

Θέμα 1ο: (α) Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 12 κάρτες. Από αυτές, 3 έχουν και τις δύο πλευρές κόκκινες, 4 έχουν και τις δύο πλευρές πράσινες και 5 έχουν μία πλευρά κόκκινη και μία πλευρά πράσινη. Επιλέγουμε στην τύχη μία κάρτα και ακολούθως βλέπουμε στην τύχη μία πλευρά της. Να υπολογιστούν:

- (1) (1 μον.) Η πιθανότητα να δούμε κόκκινη πλευρά.
 - (2) (1 μον.) Η πιθανότητα η κάρτα που επιλέχθηκε να έχει και τις δύο πλευρές κόκκινες δεδομένου ότι η πλευρά που είδαμε ήταν κόκκινη.
- (β) (1 μον.) Ρίχνουμε συνεχώς ένα συνηθισμένο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη «6». Να υπολογιστεί η μέση τιμή του αθροίσματος όλων των ενδείξεων που έφερε το ζάρι.

Θέμα 2ο: Έστω X, Y ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = 3e^{-3x}1_{\{x>0\}}, \quad f_Y(y) = 4e^{-4y}1_{\{y>0\}}.$$

- (1) (1 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(5 < X < 8 \mid X > 7)$.
- (2) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < Y)$.
- (3) (1 μον.) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της $\min(X, Y)$.
- (4) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $Z = 3X + 4Y$.

Θέμα 3ο: Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = cx^2e^{-3xy}1_{\{0 < x < 1, y > 0\}}.$$

- (1) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η σταθερά c .
- (2) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X .
- (3) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[Y \mid X = x]$.
- (4) (1 μον.) Να υπολογιστεί η $E[XY]$.

Θέμα 4ο: (α) Η τυχαία μεταβλητή X έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{7t}}{1 - t^2}, \quad |t| < 1.$$

- (1) (0.5 μον.) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (2) (1 μον.) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$P(X \leq 3) \leq \frac{1}{8}.$$

(β) (1 μον.) Αν οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_{50} είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με ροπογεννήτρια όπως στο ερώτημα (α), να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα

$$P(340 < X_1 + X_2 + \dots + X_{50} < 370).$$

$[\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9773, \Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(3) = 0.9987]$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!

Λύσεις:

Θέμα 1ο:

(α) Έστω K_i το ενδεχόμενο να επιλεγεί κάρτα που έχει i κόκκινες πλευρές, $i = 0, 1, 2$ και K το ενδεχόμενο να δούμε κόκκινη πλευρά.

(1) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας η πιθανότητα να δούμε κόκκινη πλευρά είναι

$$P(K) = P(K_0)P(K|K_0) + P(K_1)P(K|K_1) + P(K_2)P(K|K_2) = \frac{4}{12} \cdot 0 + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{12} \cdot 1 = \frac{11}{24}.$$

(2) Από τον κανόνα του Bayes έχουμε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα η κάρτα που επιλέχθηκε να έχει και τις δυο πλευρές κόκκινες δεδομένου ότι η πλευρά που είδαμε ήταν κόκκινη είναι

$$P(K_2|K) = \frac{P(K_2)P(K|K_2)}{P(K)} = \frac{\frac{3}{12} \cdot 1}{\frac{11}{24}} = \frac{6}{11}.$$

(β) Έστω T ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά «6» και X_i η ένδειξη που εμφανίζεται στην i ρίψη του ζαριού, $i = 1, 2, \dots$. Η μέση τιμή του αθροίσματος όλων των ενδείξεων που έφερε το ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη «6» είναι

$$m = E \left[\sum_{i=1}^T X_i \right].$$

Δεσμεύοντας στην X_1 (δηλαδή εφαρμόζοντας το θεώρημα της διπλής ή επαναλαμβανόμενης μέσης τιμής) έχουμε:

$$\begin{aligned} m &= P(X_1 = 6)E \left[\sum_{i=1}^T X_i | X_1 = 6 \right] + P(X_1 \neq 6)E \left[\sum_{i=1}^T X_i | X_1 \neq 6 \right] \\ &= \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{5}{6}(E[X_1 | X_1 \neq 6] + m). \end{aligned}$$

Επίσης

$$E[X_1 | X_1 \neq 6] = \sum_{k=1}^5 kP(X_1 = k | X_1 \neq 6) = \sum_{k=1}^5 k \frac{1}{5} = 3,$$

οπότε έχουμε την εξίσωση

$$m = 1 + \frac{5}{6}(3 + m)$$

που δίνει $m = 21$.

Θέμα 2ο:

(1) Από την αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής έχουμε

$$P(5 < X < 8 | X > 7) = P(X < 8 - 7) = \int_0^1 3e^{-3x} dx = 1 - e^{-3}.$$

Εναλλακτικά υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} P(5 < X < 8 | X > 7) &= \frac{P(7 < X < 8)}{P(X > 7)} = \frac{\int_7^8 3e^{-3x} dx}{\int_7^\infty 3e^{-3x} dx} \\ &= \frac{e^{-3 \cdot 7} - e^{-3 \cdot 8}}{e^{-3 \cdot 7}} = 1 - e^{-3}. \end{aligned}$$

(2) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} 3e^{-3x} \cdot 4e^{-4y} dy dx = \int_0^{\infty} 3e^{-3x} \int_x^{\infty} 4e^{-4y} dy dx \\ &= \int_0^{\infty} 3e^{-3x} [-e^{-4y}]_{y=x}^{\infty} dx = \int_0^{\infty} 3e^{-7x} dx = \left[\frac{-3e^{-7x}}{7} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

(3) Έστω $F_W(z)$ η συνάρτηση κατανομή της $W = \min(X, Y)$. Προφανώς $F_W(w) = 0$ για $w \leq 0$, ενώ για $w > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) = P(\min(X, Y) \leq w) = 1 - P(\min(X, Y) > w) = 1 - P(X > w, Y > w) \\ &= 1 - P(X > w)P(Y > w) = 1 - e^{-3w}e^{-4w} = 1 - e^{-7w}. \end{aligned}$$

(4) Έχουμε

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tZ}] = E[e^{3tX+4tY}] = E[e^{3tX}]E[e^{4tY}] \\ &= \int_0^{\infty} e^{3tx} 3e^{-3x} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{4ty} 4e^{-4y} dy \\ &= \left[\frac{-e^{-3(1-t)x}}{(1-t)} \right]_{x=0}^{\infty} \cdot \left[\frac{-e^{-4(1-t)y}}{(1-t)} \right]_{y=0}^{\infty} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1-t)^2}, & t < 1, \\ \infty, & t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Θέμα 3ο:

(1) Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{\infty} cx^2 e^{-3xy} dy dx \\ &= c \int_0^1 x^2 \int_0^{\infty} e^{-3xy} dy dx = c \int_0^1 x^2 \left[\frac{-e^{-3xy}}{3x} \right]_{y=0}^{\infty} dx \\ &= \frac{c}{3} \int_0^1 x dx = \frac{c}{6}, \end{aligned}$$

Οπότε $c = 6$.

(2) Έστω $f_X(x)$ η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X . Είναι $f_X(x) = 0$ για $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, αφού $f_{X,Y}(x, y) = 0$ για $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Για $x \in (0, 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^{\infty} 6x^2 e^{-3xy} dy \\ &= 6x^2 \int_0^{\infty} e^{-3xy} dy = 6x^2 \left[\frac{-e^{-3xy}}{3x} \right]_{y=0}^{\infty} \\ &= 2x. \end{aligned}$$

(3) Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της Y δεδομένου ότι $X = x$ ορίζεται όταν $f_X(x) > 0$, δηλαδή για $x \in (0, 1)$. Τότε $f_{Y|X}(y|x) = 0$ για $y \leq 0$, ενώ για $y > 0$ έχουμε

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{6x^2 e^{-3xy}}{2x} = 3x e^{-3xy}.$$

Επομένως η δεσμευμένη κατανομή της Y δεδομένου ότι $X = x$ είναι εκθετική με παράμετρο $3x$ οπότε $E[Y|X = x] = \frac{1}{3x}$. Αναλυτικά, για $x > 0$, έχουμε ότι

$$E[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_0^{\infty} y 3x e^{-3xy} dy = \frac{1}{3x}.$$

(4) Εφαρμόζοντας το θεώρημα της διπλής ή επαναλαμβανόμενης μέσης τιμής έχουμε

$$E[XY] = E[E[XY|X]] = E[XE[Y|X]] = E\left[X\frac{1}{3X}\right] = \frac{1}{3}.$$

Πιο αναλυτικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[XY] &= E[E[XY|X]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[XY|X=x]f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{3x}f_X(x)dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f_X(x)dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Θέμα 4ο:

(α)

(1) Έχουμε

$$\begin{aligned} E[X] &= M'_X(0) = \left. \frac{7e^{7t}(1-t^2) - e^{7t}(-2t)}{(1-t^2)^2} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{7e^{7t}}{1-t^2} + \frac{2te^{7t}}{(1-t^2)^2} \right|_{t=0} = 7 \\ E[X^2] &= M''_X(0) \\ &= \left. \frac{49e^{7t}(1-t^2) - 7e^{7t}(-2t)}{(1-t^2)^2} \right|_{t=0} \\ &\quad + \left. \frac{(2e^{7t} + 14te^{7t})(1-t^2)^2 - 2te^{7t}2(1-t^2)2t}{(1-t^2)^4} \right|_{t=0} \\ &= 51 \end{aligned}$$

Άρα

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2.$$

(2) Έχουμε

$$P(X \leq 3) = P(X - E[X] \leq -4) \leq P(|X - E[X]| \geq 4) \leq \frac{Var[X]}{4^2} = \frac{1}{8},$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Chebyshev.

(β) Έστω $S_{50} = X_1 + X_2 + \dots + X_{50}$. Έχουμε $E[S_{50}] = 50 \cdot 7 = 350$ και $Var[S_{50}] = 50 \cdot 2 = 100 = 10^2$. Χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση το κεντρικό οριακό θεώρημα και έχουμε

$$\begin{aligned} P(340 < X_1 + X_2 + \dots + X_{50} < 370) &= P(340 < S_{50} < 370) \\ &= P\left(\frac{340 - 350}{10} < \frac{S_{50} - E[S_{50}]}{\sqrt{Var[S_{50}]}} < \frac{370 - 350}{10}\right) \\ &\simeq P(-1 < Z < 2), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) \\ &= 0.8186. \end{aligned}$$