ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΙΟΥΝΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. (3 βαθμοί) Παρατηρούμε τις διαδοχικές ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος που φέρνει την ένδειξη 'Κ' με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και την ένδειξη 'Γ' με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Να υπολογιστούν:
(α) η πιθανότητα στις πρώτες 10 ρίψεις να εμφανιστούν 6 'Κ' και 4 'Γ',
(β) η δεσμευμένη πιθανότητα η πρώτη ρίψη να είναι 'Κ' δεδομένου ότι στις πρώτες 10 ρίψεις εμφανίστηκαν 6 'Κ' και 4 'Γ',
(γ) ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν δυο συνεχόμενες 'Κ'.

Θέμα 2. (3 βαθμοί) Από μια κάλπη, που περιέχει 100 διακριμένα σφαιρίδια που φέρουν τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 100$, επιλέγεται τυχαία ένα σφαιρίδιο. Έστω M η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στον αριθμό του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι M φορές, δηλάδη όσες φορές δείχνει ο αριθμός του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Οι διαδοχικές ρίψεις του ζαριού θεωρούνται ανεξάρτητες. Έστω Y το πλήθος των ρίψεων στις οποίες το ζάρι εμφάνισε την ένδειξη '1'. Να υπολογιστούν:
(α) η πιθανότητα $P(M = m, Y = y)$, $m = 1, 2, \ldots, 100$ και $y = 0, 1, 2, \ldots, m$,
(β) η πιθανότητα $P(Y = 0)$,
(γ) η δεσμευμένη πιθανότητα $P(M = m|Y = 0)$, $m = 1, 2, \ldots, 100$,
(δ) η δεσμευμένη μέση τιμή $E[Y|M = m]$, $m = 1, 2, \ldots, 100$,
(ε) η μέση τιμή $E[Y]$.

Θέμα 3. (3 βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x + 3y^2) & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:
(α) η σταθερά c,
(β) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y,
(γ) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της X δοθέντος ότι $Y = y$,
(δ) η πιθανότητα $P(X < Y)$,
(ε) η μέση τιμή $E[5Y + 3]$.

Θέμα 4. (3 βαθμοί) Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 3, δηλαδή έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η N είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$ και έχει τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{5}$ δηλαδή συνάρτηση πιθανότητας

$$p_N(n) = P(N = n) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X_i, $i = 1, 2, \ldots$.
(β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ και να βρεθεί τί κατανομή ακολουθεί η S_N.
(γ) Έστω $S_{300} = \sum_{i=1}^{300} X_i$ Να υπολογιστεί προσεγγιστικά, με χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, η πιθανότητα $P(S_{300} \geq 100)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!
Ο τελικός βαθμός υπολογίζεται ως το min(άθροισμα βαθμών θεμάτων,10).

Πιθανότητες Ι, Ιούνιος 2010, Λύσεις Θεμάτων Ομάδας Β

Θέμα 1.

(α) P(στις πρώτες 10 ρίψεις να εμφανιστούν 6 'Κ' και 4 'Γ')

$$= \binom{10}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad (\text{Διωνυμική})$$

(β) P(η 1η ρίψη είναι 'Κ' | στις πρώτες 10 ρίψεις εμφανίστηκαν 6 'Κ' και 4 'Γ')

$$= \frac{P(\text{η 1η ρίψη είναι 'Κ', στις ρίψεις 2-10 εμφανίστηκαν 5 'Κ' και 4 'Γ'})}{P(\text{στις 10 πρώτες ρίψεις εμφανίστηκαν 6 'Κ' και 4 'Γ'})}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\binom{9}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^4}{\binom{10}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{\binom{9}{5}}{\binom{10}{6}} = \frac{\binom{9}{5}}{\frac{10}{6}\binom{9}{5}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

(γ) Έστω

X: ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν δυο διαδοχ. 'Κ'

Y: ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να εμφανιστούν 'Γ' για πρώτη φορά.

Από Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$E[X] = \sum_{y=1}^{\infty} P(Y=y)\, E[X \mid Y=y].$$

Όμως

$$P(Y=y) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{y-1}, \quad y=1,2,3,\dots \quad (\text{Γεωμετρική})$$

$$E[X \mid Y=1] = 1 + E[X]$$

$$E[X \mid Y=2] = 2 + E[X]$$

$$E[X \mid Y=y] = 2, \quad y=3,4,\dots$$

οπότε

$$E[X] = \frac{1}{3}(1+E[X]) + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(2+E[X]) + \sum_{y=3}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{y-1}\cdot 2$$

Άθροισμα γεωμ. προόδου

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}E[X] + \frac{4}{9} + \frac{2}{9}E[X] + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\cdot 2$$

$$= \frac{5}{9}E[X] + \frac{15}{9}$$

Επομένως $E[X] = \frac{15}{4}$.

Θέμα 2.

(α) Από πολλαπλασιαστικό νόμο έχουμε

$$P(M=m, Y=y) = P(M=m)P(Y=y \mid M=m) = \frac{1}{100}\binom{m}{y}\left(\frac{1}{6}\right)^{y}\left(\frac{5}{6}\right)^{m-y}, \quad m=1,2,\ldots,100, \; y=0,1,\ldots,m$$

(β) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητος έχουμε

$$P(Y=0) = \sum_{m=1}^{100} P(M=m)P(Y=0 \mid M=m) = \sum_{m=1}^{100} \frac{1}{100}\binom{m}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{m}$$

$$= \frac{1}{100}\sum_{m=1}^{100}\left(\frac{5}{6}\right)^{m} = \frac{1}{100}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{100}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{20}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{100}\right)$$

(γ) Από το θεώρημα Bayes έχουμε

$$P(M=m \mid Y=0) = \frac{P(M=m)P(Y=0 \mid M=m)}{P(Y=0)} = \frac{\frac{1}{100}\binom{m}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{m}}{\frac{1}{20}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{100}\right)}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{m}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{100}}, \quad m=1,2,\ldots,100.$$

(δ) Η δεσμευμένη κατανομή της Y δεδομένου ότι $M=m$ είναι διωνυμική με m δοκιμές και πιθανότητα επιτυχίας $\frac{1}{6}$. Συνεπώς

$$E[Y \mid M=m] = \frac{m}{6}$$

(ε) Από θεώρημα διπλής μέσης τιμής έχουμε

$$E[Y] = E[E[Y \mid M]] = E\left[M\cdot\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}E[M] = \frac{1}{6}\cdot\frac{101}{2} = \frac{101}{12}$$

γιατί η M είναι ομοιόμορφη διακριτή στο $\{1,2,\ldots,100\}$ οπότε

$$E[M] = \sum_{m=1}^{100} m P(M=m) = \sum_{m=1}^{100} m\,\frac{1}{100} = \frac{1}{100}\cdot\frac{100\cdot 101}{2} = \frac{101}{2}.$$

Εναλλακτικά

$$E[Y] = \sum_{m=1}^{100} P(M=m)E[Y \mid M=m] = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{100}\cdot\frac{m}{6} = \frac{1}{600}\sum_{m=1}^{100} m = \frac{1}{600}\cdot\frac{100\cdot 101}{2}$$

$$= \frac{101}{12}.$$

Θέμα 3.

(α) $1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 c\,(2x+3y^2)\,dx\,dy$

$= c\int_0^1 [x^2+3y^2x]_{x=0}^{1}\,dy = c\int_0^1 (1+3y^2)\,dy = c\,[y+y^3]_{y=0}^{1}$

$= 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$,

οπότε

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+3y^2) & \text{αν } 0\le x\le 1 \text{ και } 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(β) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(2x+3y^2)\,dy = \left[xy + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{1}$

$= \frac{2x+1}{2}$, $0\le x\le 1$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(2x+3y^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2x}{2}\right]_{x=0}^{1}$

$= \frac{1+3y^2}{2}$, $0\le y\le 1$

(γ) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}(2x+3y^2)}{\frac{1}{2}(1+3y^2)} = \frac{2x+3y^2}{1+3y^2}$, $0\le x\le 1$

(δ) $P(X<Y) = \int_0^1\int_0^y \frac{1}{2}(2x+3y^2)\,dx\,dy$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2+3y^2x]_{x=0}^{y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2+3y^3)\,dy$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}+\frac{3y^4}{4}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{6}+\frac{3}{8} = \frac{13}{24}$

(ε) $E[Y] = \int_0^1 y\,\frac{1+3y^2}{2}\,dy = \int_0^1 \frac{y+3y^3}{2}\,dy = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{1}$

$= \frac{1}{4}+\frac{3}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow E[5Y+3] = 5E[Y]+3 = \frac{49}{8}$

Θέμα 4.

(α) $M_{X_i}(t) = E[e^{tX_i}] = \int_0^{\infty} e^{tx}\, 3e^{-3x}\, dx = 3\int_0^{\infty} e^{-(3-t)x}\, dx$

$= \dfrac{3}{3-t}, \quad t<3.$

(β) $M_{S_N}(t) = P_N(M_{X_i}(t))$

Όμως

$$P_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} z^n = \frac{z}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4z}{5}\right)^{n-1} = \frac{z}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4z}{5}} = \frac{z}{5-4z}$$

οπότε

$$M_{S_N}(t) = \frac{M_{X_i}(t)}{5-4M_{X_i}(t)} = \frac{\frac{3}{3-t}}{5-4\cdot\frac{3}{3-t}} = \frac{3}{3-5t}$$

$$= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}-t} = \int_0^{\infty} e^{tx}\,\frac{3}{5}\,e^{-\frac{3}{5}t}\,dx$$

Άρα η S_N είναι εκθετική με παράμετρο $\frac{3}{5}$.

(γ) $P(S_{300} \geq 100) = P\left(\dfrac{S_{300} - E[S_{300}]}{\sqrt{Var[S_{300}]}} \geq \dfrac{100 - E[S_{300}]}{\sqrt{Var[S_{300}]}}\right).$

Έχουμε

$E[X_i] = \frac{1}{3} \Rightarrow E[S_{300}] = 300\cdot\frac{1}{3} = 100$

$Var[X_i] = \frac{1}{9} \Rightarrow Var[S_{300}] = 300\cdot\frac{1}{9} = \frac{100}{3}$

Επομένως

$$P(S_{300} \geq 100) = P\left(\frac{S_{300} - E[S_{300}]}{\sqrt{Var[S_{300}]}} \geq \frac{100-100}{\sqrt{\frac{100}{3}}}\right)$$

$$\overset{ΚΟΘ}{\simeq} P(Z \geq 0), \quad Z \sim N(0,1)$$

$$= 1 - \Phi(0)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$