

**Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών**

**Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού III**

**Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης**

Αθήνα 2010

Οι παρούσες σημειώσεις, ουσιαστικά αποτελούν μια πιο επεξεργασμένη μορφή του μαθήματος

« Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ » που δίδαξα στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών κατά τα έτη 2007-08 και 2009-10. Οι παρατηρήσεις, θεωρήματα ή ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο μπορεί να παραληφθούν σε μια πρώτη ανάγνωση των σημειώσεων

Οι χειρόγραφες σημειώσεις μου γράφτηκαν στον υπολογιστή ( στο Word ) από τον φίλο - και συνάδελφο μαθηματικό της μέσης εκπαίδευσης - κ. Κώστα Θανόπουλο, τον οποίο και από αυτή τη θέση ευχαριστώ.

Αθήνα, Ιούλιος 2010

Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης

\* Τον Ιούνιο του 2011 οι σημειώσεις διορθώθηκαν και προστέθηκαν συμπληρωματικές ασκήσεις.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ  $R^n$ 

Το εσωτερικό γινόμενο	1
Ακολουθίες	9
Ανοικτά και κλειστά σύνολα	15
Όρια συναρτήσεων	22
Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	27
Συμπάγεια και ομοιόμορφη συνέχεια	35
Συνεκτικά σύνολα	40
Το εξωτερικό γινόμενο στον $R^3$	45

## II ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών	54
Κανόνες παραγωγής	66
Ο κανόνας της αλυσίδας	82
Το θεώρημα μέσης τιμής	91
Πολλαπλές μερικές παράγωγοι	94
Καμπύλες στον $R^n$	103
Κλίση και επιφάνειες στάθμης μιας συνάρτησης	111
Το θεώρημα Taylor ( μια μεταβλητή )	117
Το θεώρημα Taylor στις πολλές μεταβλητές	123
Ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων	132
Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης	152
Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων	157
Ακρότατα υπό συνθήκη και πολλαπλασιαστές Lagrange	164

### III ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Βασικές έννοιες στη μια μεταβλητή	171
Ολοκλήρωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών	173
Σύνολα μέτρου μηδέν και ο χαρακτηρισμός του Lebesgue	
των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων	180
Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων με	
διαδοχική ολοκλήρωση	187
Το θεώρημα μέσης τιμής για πολλαπλά ολοκληρώματα	191
Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων με	
διαδοχική ολοκλήρωση	200
Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής και οι	
μετασχηματισμοί συντεταγμένων	208
Αλλαγή μεταβλητής στο διπλό ολοκλήρωμα	210
Αλλαγή μεταβλητής στο τριπλό ολοκλήρωμα	218
Επικαμπύλια ολοκληρώματα	229
Διανυσματικά πεδία	244
Απόκλιση και στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου	250
Το θεώρημα του Green	258
Παραδείγματα και εφαρμογές	276

## Βιβλιογραφία

- 1) T. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974
- 2) B. M. Budak and S. V. Fomin, *Multiple integrals, Field Theory and Series- An Advanced Course in Higher Mathematics*, Mir Publishers –Moscow ,(second print) 1978
- 3) J. Duistermaat and J. Kolk, *Multidimensional Real Analysis, Vols I, II*, Cambridge University Press, 2004
- 4) J. Marsden and A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Π.Ε.Κ. Ηράκλειο 2007
- 5) J. Marsden and M. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*,(Second ed.),W. H. Freeman and Company, New York 1993
- 6) Σ. Μερκουράκης και Τ. Χατζηαφράτης εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση, εκδόσεις Συμμετρία 2005
- 7) W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976
- 8) M. Strauss, G. Bradley and K. Smith, *Multivariable Calculus*, ( 3 ed.), Prentice Hall, 2002
- 9) G.Thoma's, M.Weir, J.Hass and F.Giordano, *Thoma's Calculus*, (11th ed.), Pearson Addison Wesley, 2005.
- 8) Λ. Τσίτσας ,Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός, Εκδόσεις Συμμετρία, 2002.
- 9) Τ.Ε. Χατζηαφράτης, Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές, Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.