

Όρια συναρτήσεων

2.15. Ορισμός. Έστω, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ συνάρτηση $a \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του A και $b \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f έχει ως όριο το διάνυσμα b καθώς το x τείνει προς το a και συμβολίζουμε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ή $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$

αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0 : x \in A$ και $0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Ισοδύναμα: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0 : x \in A - \{a\}$ και $x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon)$

[ή ακόμη, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0 : f(B(a, \delta) \cap A - \{a\}) \subseteq B(b, \varepsilon)$]

Σημειώνουμε ότι: 1) Ο αριθμός δ εξαρτάται από το ε και το σημείο a .

2) Το όριο αν υπάρχει είναι μοναδικό (εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας).

3) Για μια πραγματική συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, τα όρια $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ορίζονται αναλόγως. Η διατύπωση αυτών των ορισμών αφήνεται ως άσκηση.

Παραδείγματα: 1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

Λύση Έστω, $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta = \varepsilon$ και για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ με

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon \quad \text{έχουμε}$$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|(x, y)\| = 0$

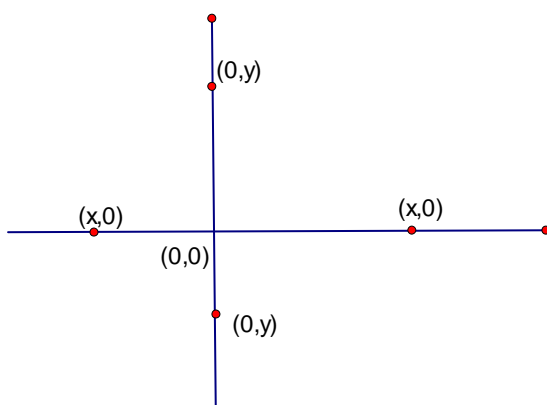
2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$ (και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$)

Λύση. Έστω, $\varepsilon > 0$. Τότε για $0 < \delta \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, έχουμε αν $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{τότε} \quad \frac{1}{x^2 + y^2} > \varepsilon, \quad \text{άρα} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty.$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$.

3) Το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.



Λύση Προσεγγίζουμε πρώτα το $(0, 0)$ κατά μήκος του άξονα $y'y$, δηλαδή αν $x = 0$ και $y \neq 0$. Έστω

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0),$$

τότε: $f(0, y) = \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0$ και συνεπώς $\lim_{(0, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, y) = 0$.

Αναλόγως αν προσεγγίσουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος του άξονα $x'x$ ($y = 0$ και $x \neq 0$)

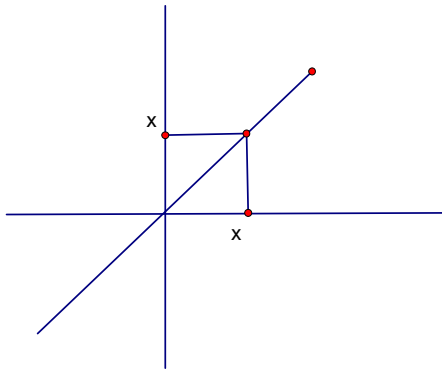
βρίσκουμε $f(x, 0) = \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0$, δηλαδή

$$\lim_{(x, 0) \rightarrow (0, 0)} f(x, 0) = 0$$

Όμως αν προσεγγίσουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$ βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Έπεται ότι το όριο $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.



4) Το όριο $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x+y}{x-y}$ δεν υπάρχει.

Λύση. Η $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ είναι ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, του οποίου το σύνορο είναι η ευθεία $y = x$, δηλαδή το σύνολο $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Έστω, $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 1$. Προσεγγίζουμε το $(0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = ax$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+ax}{x-ax} = \frac{1+a}{1-a}$

Επειδή $\frac{1+a}{1-a} \neq \frac{1+\beta}{1-\beta}$ για $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a \neq 1, \beta \neq 1$ και $a \neq \beta$ έπεται ότι το όριο

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x+y}{x-y}$, δεν υπάρχει.

(Μπορούμε να περιορισθούμε και στις ευθείες $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}, \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ για να διαπιστώσουμε την μη ύπαρξη του ορίου.)

Παρατηρούμε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία $L_a = \{(x, ax) : x \in \mathbb{R}\}$ με $a \neq 1, a \in \mathbb{R}$ και θέτοντας $f(0, 0) = \frac{1+a}{1-a}$ γίνεται συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής, παρόλα αυτά το όριο $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

2.16. Θεώρημα. (Χαρακτηρισμός των ορίων συναρτήσεων με ακολουθίες).

Έστω, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ συνάρτηση, $a \in \mathbb{R}^n$ σ.σ. του A και $b \in \mathbb{R}^m$.

Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

(ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ με $x_n \neq a$, για κάθε $n \geq 1$ και $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} b$

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii) Έστω $\varepsilon > 0$ τότε από την υπόθεσή μας υπάρχει $\delta > 0 : x \in A$ και $0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$ (1)

Έστω $(x_n) \subseteq A - \{a\} : x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$, υπάρχει

τότε $n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0$ τότε $\|x_n - a\| < \delta$ (2). Από τις (1) και (2) έπεται ότι: αν $n \geq n_0$ τότε $\|f(x_n) - b\| < \varepsilon$. Δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} b$.

(ii) \Rightarrow (i) Έστω ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός (i). Τότε θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in A - \{a\}$ με $\|x_\delta - a\| < \delta$ και $\|f(x_\delta) - b\| \geq \varepsilon$ (3).

Άρα για $\delta_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$ υπάρχει $x_n \in A - \{a\} : (\|x_n - a\| < \frac{1}{n}$ και $\|f(x_n) - b\| \geq \varepsilon$. Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$ και $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο b , άτοπο από την υπόθεσή μας.

Σημείωση: 1) Οι συναρτήσεις προβολές $\pi_k : R^n \rightarrow R, k = 1, 2, \dots, n$ ορίζονται ως $\pi_k(x) = x_k$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$

2) Αν $f : A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ συνάρτηση τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\pi_k \circ f : A \subseteq R^n \rightarrow R, k = 1, 2, \dots, m$. Γράφουμε τότε $f_k = \pi_k \circ f, k = 1, 2, \dots, m$, δηλαδή $f_k(x) = \pi_k(f(x)), k = 1, 2, \dots, m$. Είναι τότε σαφές ότι, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), x \in A$. Δηλαδή $f_k(x)$ είναι η k -συντεταγμένη του διανύσματος $f(x), 1 \leq k \leq m$. Για παράδειγμα, αν $f(x, y) = (x^2 + y^2, x \cdot y, x - y)$, τότε $f_1(x, y) = x^2 + y^2, f_2(x, y) = x \cdot y$ και $f_3(x, y) = x - y$.

Οι άλγεβρικές ιδιότητες των ορίων περιγράφονται στην επόμενη.

2.17 Πρόταση. Έστω, $f, g : A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ συναρτήσεις, $a \in R^n$ σ.σ. του $A, b \in R^m$ και $\lambda \in R$. Τότε έχουμε:

(1) Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,

τότε $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \lambda \cdot b$,

(όπου η $\lambda f : A \rightarrow R^m$ ορίζεται ως $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad x \in A$).

(2) (Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$

τότε $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_1 + b_2$, (όπου η $f + g : A \rightarrow R^m$ ορίζεται με $(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in A$).

(3) Αν, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$

τότε $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = b_1 \cdot b_2$ (εσωτερικό γινόμενο), (όπου η $f \cdot g : A \rightarrow R^m$ ορίζεται με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A$). Για $m = 1$ έχουμε βέβαια το σύνηθες γινόμενο πραγματικών αριθμών.

(4) Αν $m = 1$ και $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$ τότε $f(x) \neq 0$ για x «κοντά» στο a και

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$ (η $\frac{1}{f}$ ορίζεται τότε σε κατάλληλη περιοχή του a στο σύνολο A).

(5) Αν $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, όπου $f_1, \dots, f_m : A \rightarrow R$ είναι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της f , τότε, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_m) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$.

Απόδειξη: Οι ιδιότητες (1) έως (4) συνάγονται εύκολα από τις αντίστοιχες αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών και τον χαρακτηρισμό των ορίων με ακολουθίες

(θεώρημα 2.16). Η (4) χρησιμοποιεί και τον ορισμό του ορίου.

Η ιδιότητα (5) αποδεικνύεται με χρήση της πρότασης 1.5 (κατά συντεταγμένες σύγκλιση μιας ακολουθίας $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$) και τον χαρακτηρισμό των ορίων με ακολουθίες (θεώρημα 2.16). Έτσι οι αποδείξεις αυτές αφήνονται ως άσκηση.

Παραδείγματα: Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια:

$$(α) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sigma\upsilon\nu(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} \right) \text{ και}$$

$$(β) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\eta\mu(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} \right)$$

Λύση (α) Σύμφωνα με την πρόταση 2.17 (5) αρκεί να υπολογίσουμε τα όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sigma\upsilon\nu(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2}.$$

Για το πρώτο όριο έχουμε: $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x| \cdot |y|}{|y|} = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. (Αν $\varepsilon > 0$

θέτουμε $\delta = \varepsilon$).

Συνεπώς, εφόσον $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, (για τον υπολογισμό αυτού του ορίου με τον ορισμό των ορίων, αρκεί δοθέντος του $\varepsilon > 0$, να θέσουμε $\delta = \varepsilon$) έπεται ότι:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Για τη δεύτερη συντεταγμένη παρατηρούμε ότι, θέτοντας $z = x^2 + y^2$ έχουμε ότι

$$\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} z(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0, \text{ άρα} \right)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sigma\upsilon\nu(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu z - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu z - \sigma\upsilon\nu 0}{z - 0} = \sigma\upsilon\nu' 0 = -\eta\mu 0 = 0.$$

(β) Για το δεύτερο όριο παρατηρούμε ότι αν $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ και

$$g(x, y) = \frac{\eta\mu(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} \text{ τότε έχουμε: } f(0, y) = 0, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \text{ άρα } \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$$

και $f(|x|, 0) = \frac{|x|}{|x|} = 1, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, άρα $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x, 0) = 1$. Έτσι δεν υπάρχει το όριο

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ κατά συνέπεια (από την πρόταση 2.17 (5)) ούτε και το ζητούμενο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y), g(x, y)) \text{ στον } \mathbb{R}^2.$$

Για λόγους πληρότητας εξετάζουμε και το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$.

Έτσι έχουμε:

$$g(x, 0) = \frac{\eta\mu x^2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \text{ και } g(0, y) = 2 \cdot \frac{\eta\mu 2y^2}{2y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 2 \cdot 1 = 2.$$

Έτσι ούτε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ υπάρχει.

Ασκήσεις

1) Αποδείξτε ότι: (α) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ και (β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + x - xy - y}{x - y} = 1$

2) Αποδείξτε ότι το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$(\alpha) f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}, \quad (\beta) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4},$$

$$(\gamma) f(x, y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (\delta) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

3) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ υπάρχει.

Αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ υπάρχουν για κάθε $y \in \mathbb{R}$ (αντίστοιχα τα όρια $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$

υπάρχουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$) αποδείξτε ότι: $\lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right] = L$ (αντίστοιχα

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right] = L).$$

4) Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις καθορίστε αν τα όρια

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right]$, $\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right]$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ υπάρχουν και οποτεδήποτε

υπάρχουν υπολογίστε τα:

$$(\alpha) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\beta) f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x - y)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(\gamma) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases} \quad (\delta) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y}{x + y}, & x \neq -y \\ 0, & x + y = 0 \end{cases}$$