Διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

2 Μαΐου 2010

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 4.38): Αν $E[X] = 1$ και $Var[X] = 5$ να βρείτε

1. $E[(2+X)^2]$,
2. $Var[4+3X]$.

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 4.64): Σε μια πόλη 400000 κατοίκων, ο αριθμός των αυτοκτονιών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο 4. Οι αριθμοί των αυτοκτονιών στους διάφορους μήνες θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

1. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες.
2. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα χρόνο να υπάρχουν τουλάχιστον 2 μήνες με 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες στον καθένα.
3. Ας υποθέσουμε ότι μόλις αρχίζει ο Μάιος του 2010. Ποιά είναι η πιθανότητα ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες να είναι ο Δεκέμβριος του 2010;

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 4.Theor10): Έστω X μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p ανά δοκιμή. Να βρείτε τη μέση τιμή

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right].$$

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 4.Theor19): Αν η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο λ, να αποδείξετε ότι

$$E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}].$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα υπολογίστε τις $E[X]$, $E[X^2]$ και $E[X^3]$.

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 5.1): Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Ποιά είναι η τιμή του c;
2. Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής της X.

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 5.4): Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, που παριστάνει το χρόνο ζωής μιας ηλεκτρονικής συσκευής (μετρημένο σε ώρες), δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{αν } x > 10 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Προσδιορίστε την $P(X > 20)$.
2. Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής της X.
3. Βρείτε την πιθανότητα ότι από 6 τέτοιες συσκευές που περιέχονται στην ίδια παρτίδα, τουλάχιστον 3 να υπερβούν τις 15 ώρες λειτουργίας. Θεωρήστε ότι οι χρόνοι ζωής διαφορετικών συσκευών είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 5.7): Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν $E[X] = \frac{3}{5}$, βρείτε τα a και b.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 5.25): Κάθε κομμάτι που παράγεται σε μια αλυσίδα παραγωγής είναι αποδεκτής ποιότητας με πιθανότητα 95%, ανεξάρτητα από τα άλλα κομμάτια. Θεωρούμε μια παρτίδα από 150 κομμάτια. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το πολύ 10 από τα κομμάτια να είναι απαράδεκτης ποιότητας.

Άσκηση 9 (Ross, Exer. 5.40): Αν η X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά της $Y = e^X$.

Άσκηση 10 (Ross, Exer. 5.Theor12): Η διάμεσος μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση κατανομής F είναι ένας αριθμός m τέτοιος ώστε $F(m) = \frac{1}{2}$. Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή είναι εξίσου πιθανό να έχει τιμές μεγαλύτερες της διαμέσου της όσο και να έχει τιμές μικρότερες. Να βρείτε τη διάμεσο της X, όταν η X ακολουθεί τις παρακάτω κατανομές:

1. την ομοιόμορφη στο (a, b),
2. την κανονική με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
3. την εκθετική με παράμετρο λ.

Απαντήσεις

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 4.38): Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[(2+X)^2] &= Var[2+X] + (E[2+X])^2 = Var[X] + 9 = 14, \\ Var[4+3X] &= 9Var[X] = 45. \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 4.64): Αφού ο αριθμός των αυτοκτονιών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο 4 θα έχουμε

$$p = P(\text{σε 1 μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες}) = 1 - \sum_{i=0}^{7} e^{-4}\frac{4^i}{i!}.$$

Ο αριθμός των μηνών σε ένα χρόνο που συμβαίνουν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες στον καθένα ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με 12 δοκιμές (όσοι οι μήνες) και πιθανότητα επιτυχίας p, την πιθανότητα σε 1 μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες. Συνεπώς έχουμε

$$P(\text{σε 1 χρόνο τουλάχιστον 2 μήνες με 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες}) = 1 - (1-p)^{12} - 12p(1-p)^{11}.$$

Ο αριθμός των μηνών μέχρι να εμφανιστεί ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p, την πιθανότητα σε 1 μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες. Δεδομένου ότι μόλις αρχίζει ο Μάιος, η πιθανότητα ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες να είναι ο Δεκέμβριος είναι

$$P(\text{ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες είναι ο 8ος από τώρα}) = (1-p)^7 p.$$

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 4.Theor10): Έχουμε

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{X+1}\right] &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} p^{i+1} (1-p)^{n-i} \\ &= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^{j} (1-p)^{n+1-j} \\ &= \frac{1}{(n+1)p} [(p + (1-p))^{n+1} - (1-p)^{n+1}] \\ &= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 4.Theor19): Έχουμε

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \sum_{i=0}^{\infty} i^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \\ &= \lambda E[(X+1)^{n-1}]. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή έχουμε:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \lambda E[(X+1)^0] = \lambda E[1] = \lambda \\
E[X^2] &= \lambda E[(X+1)^1] = \lambda(E[X]+1) = \lambda^2 + \lambda \\
E[X^3] &= \lambda E[(X+1)^2] = \lambda(E[X^2] + 2E[X] + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 5.1): Για τον προσδιορισμό της σταθεράς c έχουμε

$$c\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}.$$

Για τη συνάρτηση κατανομής έχουμε ότι $F(x) = 0$ για $x \leq 0$ και $F(x) = 1$ για $x \geq 1$. Επιπλέον

$$F(x) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-u^2)du = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right), \quad x \in (-1,1).$$

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 5.4): Έχουμε

$$P(X > 20) = \int_{20}^{\infty}\frac{10}{x^2}dx = \left[\frac{-10}{x}\right]_{x=20}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Για τη συνάρτηση κατανομής έχουμε ότι $F(x) = 0$ για $x \leq 10$ και

$$F(x) = \int_{10}^{x}\frac{10}{u^2}du = 1 - \frac{10}{x}, \quad x > 10.$$

Η πιθανότητα μια συσκευή να υπερβεί τις 15 ώρες λειτουργίας είναι $1 - F(15) = \frac{2}{3}$. Αν έχουμε μια παρτίδα 6 τέτοιων συσκευών, ο αριθμός αυτών που θα υπερβούν τις 15 ώρες λειτουργίας ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 6$ και $p = \frac{2}{3}$. Συνεπώς η πιθανότητα ότι από 6 τέτοιες συσκευές που περιέχονται στην ίδια παρτίδα, τουλάχιστον 3 να υπερβούν τις 15 ώρες λειτουργίας είναι

$$\sum_{i=3}^{6}\binom{6}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^{6-i}.$$

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 5.7): Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (a+bx^2)dx = 1 &\quad\Rightarrow\quad a + \frac{1}{3}b = 1 \\
\int_0^1 x(a+bx^2)dx = \frac{3}{5} &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $a = \frac{3}{5}$ και $b = \frac{6}{5}$.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 5.25): Έστω X ο αριθμός των απαράδεκτων κομματιών μεταξύ των 150. Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με μέση τιμή $150 \cdot 0.05 = 7.5$ και διασπορά $150 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 7.125$. Χρησιμοποιώντας την κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής (κεντρικό οριακό θεώρημα των DeMoivre-Laplace) έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X \leq 10) &= P(X \leq 10.5) \\
&= P\left(\frac{X - 7.5}{\sqrt{7.125}} \leq \frac{10.5 - 7.5}{\sqrt{7.125}}\right) \\
&\simeq P(Z \leq 1.1239), \quad Z \sim N(0,1) \\
&= 0.8695.
\end{aligned}$$

Άσκηση 9 (Ross, Exer. 5.40): Έχουμε για τη συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$ της Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } y \leq 1 \\ \log y & \text{αν } 1 < y < e \\ 1 & \text{αν } e \leq y. \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ της Y έχουμε:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{αν } 1 < y < e \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή είναι

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_1^e dy = e - 1.$$

Εναλλακτικά, μπορεί να βρεθεί από τον τύπο

$$E[e^X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x) dy = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Η διασπορά βρίσκεται από τον τύπο $Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$, όπου

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_1^e y dy = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Τελικά

$$Var[Y] = \frac{4e - e^2 - 3}{2}.$$

Άσκηση 10 (Ross, Exer. 5.Theor12): Έχουμε

1. $m = \frac{a+b}{2}$.
2. $m = \mu$.
3. $1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$ οπότε $m = \frac{1}{\lambda} \log 2$.

Πηγή

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.