

Διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

2 Μαΐου 2010

Άσκηση 1: Αν $E[X] = 1$ και $Var[X] = 5$ να βρείτε

1. $E[(2 + X)^2]$,
2. $Var[4 + 3X]$.

Άσκηση 2: Σε μια πόλη 400000 κατοίκων, ο αριθμός των αυτοκτονιών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο 4. Οι αριθμοί των αυτοκτονιών στους διάφορους μήνες θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

1. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα μήνα να συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες.
2. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα χρόνο να υπάρχουν τουλάχιστον 2 μήνες με 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες στον καθένα.
3. Ας υποθέσουμε ότι μόλις αρχίζει ο Μάιος του 2010. Ποιά είναι η πιθανότητα ο πρώτος μήνας στον οποίο θα συμβούν 8 ή περισσότερες αυτοκτονίες να είναι ο Δεκέμβριος του 2010;

Άσκηση 3: Έστω X μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p ανά δοκιμή. Να βρείτε τη μέση τιμή

$$E \left[\frac{1}{X+1} \right].$$

Άσκηση 4: Αν η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο λ , να αποδείξετε ότι

$$E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}].$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα υπολογίστε τις $E[X]$, $E[X^2]$ και $E[X^3]$.

Άσκηση 5: Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Ποιά είναι η τιμή του c ;
2. Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής της X .

Άσκηση 6: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X , που παριστάνει το χρόνο ζωής μιας ηλεκτρονικής συσκευής (μετρημένο σε ώρες), δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{αν } x > 10 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Προσδιορίστε την $P(X > 20)$.
2. Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής της X .
3. Βρείτε την πιθανότητα ότι από 6 τέτοιες συσκευές που περιέχονται στην ίδια παρτίδα, τουλάχιστον 3 θα υπερβούν τις 15 ώρες λειτουργίας. Θεωρήστε ότι οι χρόνοι ζωής διαφορετικών συσκευών είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Άσκηση 7: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν $E[X] = \frac{3}{5}$, βρείτε τα a και b .

Άσκηση 8: Κάθε κομμάτι που παράγεται σε μια αλυσίδα παραγωγής είναι αποδεκτής ποιότητας με πιθανότητα 95%, ανεξάρτητα από τα άλλα κομμάτια. Θεωρούμε μια παρτίδα από 150 κομμάτια. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το πολύ 10 από τα κομμάτια να είναι απαράδεκτης ποιότητας.

Άσκηση 9: Αν η X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά της $Y = e^X$.

Άσκηση 10: Η διάμεσος μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση κατανομής F είναι ένας αριθμός m τέτοιος ώστε $F(m) = \frac{1}{2}$. Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή είναι εξίσου πιθανό να έχει τιμές μεγαλύτερες της διαμέσου της όσο και να έχει τιμές μικρότερες. Να βρείτε τη διάμεσο της X , όταν η X ακολουθεί τις παρακάτω κατανομές:

1. την ομοιόμορφη στο (a, b) ,
2. την κανονική με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 ,
3. την εκθετική με παράμετρο λ .