

Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων με διαδοχική ολοκλήρωση

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Fubini για τον υπολογισμό τριπλών ολοκληρωμάτων. Ξεκινούμε με την διατύπωση του θεωρήματος Fubini για τριπλά ολοκληρώματα.

19-1 Θεώρημα Έστω $\mathfrak{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ κλειστό ορθογώνιο στον R^3 και $f : \mathfrak{R} \rightarrow R$ φραγμένη συνάρτηση, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Αν η f είναι συνεχής τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R και αν $I = \int_{\mathfrak{R}} f dx$, τότε

τα έξι διαδοχικά ολοκληρώματα που παίρνουμε μεταθέτοντας τα dx, dy, dz π.χ. $\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$, $\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy$ κτλ είναι όλα ίσα με τον αριθμό I .

2) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο \mathfrak{R} , αν το ολοκλήρωμα $\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$ υπάρχει για κάθε $(x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ τότε (η συνάρτηση $(x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$ ολοκληρώνεται στο $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ και)

ισχύει
$$\int_{\mathfrak{R}} f dx = \int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx dy .$$

Ανάλογα, αν το ολοκλήρωμα $\int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y, z) dx dy$ υπάρχει για κάθε $z \in [a_3, b_3]$

έπεται ότι,
$$\int_{\mathfrak{R}} f dx = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y, z) dx dy \right) dz .$$

Στην συνέχεια θα δούμε πως τριπλά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογισθούν πάνω από στερεά χωρία που δεν είναι ορθογώνια. Θα υποθέσουμε ότι το στερεό χωρίο ολοκλήρωσης είναι ένα Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του R^3 ειδικού τύπου (που είναι ανάλογος με τα επίπεδα χωρία ολοκλήρωσης που εξετάσαμε σε προηγούμενες παραγράφους).

Με περισσότερη ακρίβεια, θα υποθέσουμε ότι το χωρίο ολοκλήρωσης D φράσσεται από πάνω από μια επιφάνεια $z = u(x, y)$ και από κάτω από μια επιφάνεια $z = v(x, y)$ και ακόμα ότι προβάλλεται στο xy επίπεδο σε ένα χωρίο A είτε του τύπου 1 είτε του τύπου 2. Έτσι το D περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in A \text{ και } v(x, y) \leq z \leq u(x, y)\} .$$

Αν π.χ. το A είναι του τύπου 1 και $A = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b \text{ και } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow R$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε, $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \text{ και } v(x, y) \leq z \leq u(x, y)\} .$

19.2 Θεώρημα Έστω D στερεό χωρίο, $D \subseteq R^3$, το οποίο φράσσεται από πάνω από μια επιφάνεια $z = u(x, y)$, από κάτω από μια επιφάνεια $z = v(x, y)$ και προβάλλεται στο xy επίπεδο σε ένα χωρίο A . Αν το A είναι είτε του τύπου **1** είτε του τύπου **2**, και η $f : D \rightarrow R$ συνεχής (ή φραγμένη με αριθμήσιμο το πολύ πλήθος ασυνεχειών) συνάρτηση τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του D και

$$\int_D f dx = \int_A \left(\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y), \quad (x = (x, y, z) \text{ στο πρώτο ολοκλήρωμα})$$

Ειδικότερα: (i) Αν το A είναι του τύπου 1 και,

$$A = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b \text{ και } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \quad \text{τότε}$$

$$\int_D f dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx, \quad (x = (x, y, z) \text{ στο πρώτο ολοκλήρωμα})$$

(ii) Αν το A είναι του τύπου 2 και $A = \{(x, y) \in R^2 : c \leq y \leq d \text{ και } g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$

$$\text{τότε } \int_D f dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy, \quad (x = (x, y, z) \text{ στο πρώτο ολοκλήρωμα})$$

Παρατηρήσεις: 1) Το προηγούμενο θεώρημα αποδεικνύεται (όπως και το ανάλογό του για διπλά ολοκληρώματα) με την βοήθεια του θεωρήματος Fubini (αφού επεκτείνουμε την f σε ένα κλειστό ορθογώνιο \mathfrak{R} που περιέχει το D) και τον χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων. Απλώς παρατηρούμε ότι οι ασυνέχειες της f είναι μέτρου μηδέν αφού βρίσκονται στο σύνορο του D , το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων (δύο μεταβλητών) και άρα μέτρου μηδέν, δηλαδή D Jordan μετρήσιμο.

2) Τα υποσύνολα D του R^3 που εμφανίζονται στην διατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζονται στερεά (ή τρισδιάστατα) χωρία τύπου 1. Ανάλογα ορίζονται τα στερεά χωρία τύπου 2 με προβολή του D στο yz επίπεδο και τα στερεά χωρία τύπου 3 με προβολή του D στο xz επίπεδο. Ένα χωρίο που είναι του τύπου 1, 2 και 3 ονομάζεται χωρίο τύπου 4. Ένα παράδειγμα τέτοιου χωρίου είναι η μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3) Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η σταθερά ίση με 1, δηλαδή $f(x, y, z) = 1$

$$\text{τότε} \quad \int_D dx = V(D) = \text{ο όγκος του } D \quad (1)$$

$$\text{Πράγματι,} \quad \int_D f dx = \int_A \left(\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} dz \right) d(x, y) = \int_A (u(x, y) - v(x, y)) d(x, y) =$$

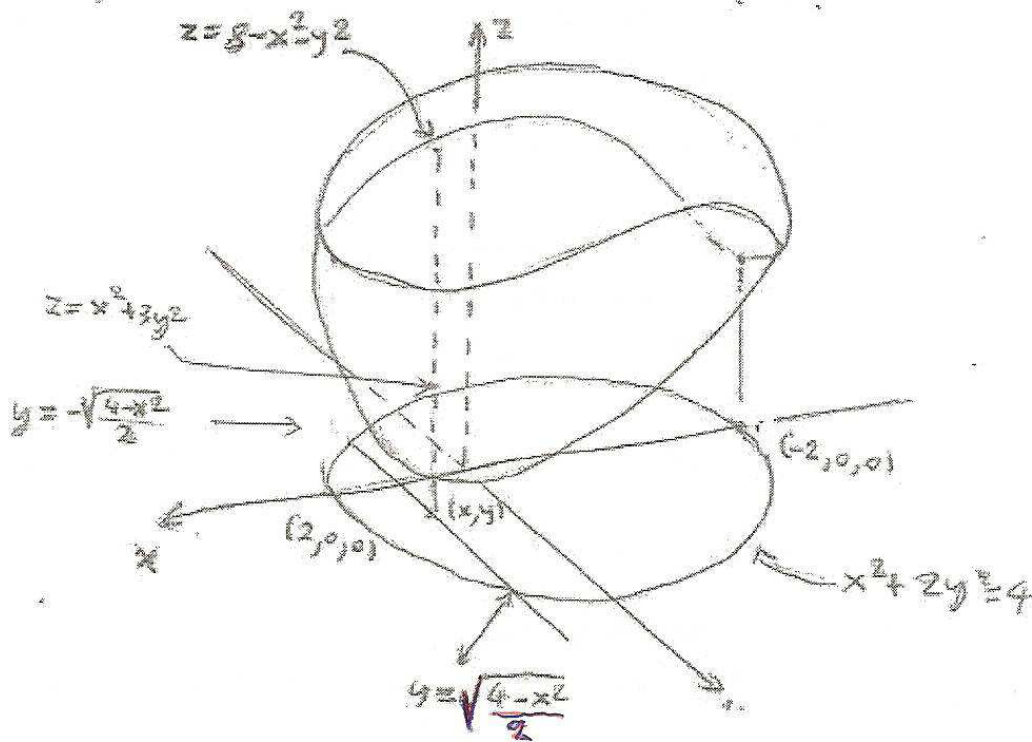
$$\int_A u(x, y) d(x, y) - \int_A v(x, y) d(x, y) = \text{ο όγκος του } D, \quad (\text{αφού } u(x, y) \geq v(x, y) \text{ για}$$

κάθε $(x, y) \in D$ και το διπλό ολοκλήρωμα παριστάνει τον όγκο κάτω από το γράφημα της ολοκληρωτέας συνάρτησης). Εξάλλου ο τύπος (1) έχει δοθεί και ως ορισμός του όγκου Jordan μετρήσιμου συνόλου $D \subseteq R^3$.

Παραδείγματα υπολογισμού τριπλών ολοκληρωμάτων.

1) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού D που περικλείεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + 3y^2$ και $z = 8 - x^2 - y^2$.

Λύση Ο όγκος $V(D)$ δίδεται από το ολοκλήρωμα $V(D) = \iiint_D dz dy dx$, ($V(D) = \int_D dx$) δηλαδή το τριπλό ολοκλήρωμα της $F(x, y, z) = 1$ επί του D . Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης σχεδιάζουμε το D .



Οι επιφάνειες $S_1 = \{(x, y, z) : z = x^2 + 3y^2\}$ και $S_2 = \{(x, y, z) : z = 8 - x^2 - y^2\}$ τέμνονται στην καμπύλη $S = S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 = 4 \text{ και } z = x^2 + 3y^2\}$

($x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$). Η προβολή του S στο xy επίπεδο είναι η έλλειψη: $x^2 + 2y^2 = 4$. Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό αυτής της έλλειψης είναι $\mathfrak{R} = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 < 4\}$. Επίσης ότι,

$$(x, y) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 < 8 - x^2 - y^2.$$

Το χωρίο $\bar{\mathfrak{R}} = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 4\}$ είναι του τύπου 1, πράγματι,

$$\bar{\mathfrak{R}} = \left\{ (x, y) : -2 \leq x \leq 2 \text{ και } -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \right\}.$$

Έπεται ότι,

$$D = \left\{ (x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \text{ και } x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2 \right\} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} V(D) &= \iiint_D dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} \left[\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \right] dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dy dx = \\ &= \int_{-2}^2 \left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{y=\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} dx = \int_{-2}^2 \left(2(8 - 2x^2) \sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) dx = \\ &= \int_{-2}^2 \left[8 \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 8\pi\sqrt{2} \quad (\text{κάνοντας την αλλαγή} \\ &\text{μεταβλητής } x = 2 \sin u \Rightarrow \frac{dx}{du} = 2 \cos u \Rightarrow dx = 2 \cos u du). \end{aligned}$$

Σημείωση Το προηγούμενο ολοκλήρωμα θα μπορούσε να υπολογιστεί και ως η διαφορά των διπλών ολοκληρωμάτων επί του $\overline{\mathfrak{R}}$,
 $V(A) = \int_{\overline{\mathfrak{R}}} F_1(x, y) dx dy - \int_{\overline{\mathfrak{R}}} F_2(x, y) dx dy$, όπου $F_1(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ και

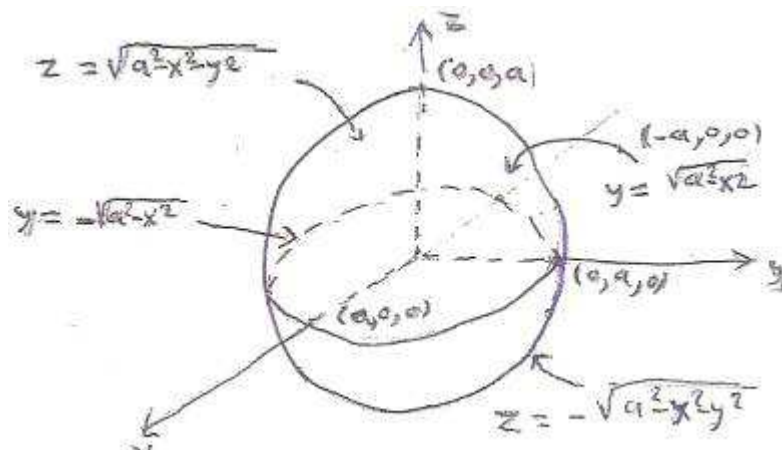
$F_2(x, y) = x^2 + 3y^2$, όπου $\overline{\mathfrak{R}} = \left\{ (x, y) : -2 \leq x \leq 2 \text{ και } -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \right\} =$ το εσωτερικό της έλλειψης μαζί με το σύνορο

2) Να βρεθούν τα όρια της ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος: $\iiint_D f(x, y, z) dz dy dx$, όπου $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και:

(α) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$, ($a > 0$).

(β) $D =$ το τετράεδρο με κορυφές $(0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$.

Λύση (α) Η κλειστή σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας $a > 0$ περιγράφεται ως το σύνολο D των $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ώστε: $-a \leq x \leq a$, $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ και $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$



Η σφαίρα είναι χωρίο τύπου (4) μπορεί να περιγραφεί (λόγω συμμετρίας) με προβολές σε όλα τα επίπεδα. Έτσι π.χ. έχουμε: $-a \leq y \leq a, \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}$ και $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Έπεται από την πρώτη περιγραφή ότι,

$$\iiint_D f(x, y, z) dz dy dx = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx \quad \text{και από την δεύτερη}$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dz dx dy = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dx dy.$$

Αν $f(x, y, z) = 1$ η σταθερά συνάρτηση ίση με 1, βρίσκουμε τον όγκο της σφαίρας D , έτσι από την πρώτη περιγραφή έχουμε $V = \iiint_D f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_D dz dy dx =$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz dy dx. \quad \text{Κρατώντας τα } x \text{ και } y \text{ σταθερά και ολοκληρώνοντας ως}$$

προς z παίρνουμε ,

$$V = 2 \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy \right) dx.$$

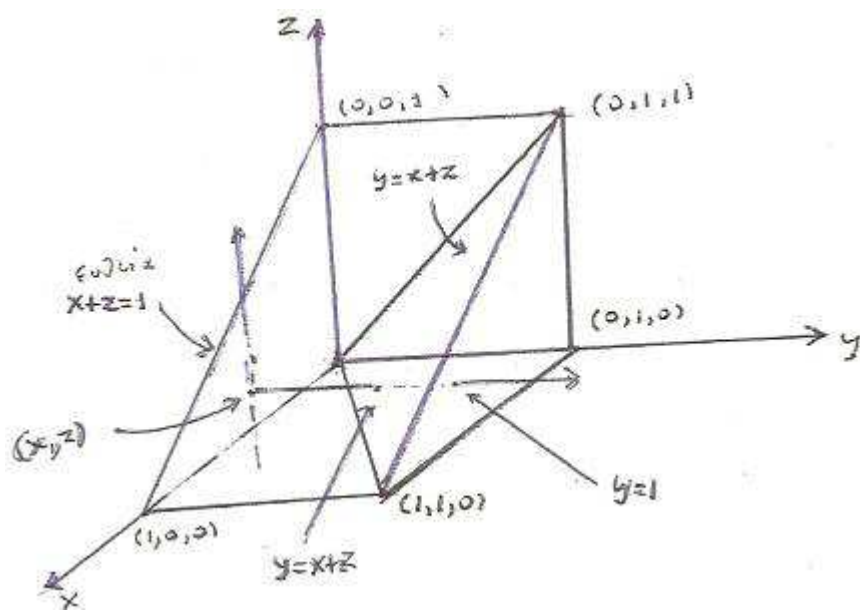
Επειδή το x είναι σταθερό στο ολοκλήρωμα ως προς dy , αυτό το ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\int_{-\beta}^{\beta} \sqrt{\beta^2 - y^2} dy$ με $\beta = \sqrt{a^2 - x^2}$. Αυτό το ολοκλήρωμα παραστάει το

$$\text{εμβαδόν ενός ημικυκλίου ακτίνας } \beta, \text{ οπότε } \int_{-\beta}^{\beta} \sqrt{\beta^2 - y^2} dy = \frac{\beta^2 \pi}{2} = \frac{a^2 - x^2}{2} \cdot \pi$$

$$\text{Έπεται ότι, } V = 2 \int_{-a}^a \pi \cdot \frac{a^2 - x^2}{2} dx = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Δηλαδή βρίσκουμε τον γνωστό μας από την Γεωμετρία τύπο για τον όγκο της σφαίρας.

(β)



Η προβολή του δοθέντος τετραέδρου στο xy επίπεδο είναι το (κλειστό) ορθογώνιο (στο $(0,1,0)$) τρίγωνο με κορυφές τα $(0,0,0), (0,1,0), (1,1,0)$, το οποίο είναι ένα χωρίο τύπου 1 στο xy επίπεδο και περιγράφεται ως τα $(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1$ και $x \leq y \leq 1$, δηλαδή $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } x \leq y \leq 1\}$.

Η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα $(0,0,0), (1,1,0)$ και $(0,1,1)$ είναι η $y = x + z$ και επειδή το τρίγωνο με κορυφές $(0,0,0), (1,1,0)$ και $(0,1,1)$ προβάλλεται στο \mathfrak{R} , έχουμε ότι $0 \leq z \leq y - x$. Έτσι το τετράεδρο έχει την ακόλουθη περιγραφή: $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1$ και $0 \leq z \leq y - x$.

Έπεται ότι:
$$\iiint_D f(x, y, z) dz dy dx = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Ιδιαίτερα αν $f(x, y, z) = 1$ (η σταθερά συνάρτηση ίση με 1) θα υπολογίσουμε τον όγκο $V(D)$ του D :

$$\begin{aligned} V(D) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_0^{y-x} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 (y-x) dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - xy \right]_{y=x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Αν προβάλλουμε το τετράεδρο στο xz επίπεδο τότε η προβολή του είναι το ορθογώνιο στο $(0,0,0)$ τρίγωνο με κορυφές τα $(0,0,0), (0,0,1), (1,0,0)$ το οποίο περιγράφεται ως τα $(x, z) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq z \leq 1 - x$, δηλαδή $T = \{(x, z) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq z \leq 1 - x\}$.

Αν $(x, z) \in T$ τότε το $(x, y, z) \in D$ αν και μόνο αν (βλέπε σχήμα), $x + z \leq y \leq 1$. Έπεται ότι το τετράεδρο έχει και την ακόλουθη περιγραφή: $D = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x \text{ και } x + z \leq y \leq 1\}$

Έπεται ότι,
$$\iiint_D f(x, y, z) dy dz dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 f(x, y, z) dy dz dx.$$

Αν $f(x, y, z) = 1$, βρίσκουμε πάλι $V(D) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 dy dz dx = \frac{1}{6}$

Σημείωση Ο όγκος του τετραέδρου $V(D) = \iiint_D dx dy dz$ μπορεί να υπολογισθεί και ως διπλό ολοκλήρωμα. Αφού το D μπορεί να θεωρηθεί ως το στερεό που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z = y - x$ και από κάτω στο xy επίπεδο από το τρίγωνο $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } x \leq y \leq 1\}$.

Έτσι έχουμε $\iint_{\mathcal{R}} (y-x) dx dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 (y-x) dy \right) dx = \dots = \frac{1}{6}$. Ανάλογη παρατήρηση και για τον όγκο της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, (a > 0)$. Έτσι έχουμε, $V = 2 \int_A f(x, y) dx dy$, όπου $A = \left\{ (x, y) : -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$ και $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in A$.

Ασκήσεις

1) Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^4 \int_0^{4-x} xy dy dx, (\beta) \int_{-2}^1 \int_{y^2+4y}^{3y+2} dx dy, (\gamma) \int_0^3 \int_1^{4-x} (x+y) dy dx$$

2) Υπολογίστε τα διπλά ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_D y dx dy, \text{ όπου } D \text{ είναι το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες } y = \sqrt{x}, y = 2-x \text{ και } y = 0.$$

$$(\beta) \int_D 2x dx dy, \text{ όπου } D \text{ είναι το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες } x^2 y = 1, y = x, x = 2 \text{ και } y = 0.$$

3) Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα με δύο τρόπους:

$$(\alpha) \int_0^4 \int_0^{4-x} xy dy dx, (\beta) \int_0^1 \int_x^{2x} e^{y-x} dy dx, (\gamma) \int_1^e \int_0^{\log x} xy dy dx.$$

4) Βρείτε τον όγκο κάτω από την επιφάνεια $z = x + y + 2$ και πάνω από το χωρίο D του xy επιπέδου που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = 2$.

5) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(\alpha) \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{και}$$

$$(\beta) \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx$$

αλλάζοντας την τάξη της ολοκλήρωσης.

6) Βρείτε τον όγκο κάτω από την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ και πάνω από το τετράγωνο του xy επιπέδου που φράσσεται από τις καμπύλες $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 1$.

7) Υπολογίστε τα διαδοχικά ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_1^4 \int_{-2}^3 \int_5 dx dy dz, (\beta) \int_1^2 \int_0^1 \int_{-1}^2 8x^2 y z^3 dx dy dz, (\gamma) \int_{-1}^2 \int_0^{\pi} \int_1^4 yz \cos xy dz dx dy \text{ και}$$

$$(δ) \int_1^4 \int_{-1}^2 \int_0^{\sqrt{3-x}} \frac{x-y}{x^2+y^2} dy dx dz$$

8) Υπολογίστε τα τριπλά ολοκληρώματα:

(α) $\int_D (x^2y + y^2z) dx dy dz$, όπου D είναι το ορθογώνιο $1 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 1$ και $2 \leq z \leq 4$.

(β) $\int_D xyz dx dy dz$, όπου D είναι το τετράεδρο με κορυφές $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$.

(γ) $\int_D x dx dy dz$, όπου D είναι το στερεό που φράσσεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 1$.

(δ) $\int_D yz dx dy dz$, όπου D είναι το στερεό στο πρώτο ογδοημόριο που φράσσεται από τα ημισφαίρια $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$ και τα επίπεδα συντεταγμένων.

9) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Γράψτε έξι διαδοχικά ολοκληρώματα με τα κατάλληλα όρια ολοκλήρωσης τα οποία είναι ίσα με το ολοκλήρωμα, $\int_D f(x, y, z) dx dy dz$, όπου D το στερεό:

$$y^2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \text{ και } 0 \leq z \leq 4 - x.$$

(β) Αλλάξτε την τάξη ολοκλήρωσης στα ακόλουθα διαδοχικά ολοκληρώματα, όπως υποδεικνύεται:

(i) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx \rightarrow dz dx dy$

(ii) $\int_1^2 \int_0^{z-1} \int_0^x f(x, y, z) dy dx dz \rightarrow dy dz dx$

(iii) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y, z) dz dy dx \rightarrow dy dx dz$