33ο Μάθημα Πιθανοτήτων

31/5/2010

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Κ.Ο.Θ.

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ + ισόνομες (τυχαίο δείγμα)

με $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $\quad \bar{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

Τότε: $\lim_{n \to \infty} P\left(\dfrac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \leq x \right) = \Phi(x)$ $\quad$ ($\Phi(x)$ σ.κ. της $N(0,1)$)

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}} \leq x \right) = \Phi(x)$$

② Πρακτική Χρήση του Κ.Ο.Θ.

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ + ισόνομες

$$P(a \le S_n \le b) = P\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \le \frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

$$\underset{\text{για } n\ge 30}{\overset{\text{ΚΟΘ}}{\approx}} P\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le Z \le \frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right), \quad Z \sim N(0,1)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

③ Διόρθωση συνέχειας

$X_1, X_2, \dots$ διακριτές ανεξ. + ισόνομ. με τιμές $\{0,1,2,\dots\}$ ή στο $\mathbb{Z}$ γενικά

Τότε:

$$P(4 \le S_n \le 70) = P(3{,}8 \le S_n \le 70{,}8) = P(3{,}01 \le S_n \le 70{,}2)$$

Για να εφαρμόσω το Κ.Ο.Θ. εφαρμόζω τη διόρθ. συνέχειας;

δηλαδή παίρνω $P(3{,}5 \le S_n \le 70{,}5)$

ΓΕΝΙΚΑ: $P(a \le S_n \le b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$P''(a - \frac{1}{2} \le S_n \le b + \frac{1}{2})$ ⟵ Εφαρμόζω εδώ το Κ.Ο.Θ.

④ Άσκηση

Παίκτης ρίχνει ζάρι

Ριψη	1	2	3	4	5	6
Κέρδος	-1	-2	-3	3	2	1

Προσεγγιστικά P(σε 42 ρίψεις κερδ. τουλ. 7)

X_i = κέρδος στην i ρίψη

S_{42} = συνολ. κέρδος στις 42 ρίψεις.

$$P_{\zeta\eta\tau} = P(S_{42} \ge 7) = P(S_{42} \ge 6{,}5) = P\left(\frac{S_{42} - E[S_{42}]}{\sqrt{Var[S_{42}]}} \ge \frac{6{,}5 - E[S_{42}]}{\sqrt{Var[S_{42}]}} \right) \quad (1)$$

$E[S_{42}] = 42 E[X_i]$ και $Var[S_{42}] = 42\, Var[X_i]$

$$E[X_i] = \sum_x x \cdot P(X_i = x) = \frac{1}{6}\left((-1)+(-2)+(-3)+3+2+1\right) = 0$$

$E[X_i^2] = \sum_x x^2 P(X_i = x) = \frac{1}{6}\left((-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2\right) = \frac{28}{6}$

Άρα: $Var[X_i] = \frac{28}{6} \Rightarrow E[S_{42}] = 42 \cdot 0 = 0$

$Var[S_{42}] = 42 \cdot \frac{28}{6} = 14^2$

$P_{ζητ.} \underset{n=42 \geq 30}{\overset{ΚΟΘ}{\simeq}} P\left(Z \geq \frac{6,5-0}{\sqrt{14^2}}\right) = P\left(Z \geq \frac{6,5}{14}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{6,5}{14}\right).$

5) Άσκηση

Ένα ταμείο μαζεύει μασούρια από κέρματα του 1 €.

20% των μασουριών έχει 49 κέρματα

70% » » 50 »

10% » » 51 »

P(σε 100 μασούρια να υπάρχουν τουλ. 4990 €) = ;

Λύση:

X_i = # κερμ. του i μασουριού

$P_{ζητ.} = P(S_{100} \geq 4990)$

$E[S_{100}] = 100\, E[X_i]$, $Var[S_{100}] = 100\, Var[X_i]$

$E[X_i] = 49 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,7 + 51 \cdot 0,1 = 49,9$

$E[X_i^2] = 49^2 \cdot 0,2 + 50^2 \cdot 0,7 + 51^2 \cdot 0,1 = 2490,3 \Rightarrow Var[X_i] = 0,29$

Άρα:

$$P_{ζητ.} = P(S_{100} \geq 4990) = P\left(\frac{S_{100} - E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \geq \frac{4989,5 - 4990}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{4989,5 - 4990}{\sqrt{29}}\right).$$

6) Άσκηση

Ημερήσιο Εισόδημα Χαρτοπαίκτη ~ Uniform([-5,5]) (σε χιλ. €)

Να υπολ. προσεγγ.

(α) P(σε 48 μέρες να κερδ. τουλ. 30) = ;

(β) Το ποσό s ώστε με πιθ. τουλ. 95% το εισόδ. σε 48 μέρες να

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

είναι κατ' απόλυτη τιμή $< s$

(γ) Το πλήθος ν των ημερών ώστε με πιθ. τουλ. 95% το εισοδ. να είναι κατ' απόλυτη τιμή < 50.

Λύση:

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ + ισόνομες

X_i = εισοδ. του χαρτοπ. την i μέρα

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ εισοδ. σε n μέρες

Ζητάμε: (α) $P(S_{48} \geq 30)$

(β) $s = ;$ ώστε $P(|S_{48}| < s) \geq 0,95$

(γ) $v = ;$ ώστε $P(|S_v| < 50) \geq 0,95$

$X \sim Uniform([a, b])$ $\quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} &, a \leq x \leq b \\ 0 &, \text{διαφορ.} \end{cases}$

$$E[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-5}^{5} x \frac{1}{10}\, dx = 0$$

$$E[X_i^2] = \int_{-5}^{5} x^2 \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} = \frac{25}{3}$$

$$Var[X_i] = \frac{25}{3} \implies E[S_n] = n \cdot 0 = 0$$

$$Var[S_n] = n\frac{25}{3} = \frac{25n}{3}$$

Άρα:

(α) $P(S_{48} \geq 30) = P\left(\frac{S_{48} - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} \geq \frac{30-0}{20}\right) \underset{n=48\geq 30}{\overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq}} P(Z \geq \frac{3}{2})$

με $Z \sim N(0,1) \Rightarrow P(S_{48} \geq 30) = 1 - \Phi(\frac{3}{2}) = \ldots$

(β) $P(|S_{48}| < s) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(-s < S_{48} < s) \geq 0,95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{-s-0}{20} < \frac{S_{48} - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} < \frac{s-0}{20}\right) \geq 0,95$

$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\Longleftrightarrow} P\left(\frac{-s}{20} < Z < \frac{s}{20}\right) \geq 0,95 \quad Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow \Phi(\frac{s}{20}) - \Phi(-\frac{s}{20}) \geq$

$\geq 0,95 \Leftrightarrow \Phi(\frac{s}{20}) - \left(1 - \Phi(\frac{s}{20})\right) \geq 0,95 \Leftrightarrow 2\Phi(\frac{s}{20}) \geq 1,95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Phi(\frac{s}{20}) \geq 0,975 = \Phi(1,96) \Leftrightarrow \frac{s}{20} \geq 1,96 \Leftrightarrow \underline{\underline{s \geq 39,2}}$

(γ) $P(|S_\nu| < 50) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(-50 < S_\nu < 50) \geq 0,95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{-50-0}{\sqrt{\nu \frac{25}{3}}} < \frac{S_\nu - E[S_\nu]}{\sqrt{Var[S_\nu]}} < \frac{50-0}{\sqrt{\nu \cdot \frac{25}{3}}}\right) \geq 0,95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{50}{5\sqrt{\frac{\nu}{3}}}\right) \geq 1,95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{\nu}}\right) \geq 0,975 = \Phi(1,96) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{\nu}} \geq 1,96 \Leftrightarrow \ldots$

7 Τυπικές Ασκήσεις

1) Δίνεται σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$
ή σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

$c = ;$	$f_{X\|Y}(x\|y)$	X, Y ανεξ.
$f_X(x)$	$E[X]$	$E[X\|Y=y]$
$f_Y(y)$	$Var[X]$	
	$Cov[X,Y]$	

2) Πείραμα τύχης σε 2 στάδια
Θεώρημα Ολ. Πιθ.
Bayes / Πολ/σμός Νόμος
Θεωρ. Διπλής Μέσης Τιμής

3) Τεχνικά θέματα
Πιθανογεν.
Ροπογεν.
Αναγεν. Ιδιότητες
ΚΟΘ

8 Θέμα 1 / Ιανουάριος 2010

$\begin{bmatrix} 6K \\ 8M \end{bmatrix} \rightarrow$ 4 σφαιρ. χωρίς επανατ.

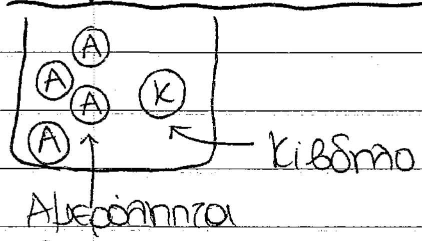
P(όλα τα σφαιρίδια του ίδιου χρωμ.) $= P(X=0) + P(X=4)$

$X = \# K$

$$P(X=x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{8}{4-x}}{\binom{14}{4}} \quad 0 \le x \le 4$$

Δηλ. $P_{ζητ.} = \dfrac{\binom{8}{6}}{\binom{14}{4}} + \dfrac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$

9 Θέμα 2 | Ιανουάριος 2010



K → πιθ. 1/2 (για αμερ.)

K 4/5 (για κιβδ.)

Πείραμα:
- Επιλ. νομίσματος στην τύχη
- Ρίψη 3 φορές. $=4/5$

$$P(κιβδ \mid έφερε\ 3\ "K") = \frac{P(κιβδ)\,\overbrace{P(έφερε\ 3\ "K" / είναι\ κιβδ.)}^{=\left(\frac{4}{5}\right)^3}}{P(έφερε\ 3\ "K")} = (1)$$

$$P(έφερε\ 3\ "K") = P(έφερε\ 3\ "K" \mid κιβδ)\,P(κιβδ) + P(έφερε\ 3\ "K" \mid αμερ.)\,P(αμερ.) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{4}{5}$$