημα Fubini για συναρτήσεις με πεδιό ορισμού ένα απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Όμως, πώς ορίζονται τα απλά σύνολα στον χώρο $\mathbb{R}^3$;

Ορισμός 10.3.1. *Ενα υποσύνολο D του $\mathbb{R}^3$ λέμε ότι είναι xy-απλό αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή*

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \le x \le b,\, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x),\, h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\right\},$$

όπου

$$\begin{aligned} &\phi_1, \phi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R} \\ &h_1, h_2\colon \tilde{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b,\, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\right\} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Παρατηρήστε ότι αν ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}^3$ είναι xy-απλό, τότε η προβολή του στο xy-επίπεδο είναι το σύνολο $\tilde{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b,\, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\right\}$ το οποίο είναι x-απλό. Με τελείως ανάλογο τρόπο ορίζονται τα yx, xz, zx, yz, zy-απλά σύνολα. (Μπορείτε να δώσετε τους αντίστοιχους ορισμούς;)

Διατυπώνουμε τώρα το Θεώρημα του Fubini για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα xy-απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι αν D είναι xy-απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, τότε το D είναι συμπαγές σύνολο και το σύνορο ∂D του D έχει όγκο μηδέν. Συνεπώς, κάθε συνάρτηση $f\colon D \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο D είναι και ολοκληρώσιμη, σύμφωνα με το Πόρισμα 7.4.3.

Θεώρημα 10.3.2. *Έστω D ένα xy-απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$*

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \le x \le b,\, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x),\, h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\right\},$$

και $f\colon C \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο D υπάρχει και είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int\!\!\int\!\!\int_B f = \left(\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx\right).$$

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για yx, xz, zx, yz, zy-απλά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$. (Προσπαθήστε να γράψετε το Θεώρημα του Fubini σε αυτές τις περιπτώσεις.)

10.4 Το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών

Το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών που διατυπώσαμε για το διπλό ολοκλήρωμα (βλέπε Θεώρημα 8.4.1) ισχύει και για τριπλά ολοκληρώματα, με τις αναγκαίες βέβαια τροποποιήσεις.

Θεώρημα 10.4.1. *[Αλλαγή μεταβλητής στο τριπλό ολοκλήρωμα.] Έστω D ένα xy-απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και*

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$$

συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\overrightarrow{T}: D^* \to D$$
$$(u,v,w) \mapsto \overrightarrow{T}(u,v,w) = (\phi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w))$$

όπου D^* είναι uv-απλό σύνολο και η $\overrightarrow{T}$ είναι 1-1, επί του D, C^1, με $\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v,w) \neq 0$ για κάθε $(u,v,w) \in D$.
(Με άλλα λόγια η συνάρτηση $\overrightarrow{T}$ μας δίνει την αλλαγή μεταβλητών: $x = \phi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \chi(u,v,w)$.)
Τότε ισχύει

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\, dxdydz = \int\int\int_{D^*} f\left(\overrightarrow{T}(u,v,w)\right) |\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}|\, dudvdw.$$

Υπενθυμίζουμε ότι με $\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}$ συμβολίζουμε την *Ιακωβιανή ορίζουσα* του μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}$, δηλαδή

$$\det \mathcal{J}_{\overrightarrow{T}}(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \phi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial w} \end{vmatrix},$$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι μέσα στην ορίζουσα υπολογίζονται στο σημείο (u,v,w).

Γραμμική Αλλαγή Μεταβλητών. Θα δούμε τώρα μια εφαρμογή του Θεωρήματος 10.4.1 στην περίπτωση που έχουμε μια γραμμική αλλαγή μεταβλητών (στις επόμενες παραγράφους θα δούμε και άλλες εφαρμογές).
Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχουμε μια γραμμική απεικόνιση

$$\overrightarrow{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u,v,w) \mapsto \overrightarrow{T}(u,v,w)$$

Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός αντιστοιχεί σε ένα πίνακα ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$. Επομένως, θα ισχύει

$$\overrightarrow{T}(u,v,w) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1u + a_2v + a_3w \\ b_1u + b_2v + b_3w \\ c_1u + c_2v + c_3w \end{pmatrix}.$$

Με άλλα λόγια κάνουμε την εξής αλλαγή μεταβλητών

$$\left\{ \begin{array}{c} x = a_1u + a_2v + a_3w \\ y = b_1u + b_2v + b_3w \\ z = c_1u + c_2v + c_3w \end{array} \right\}.$$

Είναι τώρα εύκολο να υπολογίζουμε τον πίνακα Zacobi του παραπάνω μετασχηματισμού

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, ο πίνακας Zacobi συμπίπτει σε αυτή την περίπτωση με τον πίνακα του μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}$. Επομένως, $\det\mathcal{J}_{\overrightarrow{T}} = \det(\overrightarrow{T})$ (όπου η ορίζουσα του μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}$ είναι εξ' ορισμού η ορίζουσα του πίνακα που αντιστοιχεί στον $\overrightarrow{T}$.) Συνεπώς, ο τύπος του Θεωρήματος 10.4.1 γίνεται:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$\int\int\int_{D^*} f\left(a_1u + a_2v + a_3w, b_1u + b_2v + b_3w, c_1u + c_2v + c_3w\right)|\det(\overrightarrow{T})|dudvdw.$$

10.5 Κυλινδρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σημείο $A = (x,y) \neq (0,0)$ του $\mathbb{R}^2$ εκτός από τις καρτεσιανές του συντεταγμένες (x,y) μπορεί να προσδιοριστεί και από και τις πολικές του συντεταγμένες (r,θ). Ειδικότερα, r είναι η απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, και $\theta \in [0,2\pi)$ είναι η γωνία που διαγράφει ο θετικός ημιάξονας Ox μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία $\overrightarrow{OA}$ κινούμενος αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των πολικών με τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta.$$

Ο πολικός μετασχηματισμός

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T} &: \mathbb{R} \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r,\theta) &\mapsto \overrightarrow{T}(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων. Υπενθυμίζουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα Jacobi είναι

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

και επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 8.4.1 ο τύπος αλλαγής μεταβλητών γίνεται

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$$

Αν τώρα μεταφερθούμε στον $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν **δύο** τρόποι (εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες) με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε τα σημεία του: οι **κυλινδρικές συντεταγμένες** και οι **σφαιρικές συντεταγμένες**. Αφιερώνουμε αυτή την ενότητα στις κυλινδρικές και σε επόμενη ενότητα θα μιλήσουμε για τις σφαιρικές συντεταγμένες.

Πώς ορίζονται οι κυλινδρικές συντεταγμένες.
Παίρνουμε ένα σημείο $A(x,y,z)$ στον $\mathbb{R}^3$ και το προβάλουμε στο xy-επίπεδο. Η προβολή είναι το σημείο με συντεταγμένες $P(x,y,0)$, το οποίο, αν ξεχάσουμε προσωρινά την τρίτη διάσταση και περιοριστούμε στο $\mathbb{R}^2$, μπορούμε να το δούμε ως το σημείο (x,y). Αν τώρα το σημείο (x,y) δεν είναι η αρχή των αξόνων, δηλαδή $(x,y) \neq (0,0)$, τότε ορίζονται οι πολικές του συντεταγμένες (r,θ), με $r > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$.

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου A είναι η τριάδα (r,θ,z).

Βλέπουμε, επομένως, ότι οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι μια άμεση γενίκευση των πολικών συντεταγμένων του $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^3$. Από τον ορισμό των κυλινδρικών συντεταγμένων, μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω.

Παρατηρήσεις.
(1) Οι κυλινδρικές συντεταγμένες ορίζονται για όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ εκτός από τα σημεία της μορφής $(0,0,z)$ (διότι τότε η προβολή στο xy-επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων). Με άλλα λόγια, οι κυλινδρικές συντεταγμένες ορίζονται για όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ εκτός από τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα των z.
(2) Οι κυλινδρικές συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των καρτεσιανών με τις ακόλουθες σχέσεις

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ (όταν } x>0,\, y>0) \quad z = z.$$

(3) Οι καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των κυλινδρικών με τις ακόλουθες σχέσεις

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

(4) Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο *κυλινδρικός μετασχηματισμός* ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T} : (0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\,:\,z\in\mathbb{R}\}\\ (r,\theta,z) &\mapsto \overrightarrow{T}(r,\theta,z)=(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z).\end{aligned}$$

Ο κυλινδρικός μετασχηματισμός είναι 1-1 και επί του συνόλου $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\,:\,z\in\mathbb{R}\}$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχηματισμού.
Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα και αποφασίζουμε να περάσουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Δηλαδή κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad z=z.$$

Υπολογίζουμε τώρα την Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r.$$

Επομένως, ο τύπος του Θεωρήματος 10.4.1 γίνεται

$$\int\!\!\int\!\!\int_D f(x,y,z)\,dxdydz=\int\!\!\int\!\!\int_{D^*} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right)\,r\,drd\theta dz.$$

Οι επιφάνειες $r=r_0$, $\theta=\theta_0$, $z=z_0$ στο καρτεσιανό σύστημα.

Σταθεροποιούμε έναν πραγματικό αριθμό $r_0>0$ και ψάχνουμε να βρούμε όλα τα σημεία $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ των οποίων η πρώτη κυλινδρική συντεταγμένη είναι r_0, δηλαδή ισχύει $r=r_0$. Αν (x,y,z) είναι ένα τέτοιο σημείο, τότε για την προβολή του στο xy-επίπεδο ισχύει $r=\sqrt{x^2+y^2}=r_0$, δηλαδή βρίσκεται πάνω στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r_0. Με άλλα λόγια, ψάχνουμε όλα τα σημεία (x,y,z) ώστε η προβολή τους στο xy-επίπεδο να είναι ο κύκλος κέντρου O και ακτίνας r_0. Τα σημεία αυτά σχηματίζουν έναν κύλινδρο με άξονα συμμετρίας τον άξονα των z και ακτίνα r_0. (Προφανώς, ο κύλινδρος εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω και προς τα κάτω.) Επομένως,
*η εξίσωση $r=r_0$, όπου $r_0>0$, παριστάνει τον **κύλινδρο** $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2=r_0^2\}$ ο οποίος έχει άξονα συμμετρίας τον $z'z$ και ακτίνα r_0.*

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $\theta_0\in[0,2\pi)$ και ψάχνουμε να βρούμε όλα τα σημεία (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$ με $\theta=\theta_0$. Η προβολή κάθε τέτοιου σημείου στο xy-επίπεδο σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ίση με θ_0. Επομένως, οι προβολές των σημείων βρίσκονται πάνω στην ημιευθεία με αρχή το O που σχηματίζει με τον Ox γωνία θ_0. Αν τώρα αφήσουμε το xy-επίπεδο και μεταφερθούμε στον $\mathbb{R}^3$ βλέπουμε ότι τα σημεία που ψάχνουμε σχηματίζουν ένα ημιεπίπεδο. Συνεπώς, *η εξίσωση $\theta = \theta_0$, όπου $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, παριστάνει ένα ημιεπίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο xy-επίπεδο, δεν περιέχει τον άξονα $z'z$ και σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία θ_0.*

Τέλος, η περίπτωση $z = z_0$ δεν παρουσιάζει καμία διαφορά σε σχέση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Η εξίσωση αυτή παριστάνει ως γνωστόν ένα επίπεδο παράλληλο στο xy-επίπεδο, το οποίο τέμνει τον άξονα $z'z$ στο σημείο $(0, 0, z_0)$.

Επιπλέον παραδείγματα επιφανειών σε κυλινδρικές συντεταγμένες
Θα δούμε στη συνέχεια κάποια επιπλέον παραδείγματα επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$ και ποια μορφή παίρνουν οι εξισώσεις τους σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Καταρχάς, υπενθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό από το Κεφάλαιο 3 (βλέπε ορισμό 3.3.1). Μια παραμετρική επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ είναι μια συνάρτηση

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &: I \times J \to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \overrightarrow{r}(u, v) = \Big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\Big) \end{aligned}$$

όπου τα I, J είναι συνήθως διαστήματα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $\overrightarrow{r}$ είναι συνεχής. Όπως, θα δούμε ο κυλινδρικός μετασχηματισμός μας βοηθά πολλές φορές να βρούμε μια παραμέτρηση για μια δοθείσα επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα (1) Ο κύλινδρος $x^2 + y^2 = r_0^2$ με άξονα συμμετρίας τον $z'z$ και ακτίνα r_0. Όπως είδαμε και προηγουμένως, η εξίσωση του κυλίνδρου αυτού σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή $r = r_0$. Μια παραμέτρηση της κυλινδρικής επιφάνειας είναι

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &: [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\mapsto \overrightarrow{r}(\theta, z) = (r_0 \cos\theta, r_0 \sin\theta, z)\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (2) Το παραβολοειδές $x^2 + y^2 = z$. Για να βρούμε την εξίσωση του παραβολοειδούς σε κυλινδρικές συντεταγμένες, θέτουμε $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ και έχουμε

$$x^2 + y^2 = z \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = z \Leftrightarrow r^2 = z.$$

Επομένως, η εξίσωση του παραβολοειδούς σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $r^2 = z$. Χρησιμπποποιώντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες, μπορούμε να γράψουμε μια παραμέτρηση του παραβολοειδούς

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_1} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \overrightarrow{r_1}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Μια άλλη παραμέτρηση μπορούμε να πάρουμε χρησιμοποιώντας τις κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_2} &: \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\mapsto \overrightarrow{r_2}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2). \end{aligned}$$

Παράδειγμα (3) Το άνω ημισφαίριο $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0\right\}$ (όπου $a>0$). Μια παραμέτρηση του ημισφαιρίου είναι

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{r_1}\colon D\to\mathbb{R}^3\\ &(x,y)\mapsto\overrightarrow{r_1}(x,y)=\left(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right), \end{aligned}$$

όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2\leq 1\}$ ο μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{R}^2$.
Η εξίσωση του ημισφαιρίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή

$$x^2+y^2+z^2=a^2\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+z^2=a^2\Leftrightarrow r^2+z^2=a^2.$$

Συνεπώς, η εξίσωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $r^2+z^2=a^2$. Μια ακόμη παραμέτρηση του άνω ημισφαιρίου προκύπτει από

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{r_2}\colon [0,a]\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3\\ &\qquad(r,\theta)\mapsto\overrightarrow{r_2}(r,\theta)=\left(r\cos\theta, r\sin\theta,\sqrt{a^2-r^2}\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα (4) Η επιφάνεια $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2=2ay, z\in\mathbb{R}\right\}$ (όπου $a>0$). Καταρχάς, ας δούμε ποια είναι η επιφάνεια που περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$\begin{aligned} x^2+y^2=2ay &\Leftrightarrow x^2+y^2-2ay=0\\ &\Leftrightarrow x^2+(y-a)^2=a^2. \end{aligned}$$

Όταν περιοριστούμε στο xy-επίπεδο, η παραπάνω εξίσωση περιγράφει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,1)$ και ακτίνα a. Όταν όμως είμαστε στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε και τη συντεταγμένη z η οποία κινείται σε όλο το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η παραπάνω εξίσωση στον $\mathbb{R}^3$ περιγράφει τον κύλινδρο ο οποίος έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=0$, $y=a$ και ακτίνα a.
Η εξίσωση του κυλίνδρου αυτού σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή

$$x^2+y^2=2ay\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=2ar\sin\theta\Leftrightarrow r^2=2r\sin\theta\Leftrightarrow r=2a\sin\theta.$$

10.6 Ασκήσεις I

Πώς βρίσκουμε το σύνολο D^*; Έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα και θέλουμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών εφαρμόζοντας το Θεώρημα 10.4.1. Μια από τις δυσκολίες που συναντάμε είναι ότι πρέπει να προσδιορίσουμε το νέο σύνολο D^* στο οποίο θα γίνει πλέον η ολοκλήρωση. Το ίδιο πρόβλημα υπήρχε και στο διπλό ολοκλήρωμα ωστόσο εδώ η δυσκολία θα είναι κάπως αυξημένη καθώς πλέον δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^3$ και όχι στον $\mathbb{R}^2$.

Επειδή και πάλι θα δουλεύουμε κυρίως γεωμετρικά και όχι αλγεβρικά, πριν περάσουμε σε εξειδικευμένες περιπτώσεις και παραδείγματα, αναφέρουμε εδώ μια γενική οδηγία:
Πρέπει πάντα να έχουμε στο μυαλό μας μια όσο γίνεται καλύτερη εικόνα για το πώς μοιάζει το στερεό D.
Αφιερώστε λίγες στιγμές (ειδικά αν λύνετε ασκήσεις στο σπίτι και έχετε άνεση χρόνου) για να αποκτήσετε όσο μπορείτε καλύτερη αίσθηση για το στερεό D. Προσπαθήστε να το παρομοιάσετε με κάποιο αντικείμενο. Εν ανάγκη, αν δεν μπορείτε να το "δείτε" με τη φαντασία σας, προσπαθήστε να το κατασκευάσετε χρησιμοποιώντας χαρτί ή άλλα αντικείμενα.

Θα ανεφέρουμε τώρα λίγα σχόλια για την ειδική περίπτωση που κάνουμε αλλαγή από καρτεσιανές σε κυλινδρικές συντεταγμένες, δηλαδή για την αλλαγή μεταβλητών:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή z παραμένει αμετάβλητη. Οπότε για αυτήν την μεταβλητή συνήθως τα πράγματα είναι απλά. Μένει να βρούμε πού κινούνται οι άλλες δύο μεταβλητές r, θ. Υπενθυμίζουμε ότι, από τον ορισμό των κυλινδρικών συντεταγμένων, το ζεύγος (r, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες της προβολής (x, y) του σημείου (x, y, z) πάνω στο xy-επίπεδο. Άρα, προκειμένου να δούμε πού κινούνται αυτές οι δύο μεταβλητές, αυτό που κάνουμε είναι: *προβάλλουμε το στερεό D στο xy-επίπεδο. Αυτή η προβολή είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Βρίσκουμε για τα σημεία αυτού του συνόλου πού κινούνται οι πολικές τους συντεταγμένες (r, θ).* (Η εμπειρία που αποκτήσαμε από το διπλό ολοκλήρωμα θα αποδειχτεί πολύτιμη.)

Περνάμε αμέσως σε εφαρμογές.

Άσκηση 10.6.1. *Δίνεται το στερεό*

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -1 \le x \le 1,\, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\, 0 \le z \le 1 - (x^2+y^2)\right\}.$$

(i) Να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$I = \int\int\int_B \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz.$$

(ii) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού B.

Λύση. (i) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Ως γνωστόν, η Ιακωβιανή ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχηματισμού είναι:

$$\det\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r > 0.$$

(Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που μπορείτε να το παίρνετε δεδομένο, χωρίς να χρειάζεται να κάνετε τον υπολογισμό.) Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.4.1 αλλαγής μεταβλητών, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_B \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \int\int\int_{B^*} \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\cdot r\, drd\theta dz \\ &= \int\int\int_{B^*} r^2\, drd\theta dz. \end{aligned}$$

Μένει να βρούμε το νέο σύνολο B^* πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση. Η προβολή του στερεού B στο xy-επίπεδο είναι το σύνολο:

$$D = \left\{(x,y) \,:\, -1 \le x \le 1,\, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

Το σύνολο D είναι ο δίσκος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα 1. Για τις πολικές συντεταγμένες των σημείων του δίσκου ισχύει ότι $0 \le r \le 1$ και $0 \le \theta \le 2\pi$. Τέλος, για την μεταβλητή z, από την περιγραφή του B έχουμε ότι

$$0 \le z \le 1-(x^2+y^2) \Leftrightarrow 0 \le z \le 1-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) \Leftrightarrow 0 \le z \le 1-r^2.$$

Τελικά, το σύνολο B^* είναι:

$$B^* = \left\{(r,\theta,z) \,:\, 0 \le r \le 1,\, 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le z \le 1-r^2\right\}.$$

Το σύνολο B^* είναι θr-απλό (και $r\theta$-απλό). Από το Θεώρημα Fubini (Θεώρημα 10.3.2), έχουμε ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-r^2} r^2\, dz\right) dr\right) d\theta.$$

Συνήθως θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις. Το διαδοχικό αυτό ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r^2\, dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\left(\int_0^{1-r^2} dz\right) drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,[z]_{z=0}^{1-r^2}\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\left(1-r^2\right) drd\theta \\ &\text{(το ``μέσα'' ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από } \theta \text{ άρα μπορώ να το βγάλω εκτός)} \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 r^2\left(1-r^2\right) dr\right) = 2\pi\int_0^1 \left(r^2-r^4\right) dr \\ &= 2\pi\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι $I = \frac{4}{15}\pi$.

(ii) Ο όγκος του στερεού B δίνεται από το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1, δηλαδή

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε πάλι κυλινδρικές συντεταγμένες. Σύμφωνα και με όσα είπαμε στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} V(B) &= \int\int\int_B dxdydz = \int\int\int_{B^*} r\, drd\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r\, dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(\int_0^{1-r^2} dz\right) drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(1-r^2\right) drd\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 r\left(1-r^2\right) dr\right) \\ &= 2\pi\int_0^1 \left(r-r^3\right) dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^1 \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Άρα, το στερεό B έχει όγκο $V(B) = \frac{\pi}{2}$.

■

Άσκηση 10.6.2. *Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού B το οποίο περιέχεται στην πρώτη στερεά γωνία (δηλαδή $x, y, z \geq 0$) και φράσσεται από τις επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$: $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$, $z^2 = x^2+y^2$, $z = 0$.*

Το στερεό B βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία, είναι εκτός του κυλίνδρου $x^2+y^2 = 1$, μέσα στον κύλινδρο $x^2+y^2 = 4$ και φράσσεται προς τα κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και προς τα πάνω από τον κώνο $z^2 = x^2+y^2$. Did you catch the picture? Okay! Πάμε να λύσουμε την άσκηση.

Λύση. Ο όγκος του στερεού B δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1, δηλαδή

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz.$$

Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος κάνουμε αλλαγή μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του παραπάνω μετασχηματισμού είναι ως γνωστόν $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r > 0$. Επομένως από το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών το ολοκλήρωμα γίνεται

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz = \int\int\int_{B^*} r\, drd\theta dz.$$

Πρέπει να βρούμε το σύνολο B^* στο οποίο γίνεται τώρα η ολοκλήρωση. Για το στερεό B, η προβολή του στο xy-επίπεδο είναι το χωρίο D το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τις περιφέρειες $x^2 + y^2 = 1$ (κέντρου $(0,0)$, ακτίνας 1) και $x^2 + y^2 = 4$ (κέντρου $(0,0)$, ακτίνας 2). Δηλαδή

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y \geq 0,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Συνεπώς, για την γωνία θ ισχύει $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, και επιπλέον, $1 \leq r \leq 2$. Μας μένει η μεταβλητή z. Επειδή το στερεό B φράσσεται προς τα κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και προς τα πάνω από τον κώνο $z^2 = x^2 + y^2$, προκύπτει ότι

$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta} \Leftrightarrow 0 \leq z \leq r.$$

Τελικά, το B^* είναι το σύνολο

$$B^* = \left\{(r,\theta,z) \,:\, 1 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq z \leq r\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το B^* είναι θr-απλό (και $r\theta$-απλό). Από το Θεώρημα Fubini το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το διαδοχικό ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} V(B) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^r r\, dzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r \left(\int_0^r dz\right) drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^2 drd\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) \cdot \left(\int_1^2 r^2 dr\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Επομένως, το στερεό έχει όγκο $V(B) = \frac{7\pi}{6}$.

■

Άσκηση 10.6.3. *Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz\right) dydx.$$

Λύση. Θεωρούμε το στερεό

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2},\, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\right\}.$$

(*Σχόλιο.* Το στερεό B δεν προέκυψε αυθαίρετα, αλλά καθορίζεται από τα άκρα ολοκλήρωσης. Για να έχουμε μια εικόνα για το B, παρατηρούμε ότι $x, y, z \geq 0$, δηλαδή το B βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία. Επίσης, $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$, δηλαδή το B περικλείεται από τον κύλινδρο με άξονα συμμετρίας τον $z'z$ και ακτίνα 1. Τέλος, $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$, δηλαδή το B φράσσεται προς τα κάτω από τον κώνο $z{=}x^2 + y^2$ και προς τα πάνω από το επίπεδο $z = 1$.)

Από το Θεώρημα Fubini, το διαδοχικό ολοκλήρωμα I είναι ίσο με το τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο στερεό B, δηλαδή $I = \int\int\int_B dxdydz$. Για τον υπολογισμό, κάνουμε αλλαγή μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του παραπάνω μετασχηματισμού είναι ως γνωστόν $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r > 0$. Επομένως από το Θέωρημα αλλαγής μεταβλητών το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int\int\int_B dxdydz = \int\int\int_{B^*} r\, drd\theta dz.$$

Πρέπει να βρούμε το σύνολο B^* στο οποίο γίνεται τώρα η ολοκλήρωση. Για το στερεό B, η προβολή του στο xy-επίπεδο είναι

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

Το σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το κομμάτι του μοναδιαίου δίσκου το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Συνεπώς ισχύουν $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ και $0 \leq r \leq 1$. Μένει να δούμε τι γίνεται με τη μεταβλητή z για την οποία παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \Leftrightarrow r \leq z \leq 1.$$

Τελικά, το B^* είναι το σύνολο:

$$B^* = \left\{(r, \theta, z) \,:\, 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, r \leq z \leq 1\right\}.$$

Το B^* είναι θr-απλό (και $r\theta$-απλό). Άρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_{B^*} r\,drd\theta dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_r^1 r\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\left(\int_r^1 dz\right)drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\,(1-r)\,drd\theta \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 r\,(1-r)\,dr\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\int_0^1 \left(r-r^2\right)dr\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^1 = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι $I = \frac{\pi}{12}$.

■

Άσκηση 10.6.4. *(i) Να υπολογίσετε τον όγκο της σφαίρας:*

$$B = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le a^2\right\}$$

όπου $a > 0$.

(ii) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού K το οποίο βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία και φράσσεται από τις επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$: $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$, $z=0$.

Από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε ότι ο όγκος μιας σφαίρας ακτίνας $a > 0$ ισούται με $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. Ήρθε η ώρα να δούμε και (μια) απόδειξη.

Λύση. (i) Ο όγκος της σφαίρας B δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1, δηλαδή

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z.$$

Ως γνωστόν η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r > 0$. Άρα, από το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz = \int\int\int_{B^*} r\,drd\theta dz.$$

Πρέπει να βρούμε το σύνολο B^*. Η προβολή της σφαίρας B στο xy-επίπεδο είναι ο δίσκος με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα $a > 0$. Επομένως, ισχύουν $0 \le r \le a$ και $0 \le \theta \le 2\pi$.

Όσον αφορά τη μεταβλήτη z παρατηρούμε ότι για τα σημεία της σφαίρας ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \Leftrightarrow z^2 \leq a^2 - (x^2 + y^2) \Leftrightarrow z^2 \leq a^2 - r^2 \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{a^2 - r^2}$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Συνεπώς, το σύνολο B^* είναι

$$B^* = \left\{(r, \theta, z) \,:\, 0 \leq r \leq a,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}\right\}.$$

Το σύνολο B^* είναι θr-απλό (φυσικά είναι και $r\theta$-απλό). Άρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
V(B) &= \int\int\int_{B^*} r\, drd\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\, dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a r\left(\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz\right) drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a r2\sqrt{a^2 - r^2}\, drd\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^a 2r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr\right) = 2\pi\int_0^a -\frac{2}{3}\left[\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\right]'\, dr \\
&= -\frac{4\pi}{3}\left[\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\right]_{r=0}^a = -\frac{4\pi}{3}\left(0 - (a^2)^{3/2}\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

(Όπως αναμενόταν προέκυψε ο γνωστός τύπος για τον όγκο της σφαίρας.)

(ii) Το στερεό K βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία. Είναι εντός του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ ακτίνας 1 και φράσσεται προς τα κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και προς τα πάνω από την επιφάνεια της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (κέντρου O ακτίνας 2). Ο όγκος του στερεού K δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα $V(K) = \int\int\int_K dxdydz$. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$V(K) = \int\int\int_{K*} r\, drd\theta dz.$$

Μένει να βρούμε το σύνολο K^*. Η προβολή του K στο xy-επίπεδο είναι το κομμάτι του μοαδιαίου δίσκου το οποίο περιέχεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Επομένως, ισχύουν $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Για την μεταβλητή z έχουμε ότι το K φράσσεται προς τα κάτω από το xy-επίπεδο και προς τα πάνω από την επιφάνεια της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Άρα,

$$0 \leq z \leq \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \Leftrightarrow 0 \leq z\sqrt{\leq 4 - r^2}.$$

Τελικά, έχουμε:

$$K^* = \left\{(r, \theta, z) \,:\, 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\right\}.$$

Το K^* είναι θr-απλό σύνολο (και $r\theta$-απλό). Άρα, ο ζητούμενος όγκος ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$
\begin{aligned}
V(K) &= \int\int\int_{K^*} r\,drd\theta dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} dz\right) drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,drd\theta \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,dr\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 -\frac{1}{3}\left[\left(4-r^2\right)^{3/2}\right]' dr \\
&= -\frac{\pi}{6}\left[\left(4-r^2\right)^{3/2}\right]_{r=0}^1 = -\frac{\pi}{6}\left(3^{3/2}-4^{3/2}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\left(8-3\sqrt{3}\right).
\end{aligned}
$$

■

Άσκηση 10.6.5. *Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B το οποίο βρίσκεται εντός της επιφάνειας $x^2+y^2=2x$ και φράσσεται από τις επιφάνειες $z=x^2+y^2$ και $z=0$.*

Θα αφιερώσουμε λίγο χρόνο για να δούμε ποιο είναι το στερεό B. Η εξίσωση $x^2+y^2=2x$ γράφεται:

$$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1.$$

Η παραπάνω εξίσωση στο xy-επίπεδο παριστάνει τον κύκλο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho=1$. Όμως, στον $\mathbb{R}^3$, που έχουμε και την τρίτη συντεταγμένη z, η εξίσωση παριστάνει τον κύλινδρο με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$, $y=0$ και ακτίνα $\rho=1$. Επομένως, το στερεό B βρίσκεται εντός του κυλίνδρου. Επιπλέον, η εξίσωση $z=x^2+y^2$ παριστάνει ένα παραβολοειδές, το οποίο βρίσκεται στον άνω ημίχωρο ($z\geq 0$). Συνεπώς, το στερεό B βρίσκεται εντός του κυλίνδρου και φράσσεται προς τα κάτω από το xy-επίπεδο και προς τα πάνω από το παραβολοειδές.

Λύση. Ο όγκος του στερεού B δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1:

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz.$$

Για τον υπολογισμό χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

Η ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$V(B) = \int\int\int_{B^*} r\,drd\theta dz.$$

Θα βρούμε τώρα το σύνολο B^*. Παρατηρούμε ότι η προβολή του B στο xy-επίπεδο είναι ο δίσκος D κέντρου $(1,0)$ και ακτίνας 1, δηλαδή $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\big\}$. Για τις πολικές συντεταγμένες των σημείων του δίσκου D ισχύει $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ και $0 \leq r \leq 2\cos\theta$. (Αν δεν θυμάστε πώς βγαίνουν οι προηγούμενες σχέσεις, ανατρέξτε στο Παράδειγμα 2 της Παραγράφου 8.6.1.) Όσον αφορά τη μεταβλητή z, παρατηρούμε ότι το στερεό B φράσσεται προς τα κάτω από το xy-επίπεδο και προς τα πάνω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$. Επομένως, ισχύει

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq z \leq r^2.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$B^* = \left\{(r,\theta,z) \,:\, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq 2\cos\theta,\, 0 \leq z \leq r^2\right\}.$$

Το σύνολο B^* είναι θr-απλό. Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
V(B) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r^2} r\, dz dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r \left(\int_0^{r^2} dz\right) dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r^2\, dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3\, dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{2\cos\theta} d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta \\
&= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta\right)^2\, d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right)\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta \\
&= \left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Τελικά, ο όγκος του στερεού είναι $V(B) = \frac{3\pi}{2}$. ■

Σχόλιο. Σύμφωνα με τον γενικό κανόνα που αναφέραμε στην άσκηση 8.6.1, θα μπορούσαμε για τον υπολογισμό του όγκου στην προηγούμενη άσκηση να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του στερού B. Συγκεκριμένα, το B είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο $y=0$ (αυτό σημαίνει ότι αν ένα σημείο (x,y,z) ανήκει στο στερεό B, τότε και το $(x,-y,z)$ επίσης ανήκει στο B). Αν, λοιπόν, θέσουμε $B_+ = B \cap \{(x,y,z)\,;\, y \geq 0\}$, τότε έχουμε $V(B) = 2V(B_+)$ και άρα με την αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες, παίρνουμε

$$V(B) = 2V(B_+) = 2\int\int\int_{B_+} dxdydz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{r^2} r\,dzdrd\theta.$$

Ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος δεν διαφέρει σε σχέση με τον υπολογισμό που κάναμε στην άσκηση. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση δεν έχουμε κάποιο κέρδος από την συμμετρία του στερεού.

Άσκηση 10.6.6. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int\int_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\; dxdydz,$$

όπου το στερεό Ω φράσσεται από τις επιφάνειες $x^2+y^2=2y$, $z=x^2+y^2$ και $z=0$.

Το στερεό Ω μοιάζει με αυτό της προηγούμενης άσκησης. Η διαφορά είναι ότι το Ω φράσσεται από την επιφάνεια $x^2+y^2=2y$ η οποία γράφεται

$$x^2+y^2=2y \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1.$$

Η εξίσωση αυτήν στο $\mathbb{R}^2$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,1)$ και ακτίνα 1, ενώ στον $\mathbb{R}^3$ παριστάνει τον κύλινδρο με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=0$, $y=1$ και ακτίνα 1. Επιπλέον, το Ω φράσσεται προς τα κάτω από το xy-επίπεδο και προς τα πάνω από το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$.

Λύση. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Η ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχήματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int\int\int_{\Omega^*} \sqrt{r^2}\cdot r\,drd\theta dz = \int\int\int_{\Omega^*} r^2\,drd\theta dz.$$

Θα βρούμε τώρα το σύνολο Ω^*. Η προβολή του στερεού Ω στο xy-επίπεδο είναι ο δίσκος κέντρου $K(0,1)$ και ακτίνας 1, δηλαδή

$$D = \left\{(x,y)\,:\, x^2+(y-1)^2 \leq 1\right\}.$$

Επειδή ο οριζόντιος άξονας $x'x$ εφάπτεται στην περιφέρεια του δίσκου, συμπεραίνουμε ότι για τα σημεία του D η γωνία θ των πολικών συντεταγμένων ικανοποιεί τη σχέση $0 \leq \theta \leq$

π. Επιπλέον, η περιφέρεια του δίσκου έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 2y$, η οποία σε πολικές συντεταγμένες γράφεται $r^2 = 2r\sin\theta \Leftrightarrow r = 2\sin\theta$. Συνεπώς, για τα σημεία του δίσκου D, η απόσταση r από την αρχή των αξόνων ικανοποιεί τη σχέση $0 \le r \le 2\sin\theta$. Επομένως, έχουμε

$$0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le r \le 2\sin\theta.$$

Τέλος, για τη μεταβλητή z, έχουμε ότι το στερεό Ω φράσσεται προς τα κάτω από το xy-επίπεδο και προς τα πάνω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$. Συνεπώς,

$$0 \le z \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le z \le r^2.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$\Omega^* = \left\{(r,\theta,z) \,:\, 0 \le \theta \le \pi,\, 0 \le r \le 2\sin\theta,\, 0 \le z \le r^2\right\}.$$

Έτσι, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r^2} r^2\, dzdrd\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2 \left(\int_0^{r^2} dz\right) drd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2 \cdot r^2\, drd\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^4\, drd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{2\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi}\frac{2^5}{5}\sin^5\theta\, d\theta \\
&= \frac{32}{5}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\cdot\sin\theta\, d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)^2\cdot\sin\theta\, d\theta \\
&\text{(θέτουμε}\ \ \cos\theta = u,\ \text{οπότε}\ -\sin\theta d\theta = du) \\
&= \frac{32}{5}\int_1^{-1}(1-u^2)^2(-du) = \frac{32}{5}\int_{-1}^{1}(1-2u^2+u^4)d\theta \\
&= \frac{32}{5}\left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right]_{u=-1}^{1} = \frac{512}{75}.
\end{aligned}$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$I = \int\int\int_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \frac{512}{75}.$$

■

Άσκηση 10.6.7. *Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού*

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 2ax,\, x^2+y^2+z^2 \le 4a^2,\, z \ge 0\right\},$$

όπου $a > 0$.

Ας πάρουμε πάλι μια εικόνα για το στερεό B. Η μέχρι τώρα εμπειρία μας θα βοηθήσει αρκετά. Καταρχάς, η εξίσωση $x^2 + y^2 = 2ax$ γράφεται ισοδύναμα $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ και κατά τα γνωστά παριστάνει στον $\mathbb{R}^3$ τον κύλινδρο με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = a$, $y = 0$ και ακτίνα a. Άρα, το στερεό B βρίσκεται εντός του κυλίνδρου.
Επιπλέον, η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (2a)^2$ παριστάνει τη σφαίρα με κέντρο το σημείο $(0,0,0)$ και ακτίνα $2a$. Επομένως, το στερεό B βρίσκεται και εντός της σφαίρας. Παρατηρήστε επίσης ότι η ακτίνα της σφαίρας είναι διπλάσια από την ακτίνα του κυλίνδρου. Αυτό συνεπάγεται ότι στο xy-επίπεδο ο κύκλος κέντρου $(a,0)$ ακτίνας 1 (που είναι η τομή του επιπέδου με τον κύλινδρο) εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου κέντρου $(0,0)$ ακτίνας 4 (που είναι η τομή του επιπέδου με τη σφαίρα).
Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι το στερεό B βρίσκεται εντός του κυλίνδρου $x^2+y^2 = 2ax$ και φράσσεται προς τα κάτω από το xy-επίπεδο (αφού $z \geq 0$) και προς τα πάνω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$. Επομένως, και αυτή η άσκηση μοιάζει αρκετά με τις δύο προηγούμενες (αντί για το παραβολοειδές έχουμε τη σφαίρα).

Λύση. Ο όγκος του στερεού B δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1, δηλαδή

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Η ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχήματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$V(B) = \int\int\int_{B^*} r\,drd\theta dz.$$

Βρίσκουμε τώρα το σύνολο B^*. Η προβολή του στερεού B στο xy-επίπεδο είναι ο δίσκος με κέντρο το σημείο $(a,0)$ και ακτίνα a. Για τα σημεία του δίσκου αυτού ισχύει $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, διότι ο άξονας $y'y$ είναι εφατομένη της περιφέρειας του δίσκου στο σημείο $(0,0)$. Η περιφέρεια του δίσκου έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 2ax$, η οποία σε πολικές συντεταγμένες γράφεται $r^2 = 2ar\cos\theta \Leftrightarrow r = 2a\cos\theta$. Επομένως, για τα σημεία του δίσκου ισχύει $0 \leq r \leq 2a\cos\theta$. Τέλος, το στερεό B φράσσεται προς τα κάτω από το xy-επίπεδο και προς τα πάνω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$. Επομένως, ισχύει

$$0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}.$$

Τελικά, το B^* είναι το σύνολο

$$B^* = \left\{(r,\theta,z)\,:\, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq 2a\cos\theta,\, 0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}\right\}.$$

Το σύνολο B^* είναι θr-απλό. Επομένως, ο όγκος του στερεού B δίνεται από το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
V(B) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2a\cos\theta} \int_{0}^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\, dz dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2a\cos\theta} r \left(\int_{0}^{\sqrt{4a^2-r^2}} dz \right) dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2a\cos\theta} r\sqrt{4a^2-r^2}\, dr d\theta = -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4a^2 - r^2\right)^{3/2} \right]_{r=0}^{2a\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4a^2 - r^2\right)^{3/2} \right]_{r=0}^{2a\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4a^2 - 4a^2\cos^2\theta\right)^{3/2} - \left(4a^2\right)^{3/2} \right] d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(2a)^3 \left(1 - \cos^2\theta\right)^{3/2} - (2a)^3 \right] d\theta \\
&= -\frac{8a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(1-\cos^2\theta)^{3/2} - 1 \right] d\theta = \frac{8a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - (1-\cos^2\theta)^{3/2} \right] d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta \right) \\
&= \frac{8a^3}{3} \left(\pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta \right).
\end{aligned}$$

Στο ολοκλήρωμα που έχει μείνει, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι θετική. Άρα δεν μπορώ να την αντικαταστήσω με $\sin^3\theta$ διότι στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ το ημίτονο είναι αρνητικό. Μια λύση είναι να σπάσουμε σε δύο ολοκληρώματα $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta$ και $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta$. Στο πρώτο η συνάρτηση είναι ίση με $-\sin^3\theta$ ενώ στο δεύτερο είναι ίση με $\sin^3\theta$. Ένας άλλος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $(1-\cos^2\theta)^{3/2}$ είναι άρτια, επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta \\
&= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta \quad (\text{θέτουμε } \cos\theta = u) \\
&= 2\int_{0}^{1} (1-u^2) du = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Τελικά, ο όγκος του στερεού B είναι

$$V(B) = \frac{8a^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

■

Σχόλιο. Το γεγονός ότι στο ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta$ δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση με $\sin^3\theta$, αλλά πρέπει να σπάσουμε σε δύο ολοκληρώματα (ή να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση είναι άρτια) είναι κάτι που μπορεί εύκολα να ξεφύγει της προσοχής μας και να μας οδηγήσει σε λανθασμένο αποτέλεσμα. Ωστόσο, αν είχαμε εκμεταλλευτεί την συμμετρία του στερεού B, τότε θα είχαμε απαλλαγεί από αυτόν τον κίνδυνο.
Πράγματι, το στερεό B είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο $y=0$ (δηλαδή αν $(x,y,z)\in B$, τότε και $(x,-y,z)\in B$). Επομένως, αν θέσουμε $B_+ = B\cap\{(x,y,z)\,:\,y\geq 0\}$, τότε λόγω συμμετρίας έχουμε $V(B)=2V(B_+)$. Άρα, με την αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες, έχουμε τελικά:

$$V(B)=2V(B_+)=2\int\int\int_{B_+} dxdydz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\, dzdrd\theta.$$

Αν κάνουμε τώρα τον υπολογισμό, τότε σε κάποιο σημείο θα εμφανιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta$ στο οποίο μπορούμε κατευθείαν να αντικαταστήσουμε την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση με $\sin^3\theta$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση η εκμετάλλευση της συμμετρίας μπορεί να είναι σωτήρια.

10.7 Σφαιρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 10.5, ένα σημείο $A(x,y,z)$ στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο δεν βρίσκεται στον άξονα $z'z$ μπορεί να περιγραφεί εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) και με τις κυλινδρικές συντεταγμένες (r,θ,z). Επιπλέον, στις ασκήσεις της Παραγράφου 10.6, είδαμε ότι ο κυλινδρικός μετασχηματισμός

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

μας βοηθά στον υπολογισμό τριπλών ολοκληρωμάτων.
Εκτός όμως από τις κυλινδρικές συντεταγμένες, στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε και ένα ακόμη σύστημα συντεταγμένων, τις επονομαζόμενες *σφαιρικές συντεταγμένες*, οι οποίες είναι εξίσου σημαντικές με τις κυλινδρικές. Στόχος σε αυτήν την παράγραφο είναι να ορίσουμε και να αφομοιώσουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες.

Πώς ορίζονται οι σφαιρικές συντεταγμένες.
Θεωρούμε ένα σημείο $A(x,y,z)$ του $\mathbb{R}^3$ το οποίο δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα $z'z$ (δηλαδή $x\neq 0$ ή $y\neq 0$). Καταρχάς, θέτουμε $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ να είναι η απόσταση του σημείου A από την αρχή των αξόνων.
Στη συνέχεια, προβάλουμε το σημείο $A(x,y,z)$ στο xy-επίπεδο. Η προβολή είναι το σημείο $P(x,y,0)$ το οποίο δεν συμπίπτει με την αρχή των αξόνων (αφού υποθέσαμε ότι το A δεν

βρίσκεται στον άξονα των z). Επομένως, για το σημείο P ορίζονται οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) από τις οποίες όμως μας ενδιαφέρει μόνο η $\theta \in [0, 2\pi)$. Υπενθυμίζουμε ότι $\theta \in [0, 2\pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει ο ημιάξονας Ox με την ημιευθεία OP.
Τέλος, θέτουμε $\varphi \in (0, \pi)$ να είναι η γωνία που σχηματίζει ο ημιάξονας Oz με την ημιευθεία OA. Παρατηρήστε ότι η γωνία φ κινείται στο διάστημα $(0, \pi)$ και όχι στο $(0, 2\pi)$. [1]
Ας σκεφτούμε τώρα λίγο ανάποδα ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τους τρεις αριθμούς ρ, θ και φ. Τότε οι γωνίες θ και φ μας καθορίζουν με μοναδικό τρόπο μία (και μόνο μία) ημιευθεία με αρχή το $O(0, 0, 0)$. Είναι η ημιευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το A. Αφού γνωρίζουμε και την απόσταση ρ του A από το O, μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια το σημείο A. Με άλλα λόγια, οι τρεις αριθμοί (ρ, θ, φ) καθορίζουν με ακρίβεια και με μονοσήμαντο τρόπο το σημείο A.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου A είναι η τριάδα (ρ, θ, ϕ).

Από τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκαν οι σφαιρικές συντεταγμένες, μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω.

Παρατηρήσεις.
(1) Οι σφαιρικές συντεταγμένες ορίζονται για όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ εκτός από τα σημεία που βρίσκονται στον άξονα $z'z$ (για τα σημεία αυτά η προβολή τους στο xy-επίπεδο είναι το σημείο $O(0, 0, 0)$ και δεν ορίζεται η γωνία θ).
(2) Οι σφαιρικές συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των καρτεσιανών με τις ακόλουθες σχέσεις

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ όταν } y > 0, x > 0 \quad \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(3) Θα δούμε τώρα πώς εκφράζονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει των σφαιρικών. Θεωρούμε όπως προηγουμένως το σημείο $A(x, y, z)$. Έστω $P(x, y, 0)$ η προβολή του A στο xy-επίπεδο, $B(0, 0, z)$ η προβολή του στον άξονα των z και έστω (ρ, θ, φ) οι σφαιρικές συντεταγμένες του A. Παίρνουμε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $O(0, 0, 0)$, A και B. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο (η γωνία $\widehat{B}$ είναι ορθή) και ισχύει $\widehat{AOB} = \varphi$. Από το ορθογώνιο αυτό τρίγωνο συμπεραίνουμε ότι $(OB) = (OA) \cdot \cos \varphi$, δηλαδή με άλλα λόγια $z = \rho \cos \varphi$.
Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο OAP συμπεραίνουμε ότι $(OP) = (OA) \cdot \sin \theta$, δηλαδή με άλλα λόγια $r = \rho \sin \theta$, όπου r είναι η κυλινδρική συντεταγμένη του A. Γνωρίζουμε, όμως

[1] Ενδεχομένως, αυτό να φαίνεται παράδοξο σε κάποιους αναγνώστες, τουλάχιστον σε πρώτη ματιά. Αν αυτό συμβαίνει, τότε κάντε ένα σχήμα και σημειώστε ένα σημείο στο οποίο κατά τη γνώμη σας έπρεπε να ισχύει $\varphi \in (\pi, 2\pi)$. Παρατηρήστε τώρα ότι το σημείο αυτό μπορείτε να το περιγράψετε με μια γωνία $\varphi \in (0, \pi)$. Πιθανόν να χρειαστεί να αλλάξετε και τη γωνία θ σε σχέση με αυτό που σκεφτήκατε αρχικά. Σκεφτείτε για παράδειγμα τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται το γεωγραφικό μήκος και το γεωγραφικό πλάτος της γης.
Έτσι, για παράδειγμα, για όλα τα σημεία του xy-επιπέδου, ισχύει $\varphi = \pi/2$, ενώ η γωνία θ διατρέχει όλο το $[0, 2\pi)$ και φυσικά $\rho \in (0, \infty)$.

τώρα, ότι $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$. Έτσι, προκύπτουν άμεσα οι σχέσεις $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$ και $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$.

Συνεπώς, έχουμε τελικά ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των σφαιρικών με τις παρακάτω σχέσεις

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \quad z = \rho\cos\varphi.$$

(4) Σύμφωνα με τα παραπάνω ο *σφαιρικός μετασχηματισμός* ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T} &: (0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \,:\, z\in\mathbb{R}\} \\ (\rho,\theta,\varphi) &\mapsto \overrightarrow{T}(\rho,\theta,\varphi) = (x,y,z) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi). \end{aligned}$$

Ο σφαιρικός μετασχηματισμός είναι καλά ορισμένος, 1-1 και επί του συνόλου $\mathbb{R}^3\setminus\{z\text{-άξονας}\}$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του σφαιρικού μετασχηματισμού.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα $\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz$ και αποφασίζουμε να περάσουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες. Με άλλα λόγια, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 10.4.1, χρειάζεται να υπολογίσουμε την ορίζουσα Jacobi για την παραπάνω αλλαγή μεταβλητών. Ο πίνακας Jacobi είναι

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Υπόλογίζουμε τώρα την ορίζουσα του παραπάνω πίνακα (αναπτύσσοντας για παράδειγμα ως προς την πρώτη γραμμή):

$$
\begin{aligned}
\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta\sin\varphi \begin{vmatrix} \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} \\
&+ \rho\sin\theta\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} \\
&+ \rho\cos\theta\cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta\sin\varphi(-\rho^2\cos\theta\sin^2\varphi) + \rho\sin\theta\sin\varphi(-\rho\sin\theta\sin^2\varphi - \rho\sin\theta\cos^2\varphi) \\
&+ \rho\cos\theta\cos\varphi(-\rho\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&= -\rho^2\cos^2\theta\sin^3\varphi - \rho^2\sin^2\theta\sin\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - \rho^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos^2\varphi \\
&= -\rho^2\cos^2\theta\sin^3\varphi - \rho^2\sin^2\theta\sin\varphi - \rho^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos^2\varphi \\
&= -\rho^2\Big(\cos^2\theta\sin^3\varphi + \sin^2\theta\sin\varphi + \cos^2\theta\sin\varphi\cos^2\varphi\Big) \\
&= -\rho^2\Big(\cos^2\theta\sin\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \sin^2\theta\sin\varphi\Big) \\
&= -\rho^2\Big(\cos^2\theta\sin\varphi + \sin^2\theta\sin\varphi\Big) \\
&= -\rho^2\sin\varphi\Big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\Big) \\
&= -\rho^2\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Ο υπολογισμός έχει λίγες (συμπαθητικές στους μαθηματικούς) πράξεις, ωστόσο το τελικό αποτέλεσμα είναι αρκετά σύντομο και κομψό. Υπενθυμίζουμε τώρα (δείτε το Θεώρημα 10.4.1) ότι θέλουμε την απόλυτη τιμή της παραπάνω ορίζουσας. Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι αφού η γωνία φ ανήκει στο διάστημα $[0,\pi]$, το $\sin\varphi$ είναι πάντα θετικό. Επομένως,

$$|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = |-\rho^2\sin\varphi| = \rho^2\sin\varphi.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 10.4.1, παίρνουμε τελικά ότι

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_{D^*} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi.$$

Οι επιφάνειες $\rho=\rho_0$, $\theta=\theta_0$ και $\varphi=\varphi_0$ στο καρτεσιανό επίπεδο

Στη συνέχεια, θεωρούμε τις εξισώσεις $\rho=\rho_0$, $\theta=\theta_0$ και $\varphi=\varphi_0$. Για καθεμία από αυτές τις εξισώσεις, θα βρούμε το σύνολο των σημείων (x,y,z) (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) που τις ικανοποιούν και θα δούμε ότι αυτές οι εξισώσεις αντιστοιχούν σε κάποιες πολύ γνωστές επιφάνειες.

Καταρχάς, σταθεροποιούμε ένα $\rho_0 > 0$ και ψάχνουμε να βρούμε όλα τα σημεία (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ των οποίων η πρώτη σφαιρική συντεταγμένη είναι ρ_0, δηλαδή ισχύει $\rho = \rho_0$. Από τον ορισμό των σφαιρικών συντεταγμένων, έχουμε ότι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ είναι η απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων. Άρα, με άλλα λόγια, ψάχνουμε να βρούμε όλα τα σημεία που η απόστασή τους από την αρχή των αξόνων είναι σταθερή και ίση με ρ_0. Ως γνωστόν, τα σημεία αυτά είναι ακριβώς τα σημεία της σφαίρας με κέντρο $O(0, 0, 0)$ και ακτίνα ρ_0. Επομένως,
η εξίσωση $\rho = \rho_0$, όπου $\rho_0 > 0$ παριστάνει την σφαίρα $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = \rho_0^2\}$ με κέντρο το σημείο O και ακτίνα ρ_0.

Περνάμε τώρα στην εξίσωση $\theta = \theta_0$, όπου $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Παρατηρήστε ότι η γωνία θ είναι κοινή στις σφαιρικές και στις κυλινδρικές συντεταγμένες. Επομένως, για την παραπάνω εξίσωση, η δουλειά έχει γίνει στις κυλινδρικές συντεταγμένες (Παράγραφος 10.5). Γνωρίζουμε, λοιπόν, ότι τα σημεία $A(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ για τα οποία ισχύει $\theta = \theta_0$ σχηματίζουν ένα ημιεπίπεδο κάθετο στο xy-επίπεδο, το οποίο σχηματίζει γωνία θ_0 με τον ημιάξονα Ox.

Τέλος, θα δούμε την εξίσωση $\varphi = \varphi_0$, όπου $\varphi_0 \in (0, \pi)$. Σταθεροποιούμε, λοιπόν, ένα φ_0 (για ευκολία μπορείτε να σκέφτεστε προς το παρόν ότι $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ και ψάχνουμε όλα τα σημεία $A(x, y, z)$ για τα οποία ισχύει $\varphi = \varphi_0$. Αν θυμηθούμε ότι η γωνία φ είναι η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία $\overrightarrow{OA}$ με τον ημιάξονα Oz, τότε βλέπουμε ότι τα ζητούμενα σημεία A σχηματίζουν έναν μονόχωνο κώνο. Ο κώνος αυτός έχει κορυφή το σημείο O και άξονα συμμετρίας τον άξονα των z. Το άνοιγμα του κώνου είναι προς τα 'πάνω' όταν $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, ενώ είναι προς τα 'κάτω' όταν $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Τέλος, πρέπει να επισημάνουμε ότι στην ειδική περίπτωση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, τα σημεία που ικανοποιούν την $\varphi = \frac{\pi}{2}$ είναι ακριβώς τα σημεία του xy-επιπέδου. Επομένως,
αν $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, τότε η εξίσωση $\varphi = \varphi_0$ παριστάνει έναν κώνο. Αν $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, τότε το άνοιγμα του κώνου είναι προς τα "πάνω". Αν $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, τότε το άνοιγμα του κώνου είναι προς τα "κάτω". Η γενέτειρα του κώνου σχηματίζει γωνία φ_0 με τον ημιάξονα Oz. Στην ειδική περίπτωση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, η εξίσωση $\varphi = \frac{\pi}{2}$ παριστάνει το xy-επίπεδο.

10.8 Ασκήσεις II

10.8.1 Προετοιμασία για τις ασκήσεις

Οι ασκήσεις που θα δούμε μας ζητάνε να υπολογίσουμε κάποιο τριπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ένα στερεό B. Καταρχάς, οι επιφάνειες που εμφανίζονται να περιβάλλουν το στερεό B στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση είναι **συνήθως** οι εξής:

- $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\right\}$ $(a > 0)$ Σφαίρα

- $\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2=\beta^2\Big\}$ $(\beta>0)$ Κύλινδρος
- $\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, z=c(x^2+y^2)\Big\}$ $(c\neq 0)$ Παραβολοειδές
- $\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, z^2=c(x^2+y^2)\Big\}$ $(c\neq 0)$ Διπλός κώνος

Ενδεχομένως, σε κάποια άσκηση να εμφανιστεί κάποια μεταφορά ή στροφή των παραπάνω επιφανειών ή και κάποιος συνδυασμός αυτών.

Περαιτέρω, για τον υπολογισμό ενός τριπλού ολοκληρώματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε:

- Καρτεσιανές συνεταγμένες (x,y,z). Με άλλα λόγια δεν κάνουμε καμία αλλαγή μεταβλητών και κάνουμε επίθεση απευθείας στο ολοκλήρωμα.
- Κυλινδρικές συντεταγμένες (r,θ,z). Με άλλα λόγια κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

  $$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad z=z,$$

  όπου $r\in(0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi)$ και $z\in\mathbb{R}$. Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού υπολογίστηκε στην Παράγραφο 10.5 και είναι

  $$\Big|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\Big|=r.$$

  Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.4.1 έχουμε

  $$\int\!\!\int\!\!\int_D f(x,y,z)\,dxdydz=\int\!\!\int\!\!\int_{D^*} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\ drd\theta dz.$$

- Σφαιρικές συντεταγμένες (ρ,θ,φ). Με άλλα λόγια κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

  $$x=\rho\cos\theta\sin\varphi \quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi \quad z=\rho\cos\varphi,$$

  όπου $\rho\in(0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi)$ και $\varphi\in(0,\pi)$. Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού υπολογίστηκε στην Παράγραφο 10.7 και είναι

  $$\Big|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\Big|=\rho^2\sin\varphi.$$

  Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.4.1 έχουμε

  $$\int\!\!\int\!\!\int_D f(x,y,z)\,dxdydz=$$
  $$\int\!\!\int\!\!\int_{D^*} f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\ d\rho d\theta d\varphi.$$

Σφαιρικές ή Κυλινδρικές συντεταγμένες; Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα και οι καρτεσιανές συντεταγμένες δεν βοηθάνε. Αποφασίζουμε, λοιπόν, να πάρουμε κάποιον από τους μετασχηματισμούς που περιγράψαμε προηγουμένως. Φυσιολογικά γεννάται το ερώτημα: Θα χρησιμοποιήσουμε Σφαιρικές ή Κυλινδρικές Συντεταγμένες;
Δυστυχώς, απάντηση δεν υπάρχει. Σε μερικές περιπτώσεις δουλεύουν και οι δύο μετασχηματισμοί. Σε κάποιες περιπτώσεις δουλεύουν μόνο οι κυλινδρικές συντεταγμένες και σε άλλες μόνο οι σφαιρικές. Και υπάρχουν και οι περιπτώσεις όπου δεν δουλεύουν αυτοί οι μετασχηματισμοί και πρέπει να σκεφτούμε κάτι άλλο.
Ένας γενικός κανόνας είναι ο εξής: Αν το σύνολο στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία (δηλαδή συμμετρία ως προς σημείο), τότε κατά πάσα πιθανότητα βολεύουν οι σφαιρικές συντεταγμένες. Αντίθετα, αν παρουσιάζει συμμετρία ως προς άξονα, τότε πιθανόν να ευνοούν οι κυλινδρικές συντεταγμένες.
Ωστόσο, ο παραπάνω κανόνας είναι πολύ γενικός και σε αρκετές περιπτώσεις δεν βοηθάει. Η μόνη λύση είναι **εξάσκηση**. Σε καθεμία από τις ασκήσεις που ακολουθούν, προσπαθήστε να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα με τρεις τρόπους (ακόμη και αν εμείς δίνουμε μόνο τον έναν): με καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες (Good Luck!).

10.8.2 Ασκήσεις

Άσκηση 10.8.1. *Δίνεται η σφαίρα B_a κέντρου $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ και ακτίνας $r > 0$:*

$$B_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \le r^2\right\}.$$

Να υπολογιστεί ο όγκος $V(B_r)$ της σφαίρας αυτής.

Λύση. Θα υπολογίσουμε πρώτα τον όγκο της σφαίρας B με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $a = 1$,

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}.$$

Ο όγκος της σφαίρας B δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1, δηλαδή

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz.$$

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με τρεις τρόπους: με καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Καρτεσιανές συντεταγμένες. Η σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας 1 μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$B = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2},$$
$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\Big\}.$$

Παρατηρούμε ότι το B είναι xy-απλό σύνολο και επομένως από το Θεώρημα Fubini το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$$

Το ''μέσα'' ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα:

$$\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = [z]_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Επομένως, έχουμε

$$V(B) = 2\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dydx. \tag{10.1}$$

Για να μην μπλέξουμε με τους συμβολισμούς, υπολογίζουμε τώρα χωριστά το παρακάτω απλό ολοκλήρωμα (όπου $c > 0$):

$$\begin{aligned}\int_{-c}^{c} \sqrt{c^2-y^2}\, dy &= c\int_{-c}^{c} \sqrt{1-\left(\frac{y}{c}\right)^2}\, dy \quad (\text{θέτουμε } \frac{y}{c} = \sin t) \\ &= c^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\, dt = c^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt \\ &= c^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{c^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi c^2}{2}.\end{aligned}$$

Από τον παραπάνω υπολογισμό, θέτοντας $c = \sqrt{1-x^2}$, παίρνουμε

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy = \frac{\pi}{2}(1-x^2).$$

Άρα, αντικαθιστώντας στη σχέση (10.1), έχουμε

$$V(B) = 2\int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}(1-x^2)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

(Όπως αναμενόταν προέκυψε το γνωστό αποτέλεσμα για τον όγκο της σφαίρας ακτίνας 1.)

Κυλινδρικές συντεταγμένες. Ο υπολογισμός του όγκου της σφαίρας με κυλινδρικές συντεταγμένες έχει γίνει στην Παράγραφο 10.6 (Άσκηση 10.6.4).

Σφαιρικές συντεταγμένες. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε τώρα σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού είναι [2]:

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = -\rho^2 \sin\varphi,$$

και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}| = \rho^2 \sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz = \int\int\int_{B^*} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi.$$

Μένει να βρούμε το σύνολο B^* στο οποίο γίνεται τώρα η ολοκλήρωση. Καταρχάς, υπενθυμίζουμε ότι η μεταβλητή ρ μετράει την απόσταση ενός σημείου του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή των αξόνων. Επομένως, για τα σημεία της σφαίρας B ισχύει ότι $0 \leq \rho \leq 1$. Για να βρούμε τη γωνία θ προβάλλουμε στο xy-επίπεδο (ακριβώς όπως κάναμε και στις κυλινδρικές συντεταγμένες). Η προβολή της σφαίρας B στο xy-επίπεδο είναι ο δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Συνεπώς, για τα σημεία της σφαίρας η γωνία θ ικανοποιεί την σχέση $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Τέλος, θυμίζουμε ότι για ένα σημείο $A(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$, η γωνία $\varphi \in (0, \pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία OA με τον ημιάξονα Oz. Επομένως, για τα σημεία της σφαίρας ισχύει ότι $0 < \varphi < \pi$. Τελικά, το σύνολο B^* είναι

$$B^* = \{(\rho, \theta, \varphi) \, : \, 0 < \rho < 1, \, 0 < \theta < 2\pi, \, 0 < \varphi < \pi\}.$$

Το σύνολο B^* είναι ένα ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο και άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
V(B) &= \int\int\int_{B^*} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho \right) d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \sin\varphi \, d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin\varphi \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{2\pi}{3} \sin\varphi d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3} \left[-\cos\varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

[2] Αυτό το αποτέλεσμα μπορείτε να παίρνετε δεδομένο χωρίς να χρειάζεται να κάνετε τον υπολογισμό.

(Όπως αναμενόταν προέκυψε το γνωστό αποτέλεσμα για τον όγκο της σφαίρας ακτίνας 1.)

Προς το παρόν, έχουμε υπολογίσει τον όγκο της σφαίρας B κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας 1. Η τυχαία σφαίρα B_r με κέντρο $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και ακτίνα $r > 0$ γράφεται ως εξής

$$B_a = \overrightarrow{a} + r \cdot B.$$

Επομένως, για τον όγκο της σφαίρας B_r έχουμε

$$V(B_r) = V(\overrightarrow{a} + r \cdot B) = V(r \cdot B) = r^3 V(B) = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

(Θυμίζουμε ότι αν $A \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι ένα ''καλό'' σύνολο για το οποίο ορίζεται ο όγκος, τότε ισχύει $V(\overrightarrow{x_0} + A) = V(A)$, για κάθε $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^3$, και $V(\lambda A) = \lambda^3 V(A)$ για κάθε $\lambda > 0$. Γενικότερα, στον $\mathbb{R}^d$ ισχύει $V(\overrightarrow{x_0} + A) = V(A)$, για κάθε $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^d$, και $V(\lambda A) = \lambda^d V(A)$ για κάθε $\lambda > 0$.) ■

Άσκηση 10.8.2. *Να υπολογιστεί ο όγκος $V(\mathcal{E})$ του ελλειψοειδούς*

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\},$$

όπου $a, b, c > 0$.

Σχόλιο. Αν ανατρέξετε στις ασκήσεις του Κεφαλαίου 8 (Παράγραφος 8.6), θα θυμηθείτε πως όταν θέλαμε να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ένα χωρίο που περικλείεται από έλλειψη, τότε δεν μας βοηθούσε ο πολικός μετασχηματισμός, αλλά μια παραλλαγή αυτού.

Αντιστοίχως, στον $\mathbb{R}^3$ όταν το στερεό που έχουμε περικλείεται από ένα ελλειψοειδές, τότε δεν μας βοηθά ο σφαιρικός μετασχηματισμός, αλλά μια παραλλαγή αυτού. Όπως σωστά μαντέψατε, η εν λόγω παραλλαγή είναι η εξής:

$$x = a\rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = c\rho\sin\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού είναι:

$$\begin{aligned}
\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\varphi & 0 & -c\rho\sin\varphi \end{vmatrix} \\
&= abc \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} \\
&= -abc\rho^2\sin\varphi.
\end{aligned}$$

(Η τελευταία ορίζουσα είναι ακριβώς η ορίζουσα του σφαιρικού μετασχηματισμού και έχει υπολογιστεί στην Παράγραφο 10.7. Το αποτέλεσμα μπορούμε να το χρησιμοποιούμε ως γνωστό.) Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = abc\rho^2 \sin\varphi.$$

Επομένως, αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση που το πεδίο ορισμού της περιέχει το ελλειψοειδές $\mathcal{E}$, τότε από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), παίρνουμε:

$$\int\int\int_{\mathcal{E}} f(x,y,z)dxdydz =$$
$$abc\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f\left(a\rho\cos\theta\sin\varphi, b\rho\sin\theta\sin\varphi, c\rho\sin\varphi\right)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi.$$

(Αιτιολογήστε τα νέα άκρα ολοκλήρωσης.) Αυτός θα είναι ο τρόπος αντιμετώπισης ενός θέματος εξετάσεων. Σε αυτές τις σημειώσεις όμως, επειδή έχουμε την πολυτέλεια να έχουμε λύσει πιο πάνω την Άσκηση 10.8.1, θα κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητών και θα αναχθούμε στην προηγούμενη άσκηση. (Θα παρατηρήσετε ότι ουσιαστικά δεν προτεινουμε κάποιον άλλο τρόπο για να λυθεί η άσκηση, πέραν από αυτόν που περιγράψαμε παραπάνω. Απλά είναι ένας πιο σύντομος τρόπος παρουσίασης με δεδομένη όμως την Άσκηση 10.8.1).

Λύση. Ο όγκος του ελλειψοειδούς δίνεται από το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1, δηλαδή

$$V(\mathcal{E}) = \int\int\int_{\mathcal{E}} dxdydz.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$u = \frac{x}{a} \quad v = \frac{y}{b} \quad w = \frac{z}{c}$$

ή ισοδύναμα

$$x = au \quad y = bv \quad z = cw.$$

Υπολογίζουμε τώρα την ορίζουσα του πίνακα Jacobi:

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc > 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$V(\mathcal{E}) = abc\int\int\int_{\mathcal{E}^*} dudvdw.$$

Για να βρούμε ποιο είναι το σύνολο $\mathcal{E}^*$ παρατηρούμε ότι για τα σημεία του ελλειψοειδούς $\mathcal{E}$ ισχύει

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 + w^2 \leq 1.$$

Επομένως, το σύνολο $\mathcal{E}^*$ είναι η σφαίρα (ως προς τις συντεταγμένες uvw) με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα 1:

$$\mathcal{E} = \left\{(u,v,w) \,:\, u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}.$$

Άρα, το ολοκλήρωμα $\int\int\int_{\mathcal{E}^*} dudvdw$ ισούται με τον όγκο της σφαίρας ακτίνας 1 και έχει υπολογιστεί στην προηγούμενη άσκηση:

$$\int\int\int_{\mathcal{E}^*} dudvdw = \frac{4\pi}{3}.$$

Τελικά, ο όγκος του ελλειψοειδούς $\mathcal{E}$ είναι

$$V(\mathcal{E}) = abc\int\int\int_{\mathcal{E}^*} dudvdw = \frac{4\pi}{3}abc.$$

■

Άσκηση 10.8.3. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int\int_D z^2\, dxdydz,$$

όπου D είναι το άνω ημισφαίριο, δηλαδή

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0\right\}.$$

Λύση. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με τρεις τρόπους: με καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Καρτεσιανές συντεταγμένες. Το άνω ημισφαίριο D μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -1 \leq x \leq 1,\, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το D είναι xy-απλό σύνολο και επομένως από το Θεώρημα Fubini το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$I = \int\int\int_D z^2\, dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\, dzdydx$$

Το ''μέσα'' ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1-x^2-y^2\right)^{3/2}.$$

Επομένως, έχουμε

$$I = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right)^{3/2}\, dydx. \tag{10.2}$$

Υπολογίζουμε τώρα χωριστά το παρακάτω απλό ολοκλήρωμα (όπου $c > 0$):

$$\begin{aligned}
\int_{-c}^{c} \left(c^2-y^2\right)^{3/2}\, dy &= c^3 \int_{-c}^{c} \left(1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right)^{3/2} du \quad (\text{θέτουμε } \frac{y}{c} = \sin t) \\
&= c^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right)^{3/2} \cdot \cos t\, dt = c^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt \\
&= c^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t\right)^2 dt = c^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt \\
&= \frac{c^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right) dt \\
&= \frac{c^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt \\
&= \frac{c^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\cos 4t\right) dt \\
&= \frac{c^4}{4} \left[\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{c^4}{4} \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{3\pi}{8}c^4.
\end{aligned}$$

Από τον παραπάνω υπολογισμό, θέτοντας $c = \sqrt{1-x^2}$, παίρνουμε

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right)^{3/2} dy = \frac{3\pi}{8}(1-x^2)^2.$$

Άρα, αντικαθιστώντας στη σχέση (10.2), έχουμε

$$I = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{3\pi}{8}(1-x^2)^2\, dx = \frac{\pi}{8}\int_{-1}^{1}\left(1-2x^2+x^4\right) dx = \frac{\pi}{8}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{2\pi}{15}.$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες. Θέτουμε

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Η ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial r,\theta,z} = r > 0$. Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int\int\int_{D^*} z^2 r\, drd\theta dz.$$

Θα βρούμε τώρα το σύνολο D^*. Η προβολή του άνω ημισφαιρίου στο xy-επίπεδο είναι ο δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Επομένως, ισχύει ότι $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Όσον αφορά τη μεταβλητή z, έχουμε ότι το στερεό D φράσσεται προς τα κάτω από το xy-επίπεδο και προς τα πάνω από το ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Συνεπώς,

$$0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$D^* = \left\{(r,\theta,z) \,:\, 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta \leq \pi,\, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}\right\}.$$

Το σύνολο D^* είναι θr-απλό και $r\theta$-απλό. Αν το δούμε ως θr-απλό σύνολο, τότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z^2 r\, dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z^2\, dz\right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{\sqrt{1-r^2}} drd\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3 drd\theta \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3 dr\right) = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 r\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3 dr \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 \left(\frac{-1}{5}\left(1-r^2\right)^{5/2}\right)' dr = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{-1}{5}\left(1-r^2\right)^{5/2}\right]_{r=0}^{1} \\
&= \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$I = \int\int\int_D z^2\, dxdydz = \frac{2\pi}{15}.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες. Τέλος, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε τώρα σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού είναι $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2 \sin\varphi$, και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = \rho^2 \sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_D dxdydz = \int\int\int_{D^*} (\rho\cos\varphi)^2 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int\int\int_{D^*} \rho^4 \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Μένει να βρούμε το σύνολο D^* στο οποίο γίνεται τώρα η ολοκλήρωση. Καταρχάς, η μεταβλητή ρ μετράει την απόσταση ενός σημείου του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή των αξόνων. Επομένως, για τα σημεία του ημισφαιρίου D ισχύει ότι $0 \leq \rho \leq 1$. Για να βρούμε τη γωνία θ προβάλλουμε στο xy-επίπεδο. Η προβολή του ημισφαιρίου D στο xy-επίπεδο είναι ο δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Συνεπώς, για τα σημεία του ημισφαιρίου η γωνία θ ικανοποιεί την σχέση $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Τέλος, για ένα σημείο $A(x,y,z)$ του $\mathbb{R}^3$, η γωνία $\varphi \in (0,\pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία OA με τον ημιάξονα Oz. Επομένως, για τα σημεία του ημισφαιρίου ισχύει ότι $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Τελικά, το σύνολο D^* είναι

$$D^* = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \,:\, 0 < \rho < 1,\, 0 < \theta < 2\pi,\, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Το σύνολο D^* είναι ένα ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο και άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_{D^*} \rho^4 \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^4 \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, \sin\varphi \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho\right) d\varphi d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi\right) d\theta \\ &= \frac{1}{5}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi\right) = \frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi \\ &(\text{θέτουμε } \cos\varphi = u) \\ &= \frac{2\pi}{5}\int_0^1 u^2 \, du = \frac{2\pi}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{15}. \end{aligned}$$

■

Άσκηση 10.8.4. *Δίνεται το στερεό*

$$B\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,z\geq\sqrt{x^2+y^2},\,x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}.$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I=\int\int\int_B(x^2+y^2)\,dxdydz\quad\textit{και}\quad J=\int\int\int_B\sqrt{z}\,dxdydz.$$

Λύση. Καταρχάς, θα αφιερώσουμε λίγο χρόνο για να δούμε ποιο είναι το στερεό B. Η εξίσωση $z=\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow(z\geq 0$ και $z^2=x^2+y^2)$ παριστάνει έναν μονόχωνο κώνο ο οποίος βρίσκεται στον άνω ημίχωρο $(z\geq 0)$. Από την άλλη μεριά, η εξίσωση $x^2+y^2+z^2=1$ παριστάνει τη σφαίρα κέντρου O και ακτίνας 1. Συνεπώς, το στερεό B περικλείεται προς τα κάτω από τον κώνο και προς τα πάνω από τη σφαίρα. Μπορείτε να παρομοιάσετε το B με κάποιο αντικείμενο;[3]
Θα βρούμε τώρα τη γωνία που σχηματίζει η γενέτειρα του κώνου με τον ημιάξονα Oz. Αυτό θα μας χρειαστεί όταν θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες. Για να βρούμε τη ζητούμενη γωνία έχουμε δύο τρόπους. Ο ένας είναι να παρατηρήσουμε ότι για $x=0$ η εξίσωση του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ γίνεται $z=\sqrt{y^2}\Leftrightarrow z=\pm y$. Άρα, η τομή του κώνου με το επίπεδο $x=0$ (δηλαδή το yz-επίπεδο) είναι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας (στο yz-επίπεδο) και άρα η γενέτειρα σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον ημιάξονα Oz.
Ο δεύτερος τρόπος είναι να γράψουμε την εξίσωση του κώνου σε σφαιρικές συντεταγμένες. Υπενθυμίζουμε (δείτε την Παράγραφο 10.7) ότι η εξίσωση αυτού του κώνου σε σφαιρικές συντεταγμένες έχει τη μορφή $\varphi=\varphi_0$, όπου φ_0 είναι η ζητούμενη γωνία. Έχουμε, λοιπόν,

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow\rho\cos\varphi=\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}\Leftrightarrow\rho\cos\varphi=\rho|\sin\varphi|$$
$$\overset{0<\varphi<\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow}\cos\varphi=\sin\varphi\Leftrightarrow\tan\varphi=1\overset{0<\varphi<\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow}\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Άρα, η γενέτειρα του κώνου σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον ημιάξονα Oz.

Περνάμε τώρα στους υπολογισμούς των ολοκληρωμάτων I και J. Το καθένα από αυτά θα το υπολογίσουμε με δύο τρόπους: με κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες. Ξεκινάμε με το I.
Κυλινδρικές συντεταγμένες. Θέτουμε

$$x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta\quad z=z.$$

Η ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχηματισμού είναι ως γνωστόν $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r>0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ολοκλήρωμα

[3] Στον γράφοντα το στερεό B φέρνει μια ευχάριστη ανάμνηση: το παγωτό χωνάκι, δηλαδή το μπισκότο (κώνος) με τη μπάλα παγωτού από πάνω.

γίνεται

$$I = \int\int\int_{B^*} \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right) r\, drd\theta dz = \int\int\int_{B^*} r^3\, drd\theta dz.$$

Θα βρούμε τώρα το σύνολο B^*. Αν προβάλλουμε το στερεό B στο xy-επίπεδο, τότε παίρνουμε έναν δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Πόση είναι όμως η ακτίνα του δίσκου; Αν έχουμε μια καλή εποπτεία του στερεού B είναι εύκολο να δούμε ότι η ακτίνα του δίσκου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την τομή του κώνου με τη σφαίρα. Από το σύστημα των εξισώσεων του κώνου ($z = \sqrt{x^2+y^2}$) και της σφαίρας ($x^2+y^2+z^2 = 1$) έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} z^2 = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z^2 = x^2+y^2 \\ 2z^2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ z^2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \overset{z\geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}.$$

Επομένως, η τομή του κώνου και της σφαίρας είναι ο κύκλος $x^2+y^2 = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (δηλαδή ο κύκλος στο επίπεδο $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ με κέντρο $\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και ακτίνα $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Άρα, η προβολή του στερεού B στο xy-επίπεδο είναι ο κύκλος $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$, δηλαδή ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Αυτό σημαίνει ότι οι κυλινδρικές συντεταγμένες r,θ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Όσον αφορά τη μεταβλητή z, έχουμε ότι το στερεό B φράσσεται προς τα κάτω από τον κώνο $z^2 = x^2+y^2$ $(z \geq 0)$ και προς τα πάνω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2 = 1$. Συνεπώς, ισχύει

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \overset{x^2+y^2=r^2}{\Longleftrightarrow} r \leq z \leq \sqrt{1-r^2}.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$B^* = \left\{(r,\theta,z)\, :\, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}},\, 0 \leq \theta \leq \pi,\, r \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\right\}.$$

Το σύνολο B^* είναι θr-απλό και $r\theta$-απλό. Αν το δούμε ως θr-απλό σύνολο, τότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_{B^*} r^3 \, dr d\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_r^{\sqrt{1-r^2}} r^3 \, dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3 \left(\int_r^{\sqrt{1-r^2}} dz\right) dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3 \left(\sqrt{1-r^2}-r\right) dr d\theta \\
&\text{(το ``μέσα'' ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από } \theta) \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right) dr\right) = 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(r^3\sqrt{1-r^2}-r^4\right) dr \\
&= 2\pi\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\sqrt{1-r^2}\, dr - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^4 \, dr\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2 \left(\left(1-r^2\right)^{3/2}\right)' dr - \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left[r^2\left(1-r^2\right)^{3/2}\right]_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(1-r^2\right)^{3/2} dr - \frac{1}{5(\sqrt{2})^5}\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} -\frac{1}{5}\left(\left(1-r^2\right)^{5/2}\right)' dr - \frac{1}{5\cdot 4\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{15}\left[\left(1-r^2\right)^{5/2}\right]_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{20\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{12\sqrt{2}} - \frac{2}{15}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} - 1\right] - \frac{1}{20\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{12\sqrt{2}} - \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{2}{15} - \frac{1}{20\sqrt{2}}\right) \\
&= \ldots = \frac{8-5\sqrt{2}}{30}\pi
\end{aligned}
$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$I = \int\int\int_B (x^2+y^2)\, dx dy dz = \frac{8-5\sqrt{2}}{30}\pi.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες. Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα I με σφαιρικές συντεταγμένες. Με άλλα λόγια, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής,

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\sin\varphi$, και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = \rho^2\sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_B (x^2+y^2)\,dxdydz \\
&= \int\int\int_{B'} \left(\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int\int\int_{B'} \rho^2\sin^2\varphi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int\int\int_{B'} \rho^4\sin^3\varphi\,d\rho d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Μένει να βρούμε το σύνολο B' στο οποίο γίνεται τώρα η ολοκλήρωση. Καταρχάς, η μεταβλητή θ είναι κοινή με τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Εφόσον η προβολή του στερεού B στο xy-επίπεδο είναι ένας κυκλικός δίσκος, έχουμε ότι $0\le\theta\le 2\pi$.

Όσον αφορά τη μεταβλητή φ, υπενθυμίζουμε ότι για ένα σημείο $A(x,y,z)$ του $\mathbb{R}^3$, η $\varphi\in(0,\pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία OA με τον ημιάξονα Oz. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η γενέτειρα του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον ημιάξονα Oz. Άρα, αν έχουμε μια καλή εποπτεία του στερεού B, είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι για τα σημεία του ισχύει $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

Τέλος, η μεταβλητή ρ μετράει την απόσταση ενός σημείου του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή των αξόνων. Για το στερεό B παρατηρούμε ότι φράσσεται προς τα πάνω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$. Άρα, για τα σημεία του B οι αποστάσεις τους από την αρχή των αξόνων ικανοποιούν την σχέση $0\le\rho\le 1$.

Τελικά, το σύνολο B' είναι

$$B' = \left\{(\rho,\theta,\varphi)\,:\,0<\rho<1,\,0<\theta<2\pi,\,0<\varphi<\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Το σύνολο B' είναι ένα ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο και άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{B'} \rho^4 \sin^3\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho^4 \sin^3\varphi \, d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) d\varphi d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \, d\varphi \right) d\theta \\
&= \frac{1}{5} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \, d\varphi \right) = \frac{2\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos^2\varphi\right) \sin\varphi \, d\varphi \quad (\text{θέτουμε } \cos\varphi = u) \\
&= -\frac{2\pi}{5} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - u^2\right) du = -\frac{2\pi}{5} \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{u=1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= -\frac{2\pi}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - 1 + \frac{1}{3} \right) \\
&= \ldots = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{30} \pi.
\end{aligned}$$

Άρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$I = \iiint_B (x^2 + y^2) \, dxdydz = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{30} \pi.$$

(Όπως αναμενόταν, προέκυψε η ίδια τιμή με τις κυλινδρικές συντεταγμένες.)

Υπολογισμός του ολοκληρώματος J. Υπολογίζουμε τώρα το δεύτερο από τα ολοκληρώματα που ζητά η άσκηση και το οποίο είναι το ολοκλήρωμα

$$J = \iiint_B \sqrt{z} \, dxdydz.$$

Παρατηρούμε ότι το στερεό B είναι το ίδιο και αλλάζει μόνο η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση. Συνεπώς, όταν κάνουμε την αλλαγή σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες, τα νέα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι αυτά που βρήκαμε και προηγουμένως για το ολοκλήρωμα I. Άρα, μας μένει μόνο ο υπολογισμός του ολοκληρώματος J.

Κυλινδρικές συντεταγμένες. Με την αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες ($x =$

$r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z)$, το ολοκλήρωμα J γίνεται

$$
\begin{aligned}
J &= \int\int\int_B \sqrt{z}\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_r^{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{z}\cdot r\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(\int_r^{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{z}\,dz\right)drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\cdot\frac{2}{3}\left[z^{3/2}\right]_{z=r}^{\sqrt{1-r^2}} drd\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left[\left(\sqrt{1-r^2}\right)^{3/2} - r^{3/2}\right]drd\theta \\
&\text{(το ``μέσα'' ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από } \theta) \\
&= \frac{2}{3}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left[\left(1-r^2\right)^{3/4} - r^{3/2}\right]dr\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[r\left(1-r^2\right)^{3/4} - r^{5/2}\right]dr \\
&= \frac{4\pi}{3}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(1-r^2\right)^{3/4}\,dr - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^{5/2}\,dr\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}\left(-\frac{2}{7}\left[\left(1-r^2\right)^{7/4}\right]_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{2}{7}\left[r^{7/2}\right]_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \\
&= \frac{8\pi}{21}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{7/4} + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{7/2}\right) \\
&= \frac{8\pi}{21}\left(1 - 2\cdot\frac{1}{(\sqrt[4]{2})^7}\right) = \frac{8\pi}{21}\left(1 - \frac{1}{(\sqrt[4]{2})^3}\right) \\
&= \frac{8\pi}{21}\left(1 - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right) = \frac{4(2-\sqrt[4]{2})}{21}\pi.
\end{aligned}
$$

Τελικά, το ολοκλήρωμα J είναι

$$J = \int\int\int_B \sqrt{z}\,dxdydz = \frac{4(2-\sqrt[4]{2})}{21}\pi.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες. Με την αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες ($x = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\varphi$), το ολοκλήρωμα J γίνεται:

$$
\begin{aligned}
J &= \int\int\int_B \sqrt{z}\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \sqrt{\rho\cos\varphi}\cdot\rho^2\sin\varphi\; d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^{5/2}\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}\; d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}\left(\int_0^1 \rho^{5/2}\; d\rho\right) d\varphi d\theta \\
&= \frac{2}{7}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}\cdot\left[\rho^{7/2}\right]_{\rho=0}^1\; d\varphi d\theta \\
&= \frac{2}{7}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}\; d\varphi d\theta \\
&\text{(το ``μέσα'' ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από } \theta) \\
&= \frac{2}{7}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}\; d\varphi\right) \\
&= \frac{4\pi}{7}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}\; d\varphi \quad (\text{θέτουμε } \cos\varphi = u) \\
&= -\frac{4\pi}{7}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{u}\, du = -\frac{4\pi}{7}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{u=1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= -\frac{8\pi}{21}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{8\pi}{21}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}\right) \\
&= \frac{8\pi}{21}\left(1 - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right) = \frac{4(2-\sqrt[4]{2})}{21}\pi.
\end{aligned}
$$

Τελικά, το ολοκλήρωμα J είναι

$$
J = \int\int\int_B \sqrt{z}\, dxdydz = \frac{4(2-\sqrt[4]{2})}{21}\pi.
$$

(Όπως αναμενόταν, προέκυψε η ίδια τιμή για το ολοκλήρωμα J με τις κυλινδρικές συντεταγμένες.)

■

Άσκηση 10.8.5. *Να υπολογιστεί ο όγκος $V(B)$ του παρακάτω στερεού*

$$
B = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \le 5,\; \sqrt{3}z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}.
$$

Το στερεό B που μας δίνεται μοιάζει με αυτό που είχαμε στην Άσκηση 10.8.4. Το B περικλείεται προς τα κάτω από έναν κώνο και προς τα πάνω από μια σφαίρα. Οι μόνες διαφορές είναι: (1) η ακτίνα της σφαίρας είναι ίση με $\sqrt{5}$ (στην Άσκηση 10.8.4, η ακτίνα της σφαίρας ήταν ίση με 1), και (2) η γενέτειρα του κώνου δεν σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον ημιάξονα Oz, αλλά μια άλλη γωνία, την οποία πρέπει να βρούμε. Αν έχουμε καταλάβει την Άσκηση 10.8.4, τότε η παρούσα άσκηση δεν θα μας δυσκολέψει ιδιαίτερα.

Λύση. Ο όγκος του στερεού B δίνεται από το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1, δηλαδή

$$V(B) = \int\int\int_B 1\,dxdydz.$$

Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Κυλινδρικές συντεταγμένες. Θέτουμε

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Η ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχηματισμού είναι ως γνωστόν $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$V(B) = \int\int\int_B 1\,dxdydz = \int\int\int_{B^*} r\,drd\theta dz.$$

Θα βρούμε τώρα το σύνολο B^*. Αν προβάλλουμε το στερεό B στο xy-επίπεδο, τότε παίρνουμε έναν δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Η ακτίνα του δίσκου αυτού είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την τομή του κώνου με τη σφαίρα. Από το σύστημα των εξισώσεων του κώνου ($\sqrt{3}z = \sqrt{x^2+y^2}$) και της σφαίρας ($x^2+y^2+z^2=5$) έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} 3z^2 = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3z^2 = x^2+y^2 \\ 4z^2=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 = \frac{15}{4} \\ z^2=\frac{5}{4} \end{array}\right\}$$
$$\overset{z\geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 = \frac{15}{4} \\ z=\frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\}.$$

Επομένως, η τομή του κώνου και της σφαίρας είναι ο κύκλος $x^2+y^2 = \frac{15}{4}$, $z = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (δηλαδή ο κύκλος στο επίπεδο $z = \frac{\sqrt{5}}{2}$ με κέντρο $\left(0,0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{15}}{2}$). Άρα, η προβολή του στερεού B στο xy-επίπεδο είναι ο κύκλος $x^2+y^2 = \frac{15}{4}$, δηλαδή ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{15}}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι οι κυλινδρικές συντεταγμένες r,θ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$0 \leq r \leq \frac{\sqrt{15}}{2}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Όσον αφορά τη μεταβλητή z, έχουμε ότι το στερεό B φράσσεται προς τα κάτω από τον κώνο $\sqrt{3}z = \sqrt{x^2+y^2}$ ($z \geq 0$) και προς τα πάνω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=5$. Συνεπώς, ισχύει

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{5-x^2-y^2} \overset{x^2+y^2=r^2}{\iff} \frac{r}{\sqrt{3}} \leq z \leq \sqrt{5-r^2}.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$B^* = \left\{ (r,\theta,z) \,:\, 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{15}}{2},\, 0 \leq \theta \leq \pi,\, \frac{r}{\sqrt{3}} \leq z \leq \sqrt{5-r^2} \right\}.$$

Το σύνολο B^* είναι θr-απλό και $r\theta$-απλό. Αν το δούμε ως θr-απλό σύνολο, τότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
V(B) &= \int\int\int_{B^*} r\,drd\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}}\int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{5-r^2}} r\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}} r\left(\int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{5-r^2}} dz\right) drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}} r\left(\sqrt{5-r^2}-\frac{r}{\sqrt{3}}\right) drd\theta \\
&\text{(το ``μέσα'' ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από } \theta) \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}} r\left(\sqrt{5-r^2}-\frac{r}{\sqrt{3}}\right) dr\right) = 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}}\left(r\sqrt{5-r^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}r^2\right) dr \\
&= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}} r\sqrt{5-r^2}\,dr - \int_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}r^2\,dr\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left[\left(5-r^2\right)^{3/2}\right]_{r=0}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\left[r^3\right]_{r=0}^{\frac{\sqrt{15}}{2}}\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(5-\frac{15}{4}\right)^{3/2} + \frac{1}{3}5^{3/2} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^3\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} + \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{15\sqrt{15}}{8}\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{8} + \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{5\sqrt{5}}{8}\right) \\
&= \frac{5\sqrt{5}}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Τελικά, ο όγκος του στερεού B είναι

$$V(B) = \int\int\int_B dxdydz = \frac{5\sqrt{5}}{3}\pi.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες. Υπολογίζουμε τώρα τον όγκο $V(B)$ με σφαιρικές συντεταγμένες. Με άλλα λόγια, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής,

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\sin\varphi$, και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = \rho^2\sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$V(B) = \int\int\int_B 1\,dxdydz = \int\int\int_{B'} \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi.$$

Μένει να βρούμε το σύνολο B' στο οποίο γίνεται τώρα η ολοκλήρωση. Καταρχάς, η μεταβλητή θ είναι κοινή με τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Εφόσον η προβολή του στερεού B στο xy-επίπεδο είναι ένας κυκλικός δίσκος, έχουμε ότι $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Όσον αφορά τη μεταβλητή φ, πρέπει να βρούμε τη γωνία που σχηματίζει η γενέτειρα του κώνου με τον ημιάξονα Oz. Επειδή ο κώνος βρίσκεται στον άνω ημίχωρο $z \geq 0$, η ζητούμενη γωνία θα είναι μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{2}$. Γράφοντας την εξίσωση του κώνου σε σφαιρικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{3}z = \sqrt{x^2+y^2} &\Leftrightarrow \sqrt{3}\rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}\rho\cos\varphi = \rho|\sin\varphi| \overset{0<\varphi<\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{3}\cos\varphi = \sin\varphi\\ &\Leftrightarrow \tan\varphi = \sqrt{3} \overset{0<\varphi<\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow} \varphi = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Επομένως, η γενέτειρα του κώνου σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{3}$ με τον ημιάξονα Oz. Υπενθυμίζουμε τώρα ότι για ένα σημείο $A(x,y,z)$ του $\mathbb{R}^3$, η $\varphi \in (0,\pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία OA με τον ημιάξονα Oz. Άρα, για τα σημεία του στερεού B, η γωνία φ κινείται μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{3}$, δηλαδή ισχύει $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.
Τέλος, η μεταβλητή ρ μετράει την απόσταση ενός σημείου του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή των αξόνων. Για το στερεό B παρατηρούμε ότι φράσσεται προς τα πάνω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=5$. Άρα, για τα σημεία του B οι αποστάσεις τους από την αρχή των αξόνων ικανοποιούν την σχέση $0 \leq \rho \leq \sqrt{5}$.

Τελικά, το σύνολο B' είναι

$$B' = \left\{(\rho, \theta, \varphi) \,:\, 0 < \rho < \sqrt{5},\, 0 < \theta < 2\pi,\, 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Το σύνολο B' είναι ένα ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο και άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
V(B) &= \int\int\int_{B'} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left(\int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 \, d\rho \right) d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\sqrt{5}} d\varphi d\theta \\
&= \frac{(\sqrt{5})^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi \, d\varphi d\theta = \frac{5\sqrt{5}}{3} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi \, d\varphi \right) \\
&= \frac{5\sqrt{5}}{3} \cdot 2\pi \cdot [-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos 0 \right) \\
&= \frac{5\sqrt{5}}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5\sqrt{5}}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Άρα, ο όγκος του στερεού B είναι

$$V(B) = \int\int\int_B 1 \, dxdydz = \frac{5\sqrt{5}}{3}\pi.$$

(Όπως αναμενόταν, προέκυψε η ίδια τιμή με τις κυλινδρικές συντεταγμένες.)

■

Άσκηση 10.8.6. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int\int_K x^2 \sqrt{z} \, dxdydz,$$

όπου K είναι το στερεό

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\right\}$$

(όπου $a > 0$).

Προτού προχωρήσουμε στη λύση της άσκησης, αφιερώνουμε λίγο χρόνο για να καταλάβουμε καλύτερα το στερεό K πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση.

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι τα σημεία (x, y, z) του K ικανοποιούν την ανισότητα $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Συνεπώς, το K βρίσκεται εντός της σφαίρας κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας a.
Δεύτερον, τα σημεία του K ικανοποιούν την ανισότητα $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$. Από την άσκηση 10.8.4, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ παριστάνει έναν κώνο C_1 η γενέτειρα του οποίου σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον ημιάξονα Oz. Επιπλέον, η εξίσωση $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ παριστάνει έναν κώνο C_2, η γενέτειρα του οποίου σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με τον ημιάξονα Oz (δώστε λεπτομέρειες). Επομένως, ο δεύτερος κώνος C_2 βρίσκεται ''μέσα'' στον πρώτο κώνο, τον C_1. Το στερεό K βρίσκεται στο χωρίο μεταξύ των δύο κώνων. Το χωρίο αυτό εκτείνεται απεριόριστα, όμως όπως είπαμε το στερεό K περιορίζεται από την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Μπορείτε να παρομοιάσετε το στερεό K με κάποιο αντικείμενο;

Αν έχουμε μια καλή εποπτεία του K, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της άσκησης.

Λύση. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες.
Σφαιρικές συντεταγμένες. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών,

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του σφαιρικού μετασχηματισμού είναι $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2 \sin\varphi$, και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}| = \rho^2 \sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_K x^2 \sqrt{z}\, dxdydz = \int\int\int_{K^*} (\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 \sqrt{\rho\cos\varphi}\, \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int\int\int_{K^*} \rho^{9/2} \cos^2\theta \sin^3\varphi \sqrt{\cos\varphi}\; d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Μένει να βρούμε το σύνολο K^* στο οποίο γίνεται τώρα η ολοκλήρωση. Καταρχάς, η προβολή του στερεού K στο xy-επίπεδο είναι ένας κυκλικός δίσκος. Συνεπώς, έχουμε ότι $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Θα δούμε τώρα τι γίνεται με τη μεταβλητή φ. Όπως είπαμε το στερεό K βρίσκεται στο χωρίο που περικλείεται μεταξύ του κώνου C_1, του οποίου η γενέτειρα σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον ημιάξονα Oz, και του κώνου C_2 του οποίου η γενέτειρα σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με τον Oz. Υπενθυμίζουμε τώρα ότι για ένα σημείο $A(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$, η $\varphi \in (0, \pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία OA με τον ημιάξονα Oz. Άρα, είναι φανερό ότι για τα σημεία του στερεού K, η γωνία φ κινείται μεταξύ $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{\pi}{4}$, δηλαδή ισχύει $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Τέλος, η μεταβλητή ρ μετράει την απόσταση ενός σημείου του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή των αξόνων. Υπενθυμίζουμε ότι το στερεό K φράσσεται από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$. Επομένως, αν φανταστούμε μια ημιευθεία με αρχή το O που σχηματίζει γωνία $\varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ με τον ημιάξονα Oz, παρατηρούμε ότι για τα σημεία του στερεού K οι αποστάσεις τους από το O ικανοποιούν τη σχέση $0 \leq \rho \leq a$.
Τελικά, το σύνολο K^* είναι

$$K^* = \Big\{(\rho, \theta, \varphi) \, : \, 0 < \rho < a, \, 0 < \theta < 2\pi, \, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{4}\Big\}.$$

Το σύνολο K^* είναι ένα ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο και άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_{K^*} \rho^{9/2} \cos^2\theta \sin^3\varphi \sqrt{\cos\varphi} \; d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^{9/2} \cos^2\theta \sin^3\varphi \sqrt{\cos\varphi} \; d\varphi d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^{9/2} \cos^2\theta \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \sqrt{\cos\varphi} \; d\varphi \right) d\rho d\theta
\end{aligned}$$

(το 'μέσα' ολοκλήρωμα είναι ένας αριθμός ανεξάρτητος των ρ, θ. Άρα βγαίνει εκτός.)

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \sqrt{\cos\varphi} \; d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^{9/2} \cos^2\theta \; d\rho d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \sqrt{\cos\varphi} \; d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left(\int_0^a \rho^{9/2} \; d\rho \right) d\theta
\end{aligned}$$

(Ομοίως το 'μέσα' ολοκλήρωμα είναι ένας αριθμός, άρα βγαίνει εκτός.)

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \sqrt{\cos\varphi} \; d\varphi \cdot \int_0^a \rho^{9/2} \; d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta.$$

Αφήνουμε ως άσκηση τους υπολογισμούς των τριών ολοκληρωμάτων.

(*Υπόδειξη*: Το πρώτο ολοκλήρωμα μπορείτε να το γράψετε στη μορφή

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \sqrt{\cos\varphi} \; d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2\varphi) \sin\varphi \sqrt{\cos\varphi} \; d\varphi$$

και μετά να κάνετε την αντικατάσταση $\cos\varphi = u$.)

Κυλινδρικές συντεταγμένες. Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα I με κυλινδρικές συντεταγμένες. Θέτουμε

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$$

Η ορίζουσα του κυλινδρικού μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_K x^2\sqrt{z}\,dxdydz = \int\int\int_{K'} r^2\cos^2\theta\sqrt{z}\cdot r\,drd\theta dz \\
&= \int\int\int_{K'} r^3\cos^2\theta\sqrt{z}\,drd\theta dz
\end{aligned}
$$

Βρίσκουμε τώρα το σύνολο K'. Η προβολή του στερεού K στο xy-επίπεδο, είναι ένας δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων. Η ακτίνα του δίσκου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την τομή της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=a^2$ με τον κώνο $C_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}$. Από το σύστημα των δύο εξισώσεων έχουμε

$$
\left\{\begin{array}{c} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=\frac{a^2}{2} \\ z=\frac{a}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}.
$$

Επομένως, η τομή του κώνου C_1 και της σφαίρας είναι ο κύκλος $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$, $z=\frac{a}{\sqrt{2}}$ (δηλαδή ο κύκλος στο επίπεδο $z=\frac{a}{\sqrt{2}}$ με κέντρο $\left(0,0,\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ και ακτίνα $\frac{a}{\sqrt{2}}$). Άρα, η προβολή του στερεού K στο xy-επίπεδο είναι ο κύκλος $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$, δηλαδή ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Αυτό σημαίνει ότι οι κυλινδρικές συντεταγμένες r,θ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$
0 \le r \le \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.
$$

Όσον αφορά τη μεταβλητή z, η κατάσταση είναι λίγο πιο πολύπλοκη σε σχέση με προηγούμενες ασκήσεις. Καταρχάς, χρειάζεται να βρούμε και την τομή του κώνου $C_2 : z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ με την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=a^2$. Από το σύστημα των δύο εξισώσεων έχουμε

$$
\left\{\begin{array}{c} z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=\frac{a^2}{4} \\ z=\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}.
$$

Επομένως, η τομή του κώνου C_2 και της σφαίρας είναι ο κύκλος $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, $z=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (δηλαδή ο κύκλος στο επίπεδο $z=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ με κέντρο $\left(0,0,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{a}{2}$). Η προβολή του κύκλου αυτού στο xy-επίπεδο είναι ο κύκλος $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, δηλαδή ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\frac{a}{2}$.

Το παρακάτω σχήμα διαφωτίζει αρκετά την κατάσταση. Παρατηρούμε ότι όταν η απόσταση r είναι μεταξύ 0 και $\frac{a}{2}$ $(0 \le r \le \frac{a}{2})$, τότε το στερεό K φράσσεται προς τα κάτω από τον κώνο C_1 και προς τα πάνω από τον κώνο C_2. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει

$$
\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{3(x^2+y^2)} \Leftrightarrow r \le z \le r\sqrt{3}.
$$

Όταν, όμως, η απόσταση r ικανοποιεί $\frac{a}{2} \leq r \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$, τότε παρατηρούμε ότι το K φράσσεται προς τα κάτω από τον κώνο C_1 και προς τα πάνω από τη σφαίρα. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2-x^2-y^2} \Leftrightarrow r \leq z \leq \sqrt{a^2-r^2}.$$

Συνεπώς, το σύνολο K' μπορούμε να το γράψουμε μόνο ως ένωση δύο συνόλων:

$$\begin{aligned} K' &= \left\{(r,\theta,z) \,:\, 0 \leq r \leq \frac{a}{2},\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, r \leq z \leq r\sqrt{3}\right\} \cup \\ &\cup \left\{(r,\theta,z) \,:\, \frac{a}{2} \leq r \leq \frac{a}{\sqrt{2}},\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, r \leq z \leq \sqrt{a^2-r^2}\right\} \\ &= K_1 \cup K_2. \end{aligned}$$

Επομένως, και το ολοκλήρωμα I σπάει σε δύο ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_{K'} r^3\cos^2\theta\sqrt{z}\,drd\theta dz \\ &= \int\int\int_{K_1} r^3\cos^2\theta\sqrt{z}\,drd\theta dz + \int\int\int_{K_2} r^3\cos^2\theta\sqrt{z}\,drd\theta dz \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Τα σύνολα K_1 και K_2 είναι θr-απλά (και $r\theta$-απλά). Άρα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int\int_{K_1} r^3\cos^2\theta\sqrt{z}\,drd\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_r^{r\sqrt{3}} r^3\cos^2\theta\sqrt{z}\,dzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} r^3\cos^2\theta\left(\int_r^{r\sqrt{3}}\sqrt{z}\,dz\right)drd\theta \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} r^3\cos^2\theta\left[z^{3/2}\right]_r^{r\sqrt{3}}drd\theta \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} r^3\cos^2\theta\left((r\sqrt{3})^{3/2}-r^{3/2}\right)drd\theta \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\left(\int_0^{\frac{a}{2}} r^3\cdot r^{3/2}\left(\sqrt[4]{3}-1\right)dr\right)d\theta \\ &\text{(το ``μέσα'' ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του } \theta\text{)} \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt[4]{3}-1\right)\int_0^{\frac{a}{2}} r^{9/2}dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Αφήνουμε τους υπόλοιπους υπολογισμούς ως άσκηση.
Ομοίως, για το I_2 έχουμε

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int\int\int_{K_2} r^3\cos^2\theta\sqrt{z}\,drd\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\int_r^{\sqrt{a^2-r^2}} r^3\cos^2\theta\sqrt{z}\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r^3\cos^2\theta\left(\int_r^{\sqrt{a^2-r^2}}\sqrt{z}\,dz\right)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r^3\cos^2\theta\left[z^{3/2}\right]_r^{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r^3\cos^2\theta\left((a^2-r^2)^3-r^{3/2}\right)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\left(\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r^3\left((a^2-r^2)^3-r^{3/2}\right)dr\right)d\theta \\
&\text{(το ``μέσα'' ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του } \theta) \\
&= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r^3\left((a^2-r^2)^3-r^{3/2}\right)dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Αφήνουμε τους υπόλοιπους υπολογισμούς ως άσκηση.

(Το αποτέλεσμα που θα βγάλετε κάνοντας τους υπολογισμούς με τις κυλινδρικές συντεταγμένες πρέπει να συμφωνεί με αυτό που θα βγάλετε αν κάνετε τους υπολογισμούς με σφαιρικές συντεταγμένες. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε είτε έχετε κάνει κάποιο λάθος στους υπολογισμούς ή έχουμε κάνει κάποιο λάθος προηγουμένως καθώς βρίσκαμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης. Σε κάθε περίπτωση επικοινωνήστε με τον υπεύθυνο των σημειώσεων.) ■

Άσκηση 10.8.7. *Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int\int_B \left(1-4x^2-9y^2-z^2\right)dxdydz,$$

όπου B είναι το στερεό:

$$B = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, 4x^2+9y^2+z^2\le 1\right\}.$$

Λύση. Το στερεό B είναι ένα ελλειψοειδές:

$$B = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}+\frac{z^2}{1}\le 1\right\},$$

όπου $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ και $c = 1$. Όπως και στην Άσκηση 10.8.2, κάνουμε πρώτα μια αλλαγή μεταβλητών η οποία από το ελλειψοειδές θα μας οδηγήσει στη σφαίρα, και έπειτα θα χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες. Θέτουμε, λοιπόν,

$$x = \frac{1}{2}u, \quad y = \frac{1}{3}v, \quad w = z.$$

Ο πίνακας Jacobi του παραπάνω μετασχηματισμού έχει ορίζουσα:

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι προφανώς $\frac{1}{6}$. Επιπλέον,

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 1 \Leftrightarrow 4\frac{u^2}{4} + 9\frac{v^2}{9} + w^2 \leq 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 + w^2 \leq 1.$$

Επομένως, οι καινούριες μεταβλητές (u, v, w) κινούνται στην μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών 10.4.1, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int\int\int_B \left(1 - 4x^2 - 9y^2 - z^2\right)\, dxdydz = \int\int\int_{B^*} \left(1 - 4\frac{u^2}{4} - 9\frac{v^2}{9} - w^2\right) \cdot \frac{1}{6}\, dudvdw$$
$$= \frac{1}{6}\int\int\int_{B^*} \left(1 - u^2 - v^2 - w^2\right)\, dudvdw,$$

όπου B^* είναι πλέον η μοναδιαία μπάλα, δηλαδή

$$B^* = \left\{(u, v, w) \,:\, u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον σφαιρικό μετασχηματισμό, δηλαδή κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$u = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad v = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad w = \rho\cos\varphi.$$

(Αν κάποιος μπερδεύεται με τα σύμβολα u, v, w, μπορεί να τα αλλάξει πάλι σε x, y, z. Εξάλλου, ως γνωστόν, το πώς θα συμβολίσουμε τις μεταβλητές ολοκλήρωσης δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό.) Η ορίζουσα Jacobi του σφαιρικού μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\sin\varphi$, και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = \rho^2\sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \frac{1}{6}\int\int\int_{B^*} \left(1 - u^2 - v^2 - w^2\right)\, dudvdw = \frac{1}{6}\int\int\int_{B'} \left(1 - \rho^2\right)\, \rho^2\sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi.$$

Όσον αφορά το στερεό B' τα πράγματα είναι απλά σε αυτήν την περίπτωση (μπορείτε να ανατρέξετε και στην Άσκηση 10.8.1). Αφού το B^* είναι η μοναδιαία μπάλα, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$B' = \{(\rho, \theta, \varphi) \, : \, 0 \leq \rho \leq 1, \, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \, 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Το σύνολο B' είναι ένα ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο και άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{6}\int\int\int_{B'} \left(1-\rho^2\right)\rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi}\left(1-\rho^2\right)\rho^2\sin\varphi \, d\varphi d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-\rho^2\right)\rho^2\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi \; d\varphi\right) d\rho d\theta = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right)\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi} d\rho d\theta \\
&= \frac{2}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right) d\rho d\theta
\end{aligned}$$

(το 'μέσα' ολοκλήρωμα είναι ένας αριθμός ανεξάρτητος του θ.)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\int_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right) d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^1 \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi}{45}.
\end{aligned}$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$I = \int\int\int_B \left(1-4x^2-9y^2-z^2\right) dxdydz = \frac{4\pi}{45}.$$

■

Άσκηση 10.8.8. *Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int\int\int_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dxdydz,$$

όπου B είναι η σφαίρα $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2 \leq a^2\right\}$ ($a > 0$).

Λύση. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του σφαιρικού μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\sin\varphi$, και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = \rho^2\sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz = \int\int\int_{B^*} e^{(\rho^2)^{3/2}}\rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int\int\int_{B^*} e^{\rho^3}\rho^2 \sin\varphi\ d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Εφόσον το σύνολο B είναι μια μπάλα με κέντρο O και ακτίνα $a > 0$, το σύνολο B^* είναι το παρακάτω ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο (μπορείτε να δείτε μια αναλυτική αιτιολόγηση στην Άσκηση 10.8.1):

$$B^* = \{(\rho,\theta,\varphi)\ :\ 0<\rho<a,\ 0<\theta<2\pi,\ 0<\varphi<\pi\}\,.$$

Άρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^\pi e^{\rho^3}\rho^2\sin\varphi\ d\varphi d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{\rho^3}\rho^2\left(\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\right) d\rho d\theta \\ &\quad (\text{το ‘μέσα’ ολοκλήρωμα είναι ένας αριθμός ανεξάρτητος των } \rho,\theta.) \\ &= \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^a e^{\rho^3}\rho^2\ d\rho d\theta = \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a e^{\rho^3}\rho^2\ d\rho\right)d\theta \\ &\quad (\text{ομοίως το ‘μέσα’ ολοκλήρωμα μπορεί να βγει εκτός αφού δεν εξαρτάται από } \theta) \\ &= \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^a e^{\rho^3}\rho^2\ d\rho\cdot\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= [-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\pi}\cdot\left[\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right]_{\rho=0}^{a}\cdot 2\pi \\ &= \frac{4\pi}{3}\left(e^{a^3}-1\right). \end{aligned}$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$I = \int\int\int_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz = \frac{4\pi}{3}\left(e^{a^3}-1\right).$$

■

Σχόλιο. Στην προηγούμενη άσκηση, αν χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες, τότε το ολοκλήρωμα I γίνεται (δώστε λεπτομέρειες):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} e^{(r^2+z^2)^{3/2}}\cdot r\ dzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a r\left(\int_{\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} e^{(r^2+z^2)^{3/2}}\ dz\right)drd\theta. \end{aligned}$$

Το "μέσα" ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται. (Γενικά, τα ολοκληρώματα $\int_a^b e^{x^2}dx$, $\int_a^b e^{x^3}dx$ δεν υπολογίζονται.) Επομένως, αυτήν είναι μια περίπτωση όπου δουλεύουν οι σφαιρικές συντεταγμένες, όχι όμως οι κυλινδρικές. Με τις σφαιρικές συντεταγμένες, προέκυψε το ολοκλήρωμα $\int_0^a \rho^2 \cdot e^{\rho^3}\, d\rho$, το οποίο υπολογίζεται εύκολα λόγω της παρουσίας του ρ^2!!

Άσκηση 10.8.9. *Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο*

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\int\int_{\epsilon^2\le x^2+y^2+z^2\le(1-\epsilon)^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\,(1-x^2-y^2-z^2)}}.$$

Παρατήρηση. Επειδή παίρνουμε το όριο για $\epsilon \to 0^+$, μας ενδιαφέρουν οι μικρές τιμές του ϵ. Όταν το ϵ είναι μικρό, τότε ισχύει $\epsilon^2 < (1-\epsilon)^2$ και άρα το στερεό (και κατ' επέκταση και το ολοκλήρωμα) είναι καλώς ορισμένο. Ειδικότερα, εύκολα βλέπουμε ότι $\epsilon^2 < (1-\epsilon)^2 \Leftrightarrow \epsilon < \frac{1}{2}$. Επομένως, το ολοκλήρωμα έχει νόημα για κάθε ϵ με $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$.

Λύση. Για κάθε $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ θέτουμε

$$K_\epsilon = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, \epsilon^2 \le x^2+y^2+z^2 \le (1-\epsilon)^2\right\}$$

και

$$I_\epsilon = \int\int\int_{K_\epsilon} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\,(1-x^2-y^2-z^2)}}.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα I_ϵ χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του σφαιρικού μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\sin\varphi$, και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = \rho^2\sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I_\epsilon = \int\int\int_{K_\epsilon^*} \frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2\,(1-\rho^2)}}\, d\rho d\theta d\varphi = \int\int\int_{K_\epsilon^*} \frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho d\theta d\varphi.$$

Θα βρούμε τώρα το σύνολο K_ϵ^*. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι το K_ϵ είναι το στερεό που περικλείεται από δύο ομόκεντρες σφαίρες με κέντρο την αρχή των αξόνων O. Η μικρή σφαίρα έχει ακτίνα ϵ ενώ η μεγάλη σφαίρα έχει ακτίνα $1-\epsilon$. Επομένως, για την απόσταση των σημείων του K_ϵ από την αρχή των αξόνων ισχύει $\epsilon \le \rho \le 1-\epsilon$.

Επιπλέον, η προβολή του K_ϵ στο xy-επίπεδο είναι ένας δακτύλιος με κέντρο την αρχή των αξόνων. Επομένως, για τη γωνία θ ισχύει $0 \le \theta \le 2\pi$.
Τέλος, όσον αφορά τη γωνία φ που είναι η γωνία με τον ημιάξονα Oz παρατηρούμε ότι για τα σημεία του K_ϵ ισχύει $0 \le \varphi \le \pi$.
Τελικά, το στερεό K_ϵ^* είναι:

$$K_\epsilon^* = \{(\rho, \theta, \varphi) \,:\, \epsilon \le \rho \le 1-\epsilon,\, 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le \varphi \le \pi\}\,.$$

Το στερεό K_ϵ^* είναι ένα ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο. Άρα, από το Θεώρημα Fubini, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I_\epsilon &= \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^{1-\epsilon}\int_0^{\pi} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sin\varphi\; d\varphi d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\right) d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}\int_\epsilon^{1-\epsilon}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\; d\rho d\theta = \int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\cdot\int_\epsilon^{1-\epsilon}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\; d\rho\cdot\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= [-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\pi}\cdot\int_\epsilon^{1-\epsilon}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\; d\rho\cdot 2\pi = 4\pi\cdot\int_\epsilon^{1-\epsilon}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\; d\rho \\
&= 4\pi\cdot\frac{1}{-2}\cdot\left[\sqrt{1-\rho^2}\right]_{\rho=\epsilon}^{1-\epsilon} = -2\pi\left(\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}-\sqrt{1-\epsilon^2}\right) \\
&= 2\pi\left(\sqrt{1-\epsilon^2}-\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}\right).
\end{aligned}$$

Άρα, $I_\epsilon = 2\pi\left(\sqrt{1-\epsilon^2}-\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}\right)$, και μπορούμε τώρα εύκολα να υπολογίσουμε το ζητούμενο όριο:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\pi\left(\sqrt{1-\epsilon^2}-\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}\right) = 2\pi.$$

■

Άσκηση 10.8.10. *Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το παρακάτω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός*

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int\int\int_{\epsilon^2\le{}^2+y^2+z^2\le 1}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}.$$

Λύση. Για κάθε $0<\epsilon<1$ θέτουμε

$$K_\epsilon = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, \epsilon^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$$

και

$$I_\epsilon = \int\int\int_{K_\epsilon}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα I_ϵ με σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Η ορίζουσα Jacobi του σφαιρικού μετασχηματισμού είναι $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\sin\varphi$, και η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι:

$$|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}| = \rho^2\sin\varphi.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (Θεώρημα 10.4.1), το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I_\epsilon = \int\int\int_{K_\epsilon^*} \frac{1}{(\rho^2)^\lambda}\cdot\rho^2\sin\varphi\; d\rho d\theta d\varphi = \int\int\int_{K_\epsilon^*} \frac{1}{\rho^{2\lambda-2}}\cdot\sin\varphi\; d\rho d\theta d\varphi.$$

Το K_ϵ είναι το στερεό που περικλείεται από δύο ομόκεντρες σφαίρες με κέντρο την αρχή των αξόνων O. Η μικρή σφαίρα έχει ακτίνα ϵ ενώ η μεγάλη σφαίρα έχει ακτίνα 1. Όπως κάναμε και στην προηγούμενη άσκηση, είναι εύκολο να δούμε ότι το στερεό K_ϵ^* είναι:

$$K_\epsilon^* = \{(\rho,\theta,\varphi) \,:\, \epsilon\le\rho\le 1,\, 0\le\theta\le 2\pi,\, 0\le\varphi\le\pi\}.$$

Το στερεό K_ϵ^* είναι ένα ορθογώνιο στον $\rho\theta\varphi$-χώρο. Άρα, από το Θεώρημα Fubini, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I_\epsilon &= \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1\int_0^\pi \frac{1}{\rho^{2\lambda-2}}\sin\varphi\; d\varphi d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^{2\lambda-2}}\left(\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\right) d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^{2\lambda-2}}\cdot\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi}\; d\rho d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^{2\lambda-2}}\; d\rho d\theta \\
&= 2\int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^{2\lambda-2}}\; d\rho\cdot\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi\int_\epsilon^1 \rho^{-2\lambda+2}\; d\rho \\
&= \begin{cases} \frac{4\pi}{3-2\lambda}\left[\rho^{-2\lambda+3}\right]_{\rho=\epsilon}^1, & \text{αν } \lambda\neq\frac{3}{2} \\ 4\pi\left[\ln\rho\right]_{\rho=\epsilon}^1, & \text{αν } \lambda=\frac{3}{2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{4\pi}{3-2\lambda}\left(1-\epsilon^{3-2\lambda}\right), & \text{αν } \lambda\neq\frac{3}{2} \\ 4\pi\left(-\ln\epsilon\right), & \text{αν } \lambda=\frac{3}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα εύκολα να υπολογίσουμε το όριο $I = \lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

- Αν $\lambda = \frac{3}{2}$, τότε
$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0^+} 4\pi(-\ln \epsilon) = +\infty.$$

- Αν $\lambda > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 - 2\lambda < 0$, τότε $\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{3-2\lambda} = +\infty$. Επομένως,
$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{4\pi}{3 - 2\lambda}\left(1 - \epsilon^{3-2\lambda}\right) = +\infty.$$

- Αν $\lambda < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 - 2\lambda > 0$, τότε $\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{3-2\lambda} = 0$. Επομένως,
$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{4\pi}{3 - 2\lambda}\left(1 - \epsilon^{3-2\lambda}\right) = \frac{4\pi}{3 - 2\lambda}.$$

Συμπεραίνουμε ότι το όριο I είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν $\lambda < \frac{3}{2}$. Για αυτές τις τιμές του λ, το όριο είναι ίσο με $I = \frac{4\pi}{3-2\lambda}$.

■

Άσκηση 10.8.11. *Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα*
$$I = \int\int\int_K z^2 \sin(xz)\, e^{z^2}\, dxdydz,$$
όπου K είναι το στερεό
$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \le x \le 1,\, x \le y \le 2 - x^2,\, -3 \le z \le 3\right\}.$$

Λύση. Το στερεό K είναι ένα xy-απλό σύνολο[4]. Επομένως, από το Θεώρημα Fubini, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα
$$I = \int\int\int_K z^2 \sin(xz)\, e^{z^2}\, dxdydz = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} \int_{-3}^{3} z^2 \sin(xz)\, e^{z^2}\, dzdydx.$$

Έστω $f(x, y, z) = z^2 \sin(xz) e^{z^2}$, $(x, y, z) \in K$, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι αν σταθεροποιήσουμε $x \in [0, 1]$ και $y \in [x, 2 - x^2]$, τότε
$$f(x, y, -z) = (-z)^2 \sin(-xz) e^{(-z)^2} = -f(x, y, z).$$

[4] Ενδεχομένως, κάποιοι να προβληματιστούν με τα όρια του z. Σκεφτείτε ως εξής. Σύμφωνα με τον Ορισμό 10.3.1, για να είναι το K xy-απλό σύνολο, θέλουμε το x να είναι ανάμεσα σε δύο σταθερές. Αυτό το έχουμε, καθώς $0 \le x \le 1$. Θέλουμε επίσης το y να είναι ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις του x. Και αυτό το έχουμε, αφού $x \le y \le 2 - x^2$. Τέλος, θέλουμε το z να βρίσκεται ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις $h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)$. Και αυτό το έχουμε, μόνο που σε αυτήν την περίπτωση τυχαίνει οι συναρτήσεις να είναι σταθερές: $h_1(x, y) = -3$ και $h_2(x, y) = 3$.

Με άλλα λόγια, για οποιαδήποτε x, y (σταθεροποιημένα), η συνάρτηση (ως προς z) $f(x, y, z)$ είναι περιττή. Επομένως, για κάθε x, y το ''μέσα'' ολοκλήρωμα είναι πάντα μηδέν, ως ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης από το -3 ως το 3:

$$\int_{-3}^{3} z^2 \sin(xz)\, e^{z^2}\, dz = 0.$$

Συνεπώς, και το ολοκλήρωμα I είναι μηδέν:

$$I = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} 0\, dydx = 0.$$

■

Άσκηση 10.8.12. *Δίνονται τα παρακάτω ολοκληρώματα*

$$I_1 = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \left(x + z^2\right)\, dzdxdy$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} \int_{-3}^{3} z^2 \sin(xz)\, dzdydx.$$

Αν γνωρίζετε ότι το ένα μόνο από τα ολοκληρώματα είναι ίσο με 0, τότε να βρείτε ποιο από τα δύο είναι.

Λύση. Στο ολοκλήρωμα I_2 παρατηρούμε ότι για την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση $f(x, y, z) = z^2 \sin(xz)$ ισχύει

$$f(x, y, -z) = (-z)^2 \sin(-xz) = -z^2 \sin(xz) = -f(x, y, z).$$

Συνεπώς, για κάθε x, y η συνάρτηση $f(x, y, z) = z^2 \sin(xz)$ είναι περιττή ως προς z. Άρα, το ''μέσα'' ολοκλήρωμα είναι μηδέν, ως ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης με άκρα ολοκλήρωσης το -3 και το 3. Δηλαδή, για κάθε x και y έχουμε

$$\int_{-3}^{3} z^2 \sin(xz)\, dz = 0.$$

Επομένως, και για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε

$$I_2 = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} 0\, dydx = 0.$$

Τελικά, το ολοκλήρωμα που είναι μηδέν είναι το I_2.

■

Παρατήρηση. Στην τελευταία άσκηση, μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε και το ολοκλήρωμα I_1. Ας δούμε πώς. Καταρχάς παρατηρούμε ότι το I_1 ισούται με ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στην μπάλα με κέντρο O και ακτίνα 2. Δηλαδή, αν

$$B = \left\{(x,y,z)\,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\},$$

τότε

$$I_1 = \int\int\int_B \left(x+z^2\right)\, dxdydz.$$

Κάνοντας αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες, το ολοκλήρωμα γίνεται (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες):

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\pi} \left(\rho\cos\theta\sin\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\right)\cdot \rho^2\sin\varphi\; d\varphi d\rho d\theta.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\pi} \left(\rho^3\cos\theta\sin^2\varphi + \rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi\right)\; d\varphi d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\int_0^{\pi}\rho^3\cos\theta\sin^2\varphi\; d\varphi + \int_0^{\pi}\rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi\; d\varphi\right) d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\rho^3\cos\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\; d\varphi + \rho^4\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\; d\varphi\right) d\rho d\theta.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\; d\varphi = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\; d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

και

$$\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\; d\varphi \overset{\cos\varphi=u}{=} \int_1^{-1} u^2(-du) = \int_{-1}^{1} u^2\, du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_{u=-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Αντικαθιστούμε και το I_1 γίνεται

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\frac{\pi}{2}\rho^3\cos\theta + \frac{2}{3}\rho^4\right) d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\int_0^2\rho^3\, d\rho + \frac{2}{3}\int_0^2\rho^4\, d\rho\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^4}{4}\cdot\cos\theta + \frac{2}{3}\cdot\frac{2^5}{5}\right) d\theta = \left[2\pi\sin\theta + \frac{2^6}{15}\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2^7}{15}\pi.
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 11

Παραρτήματα

11.1 Παράρτημα Α΄: Η καρδιοειδής καμπύλη

Μια εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$, όπου $a > 0$, παριστάνει στο xy-επίπεδο μια καμπύλη που λέγεται **καρδιοειδής καμπύλη** λόγω του χαρακτηριστικού σχήματος που έχει. Για να αποκτήσουμε μια εξοικείωση με την καμπύλη αυτή, ας ξεχάσουμε προς το παρόν τον όρο x μέσα στην παρένθεση. Τότε η εξίσωση της καμπύλης γίνεται $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$ και παριστάνει κύκλο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα $a > 0$. Πράγματι,

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2.$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι ο όρος x στο δεύτερο μέλος είναι αυτός που προκαλεί την παραμόρφωση του κύκλου κατά μήκος του άξονα $x'x$ και μας δίνει την καρδιοειδή καμπύλη. Η καμπύλη αυτή έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Επιπλέον, τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(2a, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $(0, a)$ και $(0, -a)$.

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση $x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$, δηλαδή στο δεύτερο μέλος έχουμε τον όρο $-x$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει πάλι μια καρδιοειδής καμπύλη, μόνο που τώρα η παραμόρφωση είναι προς την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα Ox'. Ουσιαστικά, η ''νέα'' καμπύλη είναι η συμμετρική της $x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$ ως προς τον άξονα $y'y$. Ο άξονας $x'x$ είναι πάλι άξονας συμμετρίας της καμπύλης. Η καμπύλη τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(-2a, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $(a, 0)$ και $(-a, 0$.

Αντίστοιχα αν πάρουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} + y)$, τότε και αυτή παριστάνει μια καρδιοειδής καμπύλη. Τώρα η παραμόρφωση κατά μήκος του άξονα $y'y$. Η καμπύλη αυτή έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Τέμνει τον $y'y$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(2a, 0)$ και τον $x'x$ στα σημεία $(a, 0)$ και $(-a, 0)$.

Τέλος, η εξίσωση $x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} - y)$ παριστάνει πάλι μια καρδιοειδής καμπύλη (είναι η συμμετρική της προηγούμενης ως προς τον άξονα $x'x$). Η καμπύλη έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Επιπλέον, τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $(0,0)$ και $(0,-2a)$ και τον $x'x$ στα σημεία $(a,0)$ και $(-a,0)$.

Η καρδιοειδής καμπύλη $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$.
Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην καμπύλη $x^2+y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}+x$, δηλαδή παίρνουμε $a = 1$. Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται με κατάλληλες τροποποιήσεις. Η εξίσωση της καμπύλης γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{1}{4}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $x+\frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}$. Ειδικότερα, αντικαθιστώντας $x = -\frac{1}{4}$ στην τελευταία εξίσωση, βρίσκουμε $y = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$. Επομένως, τα σημεία $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ και $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ βρίσκονται πάνω στην καμπύλη και είναι εκείνα τα σημεία της καμπύλης με τη μικρότερη τετμημένη.

Το κομμάτι της καμπύλης από το σημείο $A\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ μέχρι το σημείο $O(0,0)$ μπορούμε να το δούμε ως γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$, αφού κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει αυτό το γράφημα μόνο μία φορά. Η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$, είναι συνεχής με $f(0) = 0$. Θα δείξουμε ότι η εφαπτομένη στο γράφημα της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας $x'x$.
Από την εξίσωση της καμπύλης, για κάθε $x \neq 0$, παίρνουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x \Leftrightarrow x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) &= \sqrt{x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} + x \\ \overset{x \lneq 0}{\Leftrightarrow} x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) &= -x\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + x \\ \Leftrightarrow x^2\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) &= x\left(1 - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) \\ \Leftrightarrow x\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) &= 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}. \end{aligned}$$

Αν γνωρίζουμε ότι το πηλίκο $\left(\frac{y}{x}\right)^2$ είναι φραγμένη ποσότητα, τότε παίρνοντας το όριο καθώς $x \to 0$ στην τελευταία εξίσωση, το πρώτο μέλος μας δίνει 0 (μηδενική επί φραγμένη). Συνεπώς,

$$\lim_{x \to 0}\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right] = 0.$$

Από την παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας τις πράξεις για όρια, παίρνουμε τελικά ότι $\lim_{x\to 0}\frac{y}{x} = 0$. Δηλαδή με άλλα λόγια

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0.$$

Επομένως, υπάρχει η (πλευρική) παράγωγος της f στο σημείο 0 και είναι ίση με το 0. Άρα, η ευθεία $y = 0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$.

Μένει να δικαιολογήσουμε ότι το πηλίκο $\frac{f(x)}{x}$, $x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right)$, μένει φραγμένο. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι $\frac{f(x)}{x} < 0$, αφού $x < 0$ και $f(x) > 0$. Στη συνέχεια, από τη μορφή της καρδιοειδούς καμπύλης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη συνάρτηση [θυμηθείτε ότι η συνάρτηση f είναι το κομμάτι της καμπύλης από το σημείο $A\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ μέχρι το σημείο $O(0,0)$]. Επομένως, η συνάρτηση βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = -\sqrt{7}x$ που ενώνει το σημείο $A\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ με την αρχή των αξόνων. Συνεπώς,

$$f(x) \le -\sqrt{7}x \overset{x<0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x} \ge -\sqrt{7}.$$

Τελικά,

$$-\sqrt{7} \le \frac{f(x)}{x} \le 0$$

δηλαδή το πηλίκο $\frac{f(x)}{x}$ είναι φραγμένο.

11.2 Παράρτημα Β′: Ο λημνίσκος

Μια εξίσωση της μορφής $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$, όπου $a > 0$, παριστάνει στο xy-επίπεδο μια καμπύλη που λέγεται **λημνίσκος** λόγω του χαρακτηριστικού σχήματος που έχει. Η καμπύλη αυτή έχει άξονες συμμετρίας τον $x'x$ και τον $y'y$ και κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0,0)$. Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $O(0,0)$ και τον άξονα $x'x$ στα σημεία $O(0,0)$, $A(a\sqrt{2}a, 0)$ και $B(-a\sqrt{2}, 0)$.

Ομοίως, η καμπύλη $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(y^2-x^2\right)$, όπου $a > 0$, παριστάνει έναν λημνίσκο στο xy-επίπεδο. Ο λημνίσκος αυτός προκύπτει από τον προηγούμενο με στροφή 90 μοιρών. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες σχετικά με τις συμμετρίες της καμπύλης και τα σημεία τομής με τους άξονες.

Θεωρούμε τώρα τον λημνίσκο $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$ και παίρνουμε το κομμάτι της καμπύλης το οποίο βρίσκεται στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο. Το κομμάτι αυτό του λημνίσκου μπορούμε να το δούμε ως γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$, αφού κάθε

κατακόρυφη ευθεία τέμνει το γράφημα ακριβώς μια φορά. Η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in \left[-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}\right]$, είναι συνεχής με $f(0) = 0$. Θα δείξουμε ότι η εφαπτομένη στο γράφημα της f στο σημείο $(0,0)$ είναι η διχοτόμος $y = x$.
Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι από την εξίσωση του λημνίσκου παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right) &\Leftrightarrow x^4\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2 = 2a^2x^2\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\\ &\Leftrightarrow x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2 = 2a^2\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right). \qquad (11.1)\end{aligned}$$

Επιπλέον, από την εξίσωση του λημνίσκου, έχουμε ότι

$$x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq y^2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow |\frac{y}{x}| \leq 1,$$

δηλαδή για τα σημεία του λημνίσκου το πηλίκο $\frac{y}{x}$ μένει φραγμένο. Από την εξίσωση (11.1), παίρνοντας το όριο για $x \to 0$, έχουμε ότι το πρώτο μέλος κάνει 0 (μηδενική επί φραγμένη). Επομένως, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1.$$

Επειδή έχουμε θεωρήσει το τμήμα της καμπύλης στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο, παρατηρούμε ότι το πηλίκο $\frac{y}{x}$ είναι πάντα θετικό. Έτσι η τελευταία σχέση δίνει

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x} = 1$$

το οποίο μπορούμε να το γράψουμε και ως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1.$$

Επειδή $f(0) = 0$, έχουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$. Άρα, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι η ευθεία

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x.$$

Κεφάλαιο 12

Θέματα Εξετάσεων

12.1 Ιούνιος 2012

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση $f_\alpha(x,y)=(\alpha x-y)^k$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, όπου $\alpha>0$, $k\in\mathbb{N}$ με $k\geq 2$.

(i) Να δειχθεί ότι η f_α είναι διαφορίσιμη και να υπολογιστεί το $df_\alpha(x_0,y_0)$.

(ii) Να βρεθεί $\beta>0$, τέτοιο ώστε το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της συνάρτησης f_β στο σημείο $(x_0,y_0,f\beta(x_0,y_0))$ να είναι παράλληλο με το επίπεδο $z=x-2y$.

(iii) Να υπολογιστεί το $I=\int\int_\Pi f_\alpha$, όπου Π το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,\alpha)$, $(1,\alpha)$. (Υπόδειξη: $u=\alpha x-y$, $v=y$.)

Θέμα 2. A. Η διαφορίσιμη συνάρτηση $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(t\overrightarrow{x})=t^\alpha f(\overrightarrow{x})$ για κάθε $t>0$ και $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^d$ και για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{x}\cdot\nabla f(\overrightarrow{x})=\alpha f(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^d$.
B. Έστω $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση, $D=\big\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\leq 1\big\}$ ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος και $\partial D=\big\{(x,y)\,:\,x^2+y^2=1\big\}$.

(i) Να δειχθεί ότι

$$\int_{(\partial D)^+} f\left(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot d\overrightarrow{r}=\int\int_D\left[f\nabla^2 f+\|\nabla f\|^2\right].$$

(ii) Αν $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ στο D και $f(x,y)=0$ για κάθε $(x,y)\in\partial D$, να βρεθεί το $f(x,y)$ για $(x,y)\in D$.

Θέμα 3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

(*i*) Αν $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Sigma_c = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$ σε ποια επιφάνεια στάθμης της f βρίσκεται το $\nabla f(\alpha, \beta, \gamma)$; Σχεδιάστε αυτά για $c = -1$.

(*ii*) Έστω $B_\epsilon = \left\{(x, y, z) : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$ $(\epsilon \in (0, 1))$. Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα $I_\epsilon = -\int_{B_\epsilon} f$ καθώς και το $I_0 = \lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon$.

Θέμα 4. (*i*) Έστω $\overrightarrow{F} = (P, Q) \colon A \to \mathbb{R}^2$ C^1 συνάρτηση, A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και οι ισχυρισμοί:

(*α*) Υπάρχει $f \colon A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\nabla f = \overrightarrow{F}$ στο A.

(*β*) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ στο A.

(*γ*) $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$, όπου $\Gamma : \overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t)) \in A$, $t \in [\alpha, \beta]$, C^1 καμπύλη με $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{r}(b)$.

Να δειχθεί ότι $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ και $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$ (πλήρως).

(*ii*) Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των $\overrightarrow{F}_1(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$ και $\overrightarrow{F}_2(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ στην $\Gamma : \overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(*iii*) Να ελεγχθεί αν ισχύει το (β) (του (i)) και το $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ για τις $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2$ (του (ii)).

Θέμα 5. Έστω η καμπύλη $\Gamma \colon \overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, με $x^3 + y^3 = 3xy$.

(*i*) Να βρεθούν τα $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ ώστε η Γ να είναι τοπικά το γράφημα μιας C^∞ συνάρτησης f, $y = f(x)$, $\beta = f(\alpha)$ και η εφαπτομένη ευθεία της Γ στο $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(*ii*) Η $\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$, $t \in [0, +\infty)$ είναι παραμέτρηση της $\Gamma^* = \Gamma \cap \{(x, y) : x, y \geq 0\}$. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείει η Γ^*.

Θέμα 6. Για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$ να βρεθούν:

(*i*) Το πολυώνυμο Taylor δευτέρου βαθμού στο $(0, 0)$ και το είδος των κρίσιμων σημείων στο $(-1, 1) \times (-1, 1)$.

(*ii*) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Να γραφούν τα Θέματα 1, 2, 3, 4 και ένα από τα 5, 6.

Καλή επιτυχία.

Βιβλιογραφία

[1] Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., *Απειροστικός Λογισμός*, Τόμοι I και II, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1997.

[2] Τσίτας Λ. Ν., , Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα

[3] Χατζηαφράτης Τ. Ε., *Απειροστικός Λογισμός σε πολλές μεταβλητές*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2009.

[4] Marsden J., Tromba A., *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2012.

[5] Gerald B. Folland,*Real analysis. Modern techniques and their applications.* Second Edition. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.