Αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων και βασικοί υπολογισμοί
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

25 Μαρτίου 2010

Άσκηση 1: Έστω E, F και G τρία ενδεχόμενα σε πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο S. Να εκφράσετε τα παρακάτω ενδεχόμενα με βάση τα E, F, G και S, χρησιμοποιώντας συνολοθεωρητικές πράξεις (ένωση, τομή, συμπλήρωμα):

1. να συμβεί μόνο το E,
2. να συμβούν τα E και G αλλά όχι το F,
3. να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα E, F και G,
4. να συμβούν τουλάχιστον δυο από τα E, F και G,
5. να συμβούν και τα τρία από τα E, F και G,
6. να μην συμβεί ούτε το E, ούτε το F ούτε το G,
7. να συμβεί το πολύ ένα από τα E, F και G,
8. να συμβούν το πολύ δυο από τα E, F και G,
9. να συμβούν ακριβώς δυο από τα E, F και G,
10. να συμβούν το πολύ τρία από τα E, F και G.

Άσκηση 2: Να ανάγετε τα ακόλουθα ενδεχόμενα σε πιο απλή μορφή:

1. $(E \cup F)(E \cup F^c)$,
2. $(E \cup F)(E^c \cup F)(E \cup F^c)$,
3. $(E \cup F)(F \cup G)$.

Άσκηση 3: Αν $P(E) = 0.9$ και $P(F) = 0.8$, αποδείξτε ότι $P(EF) \geq 0.7$. Γενικά για δυο ενδεχόμενα E και F αποδείξτε ότι $P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1$. Γενικεύστε και αποδείξτε την ανισότητα Bonferroni που ισχυρίζεται ότι για οποιαδήποτε n ενδεχόμενα $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ισχύει

$$P(E_1 E_2 \cdots E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) - (n-1).$$

Άσκηση 4: Το 28% των αμερικάνων καπνίζει τσιγάρο, το 7% καπνίζει πούρο και το 5% καπνίζει και τσιγάρο και πούρο.

1. Ποιο ποσοστό των αμερικάνων δεν καπνίζει τσιγάρο ούτε πούρο;

2. Ποιο ποσοστό των αμερικάνων καπνίζει πούρο αλλά όχι τσιγάρο;

Άσκηση 5: Δυο συμμετρικά ζάρια (δηλαδή κανονικά εξάεδρα που εμφανίζουν ισοπίθανα κάθε έδρα τους σε κάθε ρίψη) έχουν δυο κόκκινες έδρες, δυο μαύρες έδρες, μια κίτρινη έδρα και μια λευκή έδρα. Τα δυο ζάρια ρίπτονται ταυτόχρονα. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουν και τα δυο το ίδιο χρώμα;

Άσκηση 6: Μια γειτονιά έχει 20 οικογένειες, από τις οποίες οι 4 έχουν από ένα παιδί, οι 8 έχουν από δυο παιδιά, οι 5 έχουν από τρία παιδιά, 2 έχουν από τέσσερα παιδιά και 1 έχει πέντε παιδιά.

1. Επιλέγουμε στην τύχη μια οικογένεια. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει i παιδιά, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

2. Επιλέγουμε στην τύχη ένα παιδί. Ποιά είναι η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει i παιδιά, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

Είναι συμβατά τα δυο αποτελέσματα; Συμφωνούν με τη διαίσθησή σας;

Άσκηση 7: Δυο συνηθισμένα ζάρια ρίπτονται ταυτόχρονα μια φορά.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι i, $i = 2, 3, \ldots, 12$;

2. Ποια είναι η πιθανότητα η απόλυτη διαφορά των ζαριών να είναι i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 5$;

3. Ποια είναι η πιθανότητα η μικρότερη ζαριά να είναι i, $i = 1, 2, \ldots, 6$;

Άσκηση 8: Ένα βέλος ρίχνεται εντελώς τυχαία στο εσωτερικού ορθογώνιου στόχου (τυχαία επιλογή σημείου στο εσωτερικό ορθογώνιου παραλληλογράμμου). Το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $20cm \times 50cm$. Ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να πέσει σε απόσταση το πολύ $5cm$ από κάποια κορυφή του ορθογωνίου;

Άσκηση 9: Σε ένα τουρνουά τένις μεταξύ των παικτών A, B και C, κάθε παίκτης παίζει μια φορά με καθέναν από τους άλλους δυο παίκτες (συνολικά γίνονται 3 αγώνες). Οι δυνάμεις των παικτών δίνονται ως εξής: $P(\text{ο } A \text{ να νικήσει τον } B) = 0.5$, $P(\text{ο } A \text{ να νικήσει τον } C) = 0.7$ και $P(\text{ο } B \text{ να νικήσει τον } C) = 0.4$. Υποθέτοντας ανεξαρτησία στα αποτελέσματα των αγώνων, να υπολογίσετε την πιθανότητα ο A να τερματίσει πρώτος ή μεταξύ των πρώτων (δηλαδή να σημειώσει τουλάχιστον τόσες νίκες όσες οποιοσδήποτε άλλος παίκτης).

Άσκηση 10: Ένας ακέραιος επιλέγεται τυχαία από τους $1, 2, \ldots, 1000$. Ποιά η πιθανότητα να διαιρείται με το 3 ή το 5; Ποιά η πιθανότητα να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους 3, 5, 7;