

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2010- Ομάδα Β

Θ1. Από μία κάλπη που περιέχει 7 κόκκινα και 9 μπλε σφαιρίδια εξάγονται χωρίς επανατοποθέτηση 5 σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο. Να βρεθεί η πιθανότητα όλα τα σφαιρίδια που επιλέχτηκαν να είναι του ίδιου χρώματος.

Θ2. Μία κάλπη περιέχει 5 νομίσματα από τα οποία τα 4 είναι αμερόληπτα και το 1 είναι κίβδηλο. Η πιθανότητα εμφάνισης της ένδειξης “γράμματα” είναι $1/2$ για κάθε αμερόληπτο νόμισμα και $4/5$ για το κίβδηλο. Επιλέγουμε από την κάλπη ένα νόμισμα στην τύχη, και το ρίχνουμε τρεις φορές. Αν και οι τρεις ρίψεις φέρουν την ένδειξη “γράμματα”, ποια είναι η πιθανότητα το επιλεγμένο νόμισμα να είναι αμερόληπτο;

Θ3. Η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας μίας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$f(x) = \begin{cases} c(5-x) & \text{αν } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθούν: **(i)** η σταθερά c **(ii)** η συνάρτηση κατανομής της X **(iii)** η μέση τιμή και η διασπορά της X και **(iv)** η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = \log X$.

Θ4. Ένα σύστημα αποτελείται από n_1 εξαρτήματα τύπου Α και από n_2 εξαρτήματα τύπου Β που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο (με $n_1 \geq 3, n_2 \geq 5$). Η πιθανότητα λειτουργίας κάθε εξαρτήματος τύπου Α είναι p_1 , ενώ η πιθανότητα λειτουργίας κάθε εξαρτήματος τύπου Β είναι p_2 (με $p_1, p_2 \in (0,1)$). Το σύστημα λειτουργεί όταν λειτουργούν ταυτόχρονα τουλάχιστον τρία εξαρτήματα τύπου Α και τουλάχιστον πέντε εξαρτήματα τύπου Β. Ποια είναι η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος;

Θ5. Πραγματοποιούμε μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p_1 σε καθεμία, και έστω N ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Στη συνέχεια πραγματοποιούμε N ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p_2 σε καθεμία, και έστω X ο αριθμός των επιτυχιών. Να υπολογισθεί η $P(X=1)$.

Θ6. (α) Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με διασπορές $0 < V(X) < +\infty$ και $0 < V(Y) < +\infty$. Να δείξετε ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών $X-Y$ και $X+Y$ δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(X-Y, X+Y) = \frac{V(X) - V(Y)}{V(X) + V(Y)}.$$

(β) Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με $E(X)=E(Y)=0, E(X^2)=E(Y^2)=2$ και διασπορά του αθροίσματος τους $V(X+Y)=5$. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Θ7. Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{αν } 0 < x^2 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθούν: **(i)** η σταθερά c και **(ii)** οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας-πιθανότητας των X και Y .

Θ8. (α) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια της Διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους n και p .

(β) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όπου η X_i ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n_i και $p, i=1, 2, \dots, n$. Να βρεθεί η κατανομή του αθροίσματός τους.

Θ9. Έστω X_1, X_2, \dots, X_{180} ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όπου η καθεμία ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1, 2, 3, 4\}$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμά τους να είναι στο $[420, 465]$ (δίνονται $\Phi(1)=0.8413, \Phi(1.5)=0.9332, \Phi(2)=0.9773$).

Να λυθούν όλα τα θέματα σε 2 ½ ώρες. Καλή επιτυχία.