ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

Στις ασκήσεις 1-4, υποθέτουμε ότι για τις σ-άλγεβρες $\mathcal{F}, \mathcal{F}_0$, ισχύει $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$.

1. Αν οι $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ ικανοποιούν $E(Y \,|\, \mathcal{F}) = X$ και $E(Y^2) = E(X^2)$, τότε $X = Y$ με πιθανότητα 1.

2. Αν οι $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ ικανοποιούν $E(Y^2 \,|\, \mathcal{F}) = X^2$ και $E(Y \,|\, \mathcal{F}) = X$, τότε $X = Y$ με πιθανότητα 1.

3. Αν οι $X, Y, Z \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ ικανοποιούν $E(X \,|\, Y) = Z, E(Y \,|\, Z) = X, E(Z \,|\, X) = Y$, τότε $X = Y = Z$ με πιθανότητα 1.

4. Για $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ να δειχθεί ότι

$$E(YE(X \,|\, \mathcal{F})) = E(XE(Y \,|\, \mathcal{F})).$$

5. Έστω $(Z_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $E(|Z_1|) < \infty$, $E(Z_1) = 1$, και $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι η $(X_n)_{n\geq 0}$ με $X_0 := 1$, $X_n := Z_1 Z_2 \cdots Z_n$ για $n \geq 1$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

6. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $P(X_1 = 1) = P(X = -1) = 1/2$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ και $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι η $(Z_n)_{n\geq 0}$ με $Z_0 := 0$, $Z_n := S_n^3 - 3nS_n$ για $n \geq 1$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

7. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με

$$P(X_1 = 1) = p,\ P(X = -1) = 1 - p =: q,$$

όπου $p \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} &S_0 := 0, S_n := X_1 + \cdots + X_n, \text{ και} \\ &\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι οι ακολουθίες $(W_n)_{n\geq 0}, (M_n)_{n\geq 0}$ με

$$W_n := S_n - (p - q)n, M_n := (q/p)^{S_n}$$

είναι martingales ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

8. Έστω ότι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$. Ορίζουμε $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$ και η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

9. Έστω S_n και $\mathcal{F}_n$ όπως στην Άσκηση 6. Απο τους παρακάτω χρόνους, ποιοί είναι χρόνοι στάσης;

(α) $N_1 := \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$.
(β) $N_2 := \inf\{n \geq 1 : X_{n-2} = X_{n-1} = X_n = 1\}$.
(γ) $N_3 := \inf\{n \geq 1 : X_n = X_{n+1} = X_{n+2} = 1\}$.

10. Έστω $(Z_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων θετικών τυχαίων μεταβλητών με $E(Z_1) = 1$ και $P(Z_1 = 1) < 1$. Θέτουμε $X_n := Z_1 Z_2 \cdots Z_n$ για κάθε $n \geq 1$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα σύγκλισης για martingales, να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ με πιθανότητα 1.

11. Στο πείραμα της κάλπης του Polya (Κεφάλαιο 4, παράγραφος 4.3 β), παίρνουμε $r = g = c = 1$. Έστω G_n, R_n ο αριθμος των νέων πράσινων, αντίστοιχα κόκκινων, μπαλλών που υπάρχουν στην κάλπη μετά απο n βήματα του πειράματος (άρα $G_n + R_n = n$, και τότε η κάλπη έχει $n+2$ μπάλλες). Για $a \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι η ακολουθία $(U_n)_{n\geq 1}$ με

$$U_n = \frac{(n+1)!}{G_n!(n-G_n)!}(1-a)^{G_n} a^{R_n}$$

είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_n := \sigma(G_1, \ldots, G_n)$.

12. Θεωρούμε τον απλό τυχαίο περίπατο στο $\mathbb{Z}$, δηλ. την ακολουθία S_n απο την Άσκηση 6, καθώς και τη διήθηση $\mathcal{F}_n$ απο την ίδια άσκηση.

(α) Να δειχθεί ότι για $\lambda \in \mathbb{R}$, η ακολουθία

$$M_n := \frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh(\lambda))^n},\ n \geq 0,$$

είναι martingale.

(β) Για τον χρόνο στάσης $T := \min\{n \geq 1 : S_n = 1\}$ έχουμε δει ότι $ET = \infty$. Εδώ θα υπολογίσουμε την κατανομή του. Να δειχθεί ότι για $\lambda > 0$ ισχύει

$$E\left(\left(\frac{1}{\cosh(\lambda)}\right)^T\right) = e^{-\lambda}.$$

Άρα για $0 < a < 1$,

$$E(a^T) = \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},$$

και

$$P(T = 2n+1) = (-1)^n \binom{1/2}{n+1}$$

για $n \geq 0$.

13. Έστω $(Z_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $Z_1 = 0$ ή 2 με πιθανότητα $1/2$ την καθεμία τιμή. Θέτουμε $X_0 := 1, X_n := Z_1 Z_2 \cdots Z_n$ για κάθε $n \geq 1$. Έστω και ο χρόνος στάσης $N := \min\{n \geq 1 : X_n = 0\}$. Τι κατανομή έχει ο N; Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα επιλεκτικής στάσης (Θεώρημα 10.10(b), σελ. 100 στον Williams) για την martingale X και τον χρόνο N;

Υποδείξεις

1. Υπολογίζουμε την $E(X-Y)^2$. Προσέξτε ότι απο τα δεδομένα έπεται ότι η X είναι $\mathcal{F}$ μετρήσιμη.

3. Η πρώτη σχέση συνεπάγεται ότι η Z ισούται σχεδόν παντού με μία $\sigma(Y)$-μετρήσιμη συνάρτηση, άρα $\sigma(Z) \subset (\sigma(Y))_P$, όπου $(\sigma(Y))_P$ συμβολίζει την πλήρωση της σ-άλγεβρας $\sigma(Y)$ ως προς το μέτρο P.

4. Είναι χρήσιμη εδώ η γεωμετρική ερμηνεία της $E(X\,|\,\mathcal{F})$ για $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$. Στο αριστερό μέλος γράφουμε

$$Y = \{Y - E(Y\,|\,\mathcal{F})\} + E(Y\,|\,\mathcal{F}).$$

6. Δείχνουμε πρώτα ότι $E(S_{n+1}^3\,|\,\mathcal{F}_n) = S_n^3 + 3S_n$.

8. Εφάρμογή της λεγόμενης "tower property", Θεώρημα 1.2, Κεφάλαιο 4 απο τον Durrett.

8. Δώστε μια διαισθητική αιτιολόγηση μόνο.

10. Η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι maritngale λόγω της Άσκησης 5. Η σύγκλιση έπεται απο το Πόρισμα 2.11. Αν σε κάποιο σημείο ω του χώρου πιθανότητας το όριο είναι > 0, τότε $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = 1$. Από την $P(Z_1 = 1) < 1$ έπεται οτι υπάρχει $k \geq 1$ τέτοιο ώστε $P(Z_1 \notin (1-1/k, 1+1/k)) > 0$, και με μία εφαρμογή του 2ου λήμματος Borel-Cantelli δείχνει κανείς οτι $P(\{\omega : \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = 1\}) = 0$.

Το ίδιο αποτέλεσμα έπεται απο τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών (η ακολουθία $(\log Z_n)/n$ συγκλίνει σε κάτι αρνητικό), αλλά εδώ ζητάμε ένα εναλλακτικό επιχείρημα.

11. Δείχνουμε ότι $E(U_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = U_n$, δηλαδή ισότητα δύο τυχαίων μεταβλητών. Στο σύνολο $\{G_n = j\} \in \mathcal{F}_n$ (με $0 \leq j \leq n$), η τυχαία μεταβλητή στο δεξί μέλος της πιο πάνω ισότητας ισούται με

$$\frac{(n+1)!}{j!(n-j)!}(1-a)^j a^k$$

όπου $k = n - j$. Συνεχίζουμε με ένα επιχείρημα όπως στην Παράγραφο 4.3(b).

12. (α) Έπεται και απο την Άσκηση 5. (β) Δουλεύουμε με την $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ και χρησιμοποιούμε κατάλληλα οριακά θεωρήματα. Για το τελευταίο μέρος, χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα της $\sqrt{1-a^2}$ σε δυναμοσειρά.