

Καμπύλες στον R^n

9.1 Ορισμός Μια καμπύλη στον R^n είναι μια συνεχής συνάρτηση $\sigma: I \subseteq R \rightarrow R^n$ όπου I διάστημα (συνήθως κλειστό και φραγμένο) στον R .

Συνήθως φανταζόμαστε την μεταβλητή $t \in I$ ως τον χρόνο και την καμπύλη $\sigma(I)$ ως την τροχιά ενός υλικού σημείου με διάνυσμα θέσης το $\sigma(t)$ κατά την χρονική στιγμή t .

Αν $I = [a, b]$, το $\sigma(a)$ είναι το αρχικό σημείο και το $\sigma(b)$ τελικό σημείο της σ . Το $\sigma([a, b])$ ονομάζεται και ίχνος της καμπύλης και συμβολίζεται με $[\sigma]$.

Έστω $I = [a, b]$ και $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Η σ λέγεται διαφορίσιμη (αντιστοίχως C^1) αν οι συναρτήσεις $t \in [a, b] \rightarrow x_i(t) \in R$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ είναι διαφορίσιμες (αντιστοίχως C^1) όπου $n \geq 1$. Στην περίπτωση αυτή θέτομε $\sigma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)), t \in [a, b]$.

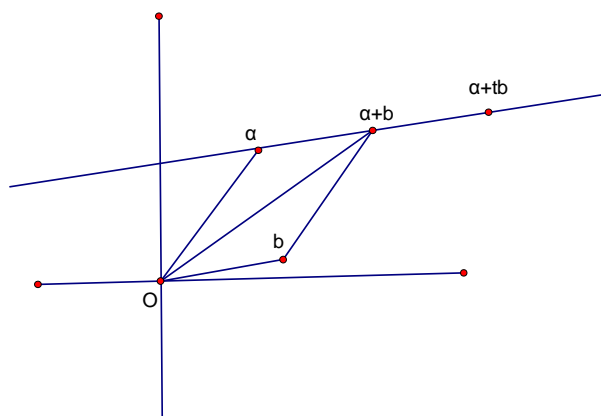
Σημείωση. Αν $\sigma: [a, b] \rightarrow R^n$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη και $a < t_0 < b$ τότε το

$$\text{διαφορικό της } \sigma \text{ στο } t_0 \text{ είναι: } D\sigma(t_0)(h) = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix} \cdot h, h \in R$$

Επίσης πρέπει να είναι σαφές ότι: $\sigma'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h}$. (Πρβλ. τις παρατηρήσεις 5 μετά τον Ορισμο 5.4 και 3 στην παραγραφο για τον κανονα της αλυσιδας.)

Η $\sigma: [a, b] \rightarrow R^n$, $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ λέγεται κατά τμήματα C^1 , αν υπάρχει μια διαμέριση $P = \{t_0 = a < \dots < t_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε ο περιορισμός $\sigma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ να είναι C^1 στο $[t_{k-1}, t_k]$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$

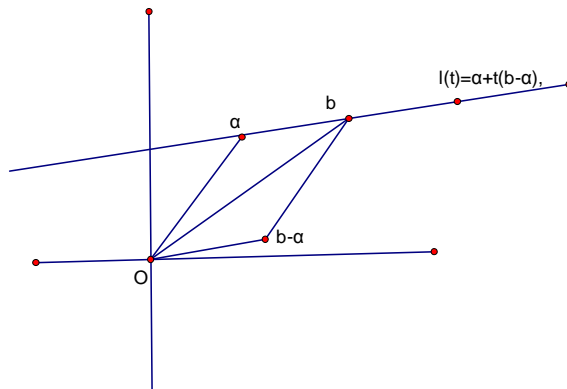
Παραδείγματα: 1) Έστω $a, b \in R^2$ με $b \neq 0$. Η ευθεία που διέρχεται από το a και έχει την διεύθυνση του b είναι η $l(t) = a + tb, t \in R$.



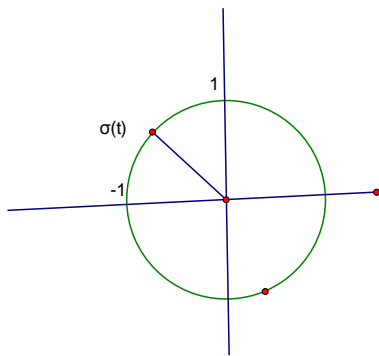
Η l διέρχεται από το a και είναι παράλληλη με το b .

Η l είναι C^1 αφού $l'(t) = b, t \in R$

2) Το ευθύγραμμο τμήμα από το a στο b , όπου $a, b \in \mathbb{R}^n$ είναι η καμπύλη $\sigma(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$, $t \in [0, 1]$ την καμπύλη αυτή την συμβολίζουμε και με $[a, b]$.

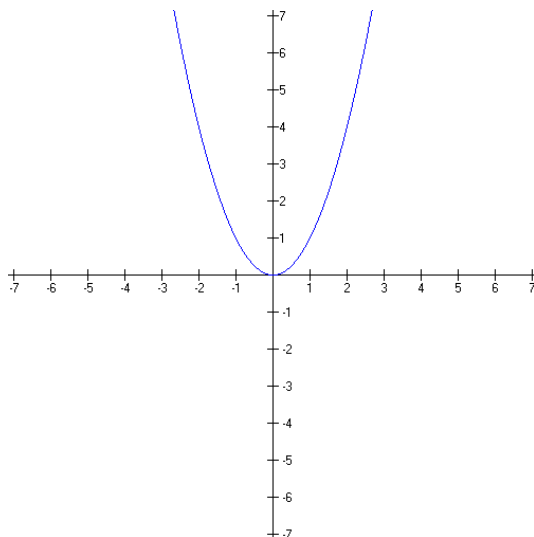


Είναι σαφές ότι το $[a, b]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας $\sigma(t) = a + t(b-a)$, $t \in \mathbb{R}$ (αν $a \neq b$). Επίσης $\sigma'(t) = b-a$, $t \in [0, 1]$, άρα η σ είναι C^1 καμπύλη.



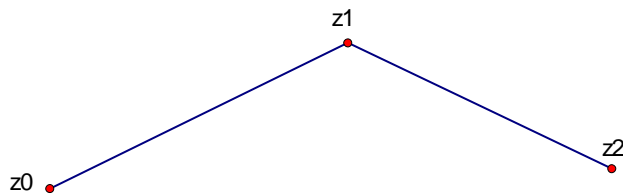
3) Αν $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και $r > 0$. Ο κύκλος κέντρου a και ακτίνας r είναι η καμπύλη $\sigma(t) = a + r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ ή $\sigma(t) = (a_1 + r \cos t, a_2 + r \sin t)$. Η καμπύλη σ είναι C^1 , αφού $\sigma'(t) = r(-\sin t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ Ειδικότερα ο μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο είναι ο $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a = (0, 0)$, $r = 1$

4) Η καμπύλη $\sigma(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ έχει ως ίχνο το γράφημα της παραβολής $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Η σ είναι C^1 αφού $\sigma'(t) = (1, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.



5) Έστω $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^k$. Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα z_0, z_1, \dots, z_n είναι η καμπύλη του $\mathbb{R}^k, \gamma: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^k, \gamma(t) = (\lambda + 1 - t)z_\lambda + (t - \lambda)z_{\lambda+1}, t \in [\lambda, \lambda + 1], \lambda = 0, 1, \dots, n - 1$. Η γ είναι προφανώς κατά τμήματα C^1 αφού αν $t \in [\lambda, \lambda + 1]$, τότε $\gamma'(t) = z_{\lambda+1} - z_\lambda$.

Σημείωση Ειδικότερα αν $k = 2$ και z_0, z_1, z_2 είναι τρία σημεία του \mathbb{R}^2 που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα z_0, z_1, z_2 είναι μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη η οποία δεν είναι C^1 . Πράγματι οι πλευρικές παράγωγοι στο z_1 υπάρχουν αλλά διαφέρουν, αφού $\gamma'(t) = z_1 - z_0$ για $t \in [0, 1]$ και $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ για $t \in [1, 2]$ και $z_1 - z_0 \neq z_2 - z_1$

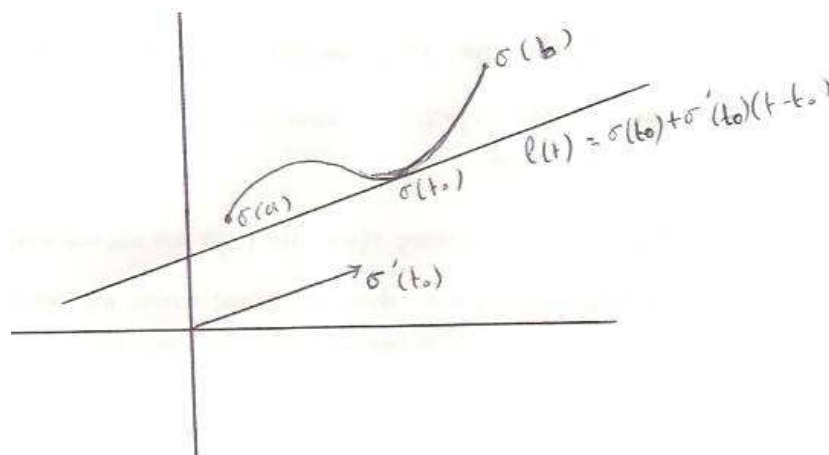


$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t)z_0 + tz_1, & t \in [0, 1] \\ (2-t)z_1 + (t-1)z_2, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

Η καμπύλη γ με κορυφές τα z_0, z_1, \dots, z_n και την παραμέτρηση που δίνουμε παραπάνω συμβολίζεται και με $P = [z_0, z_1] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n]$.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου καμπύλης. Έστω $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη καμπύλη και $t_0 \in (a, b)$ ώστε $\sigma'(t_0) \neq 0$.

Η ευθεία $\ell(t) = \sigma(t_0) + \sigma'(t_0)(t - t_0), t \in \mathbb{R}$, η οποία διέρχεται από το $\sigma(t_0)$ και έχει την διεύθυνση του διανύσματος $\sigma'(t_0)$ ονομάζεται η εφαπτομένη της καμπύλης σ στο $\sigma(t_0)$. Το δε διάνυσμα $\sigma'(t_0)$ ονομάζεται το εφαπτόμενο διάνυσμα της σ στο $\sigma(t_0)$.



Ο ορισμός αυτός δικαιολογείται ως εξής: ο λόγος $\frac{\sigma(t_0+h)-\sigma(t_0)}{h}$ όπου $h \neq 0$ (η μέση διανυσματική ταχύτητα του $\sigma(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_0+h]$) είναι ένα διάνυσμα παράλληλο με το διάνυσμα με αρχή στο $\sigma(t_0)$ και τέλος στο $\sigma(t_0+h)$. Όταν το $h \rightarrow 0$, αυτή η παράσταση τείνει στο διάνυσμα $\sigma'(t_0)$ (της στιγμιαίας ταχύτητας).

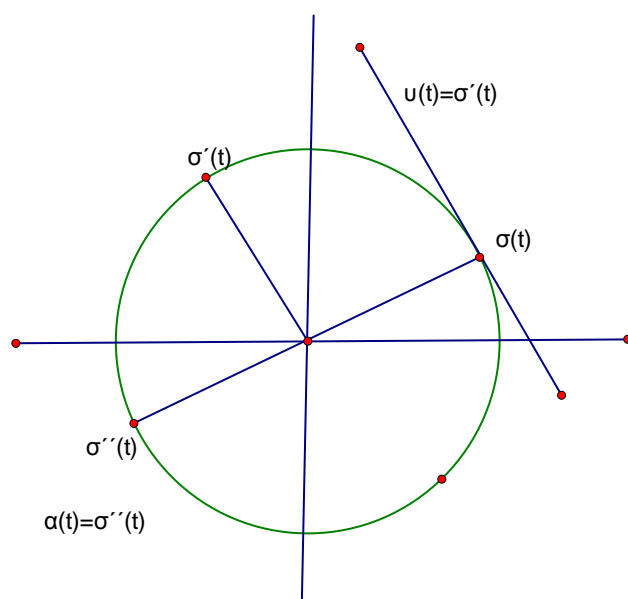
Ο ακόλουθος ορισμός είναι τώρα φυσιολογικός:

9.2 Ορισμός. Έστω $\sigma: [a, b] \rightarrow R^3$ μια C^1 - καμπύλη όπου $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Το διάνυσμα ταχύτητας στο $\sigma(t)$ είναι το $v(t) = \sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ και το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι ίσο με $s(t) = \|\sigma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.

Ως επιτάχυνση του υλικού σημείου ορίζουμε το διάνυσμα: $a(t) = \sigma''(t)$ (αν η σ είναι δύο φορές διαφορίσιμη στο $[a, b]$).

Παραδείγματα: 1) Έστω $a, b \in R^3$ και $\sigma(t) = (1-t)a + tb, t \in [0, 1]$ τότε $\sigma'(t) = b - a, t \in [0, 1]$, $\|\sigma'(t)\| = \|b - a\|$ και $a(t) = 0, t \in [0, 1]$, δηλαδή έχουμε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

2) Έστω $\sigma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$. Τότε $v(t) = \sigma'(t) = (-\sin t, \cos t), t \in [0, 2\pi]$ και $s(t) = \|\sigma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1, t \in [0, 2\pi]$. Παρατηρούμε ότι, $\sigma(t) \cdot v(t) = \sigma(t) \cdot \sigma'(t) = (\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = -\cos t \cdot \sin t + \sin t \cdot \cos t = 0, t \in [0, 2\pi]$. Έτσι το διάνυσμα της ταχύτητας $v(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσεως $\sigma(t)$. Η ταχύτητα είναι σταθερή κατά μέτρο (1 rad / sec).



Πρόκειται για την ομαλή κυκλική κίνηση.

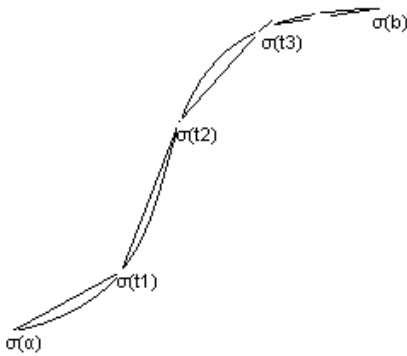
Η επιτάχυνση του κινητού είναι $a(t) = \sigma''(t) = (-\cos t, -\sin t) = -(\cos t, \sin t) = -\sigma(t)$

. Επομένως το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι αντίθετο του $\sigma(t)$ και κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου.

(Η επιτάχυνση $a(t)$ πολλαπλασιασμένη με την μάζα του κινητού μας δίνει την λεγόμενη κεντρομόλο δύναμη η οποία επιταχύνει το κινητό).

Μήκος καμπύλης Έστω $\sigma: [a, b] \rightarrow R^n$ μια καμπύλη (δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση από το $[a, b]$ στον R^n). Για κάθε διαμέριση $P = \{t_0 = a < \dots < t_n = b\}$ του $[a, b]$ θέτουμε $L(\sigma, P) = \sum_{k=1}^n \|\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})\|$. Αν υπάρχει $M > 0: L(\sigma, P) \leq M$ για κάθε P διαμέριση του $[a, b]$ τότε λέμε ότι η καμπύλη έχει μήκος και ως μήκος της ορίζουμε τον αριθμό,

$$\ell(\sigma) = \sup \{L(\sigma, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \leq M.$$



Δηλαδή ως μήκος της $\ell(\sigma)$ ορίζεται το supremum των μηκών όλων των εγγεγραμμένων πολυγωνικών γραμμών στην καμπύλη σ .

Αποδεικνύεται το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία.

9.3 Θεώρημα. Έστω $\sigma: [a, b] \rightarrow R^n$ C^1 καμπύλη. Τότε η σ έχει μήκος και

$$\ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \quad (= \int_a^b s(t) dt)$$

Παρατηρήσεις 1) Έστω $\sigma: [a, b] \rightarrow R^m$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Τότε βέβαια η σ έχει μήκος και αν $P = \{t_0 = a < \dots < t_n = b\} : \sigma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ είναι C^1 για $k = 1, 2, \dots, n$ τότε

$$\ell(\sigma) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\sigma'(t)\| dt. \text{ Μπορούμε βέβαια πάλι να γράφουμε, } \ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt,$$

αφού η $[a, b] \ni t \rightarrow \|\sigma'(t)\| \in R$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών.

2) Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$ που μας υπολογίζει το μήκος μιας C^1 καμπύλης $\sigma: [a, b] \rightarrow R^3$ είναι εκ πρώτης όψευς μη αναμενόμενος. Όμως αν σκεφθούμε το $\sigma(t)$ ως το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου με ταχύτητα, της οποίας το μέτρο ισούται με $\|\sigma'(t)\|$, που κινείται από το $\sigma(a)$ στο $\sigma(b)$, τότε το μήκος

$\ell(\sigma)$ της σ δεν είναι παρά η συνολική απόσταση που διανύθηκε. Επομένως αυτό το μήκος θα πρέπει να ισούται με το ολοκλήρωμα, $\int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$. Αυτό γίνεται ακόμη πιο ξεκάθαρο αν σκεφθούμε πως υπολογίζουμε την διανυόμενη απόσταση στις απλές κινήσεις, όπως είναι η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (σταθερή ταχύτητα $v = ct$) και ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (σταθερή επιτάχυνση $a = ct$).

3) Είναι απλό να εξακριβώσουμε ότι μια C^1 καμπύλη $\sigma: [a, b] \rightarrow R^n$ έχει μήκος και μάλιστα, $\ell(\sigma) \leq \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$.

Πράγματι, έστω $P = \{t_0 = a < \dots < t_m = b\}$, τυχούσα διαμέριση του $[a, b]$. Τότε ισχύει η , $L(\sigma, P) = \sum_{k=1}^m \|\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$ (1). Επομένως,

$$\ell(\sigma) = \sup \{L(\sigma, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \leq \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \ell(\sigma).$$

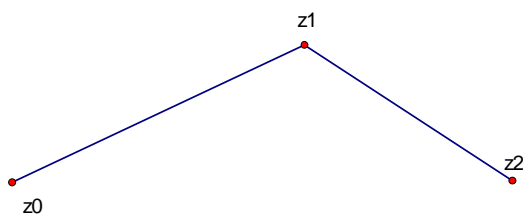
Η απόδειξη της ανισότητας $\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\varphi(t)\| dt$ (την οποία χρησιμοποιήσαμε) περιγράφεται στις ασκήσεις.

Παραδείγματα 1) Έστω $\sigma(t) = a + r(\cos t, \sin t)$ κύκλος κέντρου $a = (a_1, a_2)$ και ακτίνας r στο επίπεδο. Τότε $\sigma'(t) = r(-\sin t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\|\sigma'(t)\| = r\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = r$. Συνεπώς, $\ell(\sigma) = \int_0^{2\pi} \|\sigma'(t)\| dt = 2\pi r$.

2) Έστω z_0, z_1, z_2 τρία διαφορετικά σημεία του R^3 , θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή, $\sigma = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2]$ (δηλαδή $\sigma(t) = \begin{cases} (1-t)z_0 + tz_1, & t \in [0, 1] \\ (2-t)z_1 + (t-1)z_2, & t \in [1, 2] \end{cases}$)

$$\text{Τότε } \ell(\sigma) = \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt + \int_1^2 \|\sigma'(t)\| dt.$$

Επειδή $\sigma'(t) = z_1 - z_0$ για $t \in [0, 1]$ και $\sigma'(t) = z_2 - z_1$ για $t \in [1, 2]$ υπολογίζουμε, $\ell(\sigma) = \int_0^1 \|z_1 - z_0\| dt + \int_1^2 \|z_2 - z_1\| dt = \|z_1 - z_0\| + \|z_2 - z_1\|$.



Ασκήσεις

1 Προσδιορίστε τα διανύσματα ταχύτητας, επιτάχυνσης καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μια από τις παρακάτω καμπύλες για την δοσμένη τιμή του t :

$$(α) \quad r(t) = (6t, 3t^2, t^3), t=0, \quad (β) \quad \sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^3), t=1 \quad (γ)$$

$$\sigma(t) = \left(\sin^2 t, t^2 - 1, \frac{1}{t} \right), t=1, \quad (δ) \quad \sigma(t) = (0, t, 0), t = \frac{1}{2}. \text{ Επίσης να βρεθεί το μήκος των καμπύλων των παραδειγμάτων (α) και (β) στο διάστημα } [0,1].$$

2) Έστω $\sigma: [a, b] \rightarrow R^3$, C^2 καμπύλη με μηδενική επιτάχυνση. Αποδείξτε ότι η σ είναι ευθύγραμμο τμήμα ή σημείο.

3) Να βρεθεί η καμπύλη σ αν $\sigma(0) = (0, -5, 1)$ και $\sigma'(t) = (t, e^t, t^2)$.

(*) 4) Μία διανυσματική συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow R^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ λέγεται ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) αν κάθε μια από τις συνιστώσες f_1, \dots, f_n είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θέτουμε τότε,

$$\int_a^b f dx = \left(\int_a^b f_1 dx, \dots, \int_a^b f_n dx \right). \text{ Αποδείξτε ότι}$$

αν η $f = (f_1, \dots, f_n)$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε και η $\|f\| = \sqrt{f_1^2 + \dots + f_n^2}$

$$\text{είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει, } \left\| \int_a^b f dx \right\| \leq \int_a^b \|f\| dx.$$

[**Υπόδειξη:** Κάθε μία από τις f_i^2 είναι ολοκληρώσιμη άρα και το άθροισμά τους είναι ολοκληρώσιμη, επειδή η συνάρτηση \sqrt{x} είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, έπεται ότι και η $\|f\|$ είναι ολοκληρώσιμη. Καθόσον αφορά την ανισότητα παρατηρούμε ότι αν

θέσουμε $y = (y_1, \dots, y_n)$, όπου $y_i = \int_a^b f_i dx, 1 \leq i \leq n$, τότε $y = \int_a^b f dx$ και

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \int_a^b f_i dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n y_i f_i \right) dx.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι, $\sum_{i=1}^n y_i f_i(t) \leq \|y\| \cdot \|f(x)\|, x \in [a, b]$,

άρα $\|y\|^2 \leq \|y\| \cdot \int_a^b \|f\| dx$. Από την οποία έπεται η ζητούμενη ανισότητα].

5) Να υπολογιστεί το μήκος των καμπύλων:

$$(α) \quad \sigma(t) = a + r(\cos t, \sin t), t \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right], r > 0, a \in R^2$$

$$(β) \quad \sigma(t) = \{(t, t^n) : t \in [0, 1]\}, n \geq 1$$

$$(γ) \quad \sigma(t) = \{(t^n, t^n) : t \in [0, 1]\}, n \geq 1.$$

6) Έστω $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια C^∞ διαφορίσιμη καμπύλη. Υποθέτουμε ότι $\sigma'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Το διάνυσμα $T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ (εφάπτεται στην σ στο $\sigma(t)$ και επειδή

$\|T(t)\| = 1$, το T) λέγεται το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της σ .

(α) Αποδείξτε ότι $T'(t) \cdot T(t) = 0$. (Υπόδειξη: Παραγωγίστε την $T(t) \cdot T(t) = 1$)

(β) Γράψτε ένα τύπο για το $T'(t)$ συναρτήσει της σ .

7) Έστω f, g δύο πραγματικές C^1 συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$, με $0 < f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. Έστω h η διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a, 2b - a]$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$h(t) = \begin{cases} (t, f(t)), & t \in [a, b] \\ (2b - t, g(2b - t)), & t \in [b, 2b - a] \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η h παριστάνει μια καμπύλη Γ η οποία έχει μήκος.

(β) Εξηγήστε, με την βοήθεια ενός σχήματος, την γεωμετρική σχέση μεταξύ f, g και h .

(γ) Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ και } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ είναι ένα χωρίο του \mathbb{R}^2 του οποίου το σύνορο είναι η καμπύλη Γ .

(*) 8) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ κατά τμήματα C^1 συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t) = (t, f(t)), t \in [a, b]$ έχει μήκος το οποίο ισούται με

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

(β) Έστω $f(t) = \begin{cases} t \sin \frac{\pi}{t}, & t \in (0, 1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο

$[0, 1]$ της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής $(0, 1]$ αλλά ασυνεχής στο 0. Εν συνεχεία δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t) = (t, f(t)), t \in [0, 1]$ δεν έχει μήκος