1

8/4/13

Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

1. Δισδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

$(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$

$\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ λέγεται 2-διάστατη τυχαία μεταβλητή

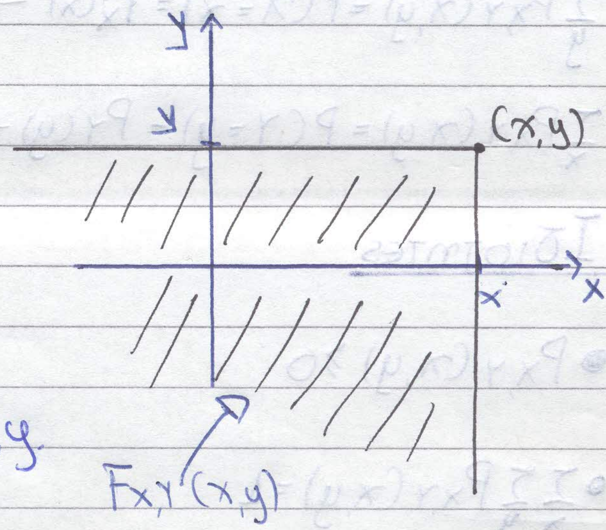
αν $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A}$ → οικογένεια ενδεχομένων

2. Συνάρτηση Κατανομής

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ → (από κοινού) συνάρτηση κατανομής της (X,Y).

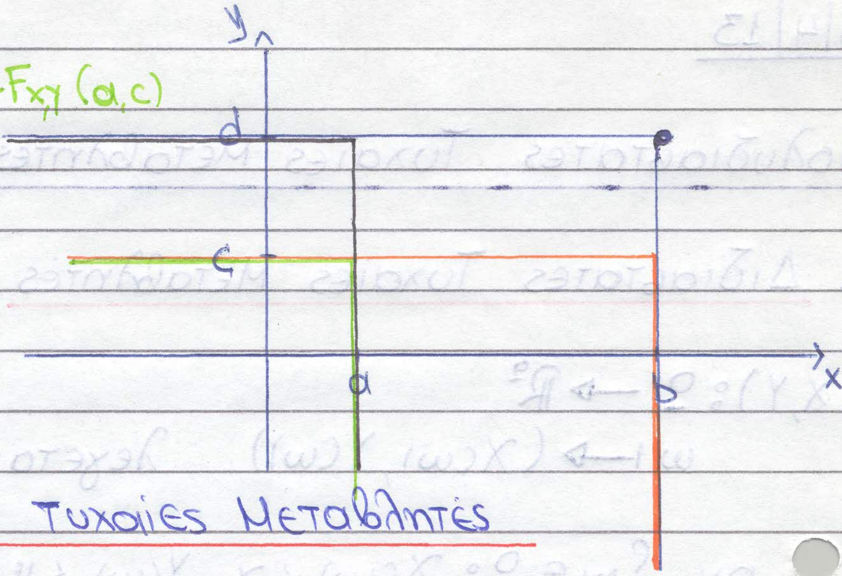
Ιδιότητες

- $\lim\limits_{x,y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$
- $\lim\limits_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x) = F_X(x)$ → Περιθώρια συνάρτηση κατανομής της X.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$ → Περιθώρια συνάρτηση κατανομής της Y
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $F_{X,Y}(x,y)$: αύξουσα ως προς x, y
- $F_{X,Y}(x,y)$: δεξιά συνεχής ως προς x, y.



• $P(a<X\le b,\ c<Y\le d)$

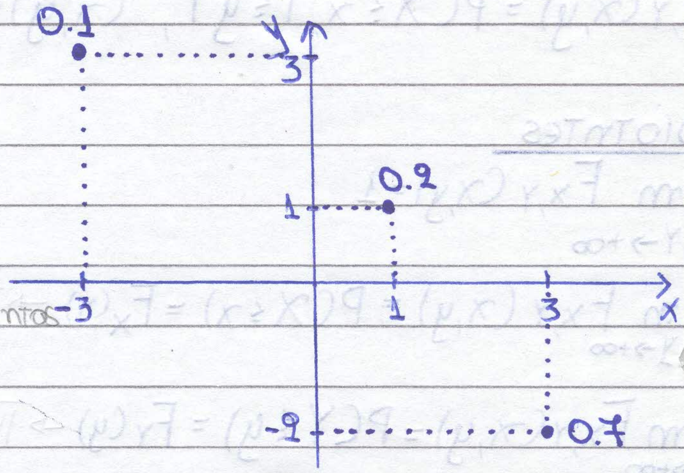
$= F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$



3. Διακριτές Δι-διάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός

(X,Y) λέγεται 2-διάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή αν $\exists\ S=\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots\}$ ώστε $P((X,Y)\in S)=1$



$P((X,Y)\in\{(1,1),(3,-2),(-3,3)\})=1$

$P_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)$

↳ (από κοινού) συνάρτηση Πιθανότητας (X,Y)

$\sum_y P_{X,Y}(x,y)=P(X=x)=P_X(x)$ → Περιθώρια συνάρτηση Πιθανότητας της X.

$\sum_x P_{X,Y}(x,y)=P(Y=y)=P_Y(y)$ → Περιθώρια συνάρτηση Πιθανότητας της Y

Ιδιότητες

• $P_{X,Y}(x,y)\ge 0$

• $\sum_x\sum_y P_{X,Y}(x,y)=1$

4. Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης : Επιλογή Οικογένειας και Καταγραφή # παιδιών.
(αγόρια, κορίτσια)

X = # αγοριών
Y = # κοριτσιών
$(X,Y) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\} = \Omega$

15% οικογενειών → 0 παιδιά
25% οικογενειών → 1 παιδί
20% οικογενειών → 2 παιδιά
40% οικογενειών → 3 παιδιά

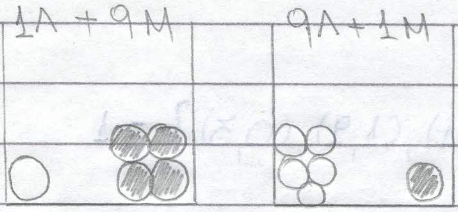
Πίνακας Συνάρτησης Πιθανότητας (X,Y)

$P_{X,Y}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2	3	$P_X(x)$
0	$\frac{15}{100}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	0	0	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$
$P_Y(y)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	1

5. Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης: 2 κάλπες - Επιλέγω κάλπη
Επιλέγω 2 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση



K_1 K_2

X = Επιλογή Κάλπης
Y = # Λευκών σφαιριδίων

(X,Y): διακριτή;
$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$
$P_X(x) = P(X=x)$
$P_Y(y) = P(Y=y)$

$(X,Y) \in (\{(1,0),(1,1),(2,1)(2,2)\}) = 1$, άρα (X,Y): διακριτή

$X \backslash Y$	0	1	2	$P_X(x)$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{20}$	0	0.5
2	0	0.1	0.4	0.5
$P_Y(y)$	0.4	0.2	0.4	1

$\leftarrow P_{X,Y}(x,y)$

6. Συνεχείς Δι-διάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

(X,Y) λέγεται συνεχής 2-διάστατη τυχαία μεταβλητή αν $\exists f_{X,Y}(x,y)$ σ.π.π. ώστε $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ και $P((X,Y)\in C) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

Ιδιότητες

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

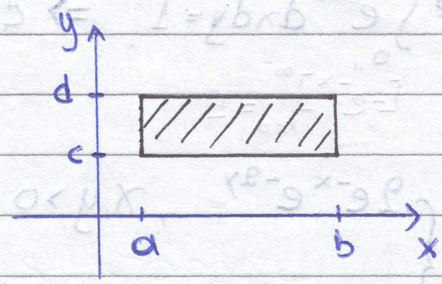
- $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ → Περιθώρια σ.π.π της Y

- $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ → Περιθώρια σ.π.π. της X

- $F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$

- $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F_{X,Y}(x,y)$

- $P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d)=\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$



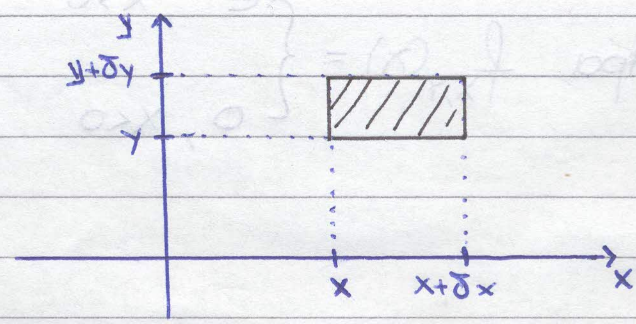
- Για συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (X,Y)

$P(X=x, Y=y)=0$

$P(X=x,\ y\le Y\le y')=0$ → Εμβαδό ευθύγραμμου τμήματος

$P(Y=y,\ x\le X\le x')=0$ → Εμβαδό ευθύγραμμου τμήματος

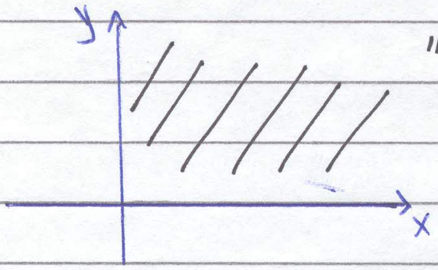
$$\frac{P(x< X\le x+\delta x,\ y< Y\le y+\delta y)}{\delta x\,\delta y}\simeq f_{XY}(x,y)$$



7. Παράδειγμα

(X,Y): 2-διάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c\, e^{-x} e^{-2y} & , x,y > 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



"ζει" μόνο όταν $X \geq 0$, $Y \geq 0$

(i) $c = ;$
(ii) $f_X(x)$
(iii) $f_Y(y)$
(iv) $P(X>1, Y<1)$
(v) $P(X<1)$
(vi) $P(X<Y)$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} c\, e^{-x} e^{-2y}\,dx\,dy = 1$

$\displaystyle\Rightarrow c\int_0^{\infty} e^{-2y}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx}_{\left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{\infty} = 1}\,dy = 1 \Rightarrow c\int_0^{\infty} e^{-2y}\,dy = 1 \Rightarrow c\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\right]_{y=0}^{\infty} = 1$

$\Rightarrow \boxed{c = 2}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x} e^{-2y} & , x,y > 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(ii) $\displaystyle f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dy = e^{-x}, \quad x>0$

$f_X(x) = 0 \quad , x<0$

άρα $$f_{X,Y}(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x>0 \\ 0 & , x<0 \end{cases}$$