22ο Μάθημα Πιθανοτήτων 26/4/2010

Πολυδιάστατες τ.μ.

1) Διδιάστατες τ.μ.

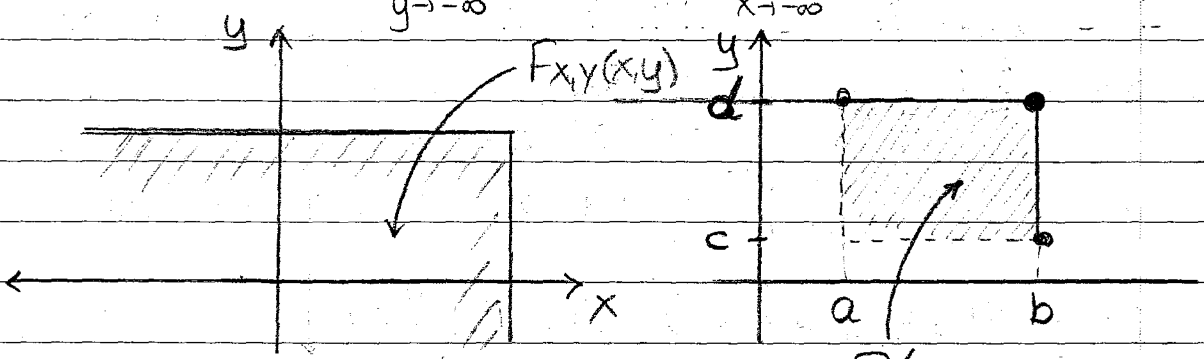
$(X,Y) \xrightarrow{\text{διδιάστ.}}$ 2 χαρακτηρ. τυχ. πειραμ.

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ από κοινού σ.κ. των X, Y

$F_X(x) = P(X \le x) = \lim\limits_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.κ. της X

$F_Y(y) = P(Y \le y) = \lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.κ. της Y.

$\lim\limits_{x,y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$, $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$



$P(a < X \le b, c < Y \le d)$

$P(a < X \le b, c < Y \le d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$

2) Διακριτές διδιάστατες τ.μ.

(X,Y) διακριτή $\Leftrightarrow \exists \{(x_0,y_0), (x_1,y_1), \dots\}$ έτσι ώστε

$P(X,Y) \in \{(x_0,y_0), (x_1,y_1), \dots\}$

$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$ από κοινού σ.π.

$P_X(x) = P(X = x) = \sum\limits_{y} P_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.π. της X

$P_Y(y) = P(Y = y) = \sum\limits_{x} P_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.π. της Y.

③ Παράδειγμα 1

Μια γειτονιά έχει οικογένειες εκ των οποίων:

15% $\longrightarrow$ 0 παιδιά

20% $\longrightarrow$ 1 παιδί

35% $\longrightarrow$ 2 παιδιά

30% $\longrightarrow$ 3 παιδιά

Κάθε παιδί Α ή Κ με πιθανότητα $1/2$ ανεξ.

Πείραμα τύχης: Επιλέγω στην τύχη οικογένεια

$X = \#$ A της οικογ.

$Y = \#$ K της οικογ.

(X,Y) διακρ. $\Leftrightarrow P((X,Y)) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(0,2),(1,1),(3,0),(0,3),(2,1),(1,2)\}$

$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

x \ y	0	1	2	3	$P_X(x)$
0	0,15	0,10	0,875	0,0375	0,3750
1	0,10	0,175	0,1125	0	0,3875
2	0,0875	0,1125	0	0	0,2000
3	0,0375	0	0	0	0,0375
$P_Y(y)$	0,3750	0,3875	0,2000	0,0375	1

$0,35 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0,175$

AK KA

④ Παράδειγμα 2

2 κάλπες

K_1	K_2
9 A	1 A
1 M	9 M

Πείραμα τύχης: Επιλέγω 2 σφαιρίδια

X = αριθμός κάλπης

$Y = \#$ άσπρων σφαιριδίων

$P_{X,Y}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2	$P_X(x)$
1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{0}{9}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9}\right)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}$	$\frac{1}{2}$
2	$4/10$	$1/10$	0	$\frac{1}{2}$
$P_Y(y)$	$4/10$	$2/10$	$4/10$	1

5) Παράδειγμα 3

Κάλπη με 3 κοκ., 4 πρασ., 5 μπλε σφαιρίδια

Πείραμα Τύχης: Επιλογή 3 σφαιρ. χωρίς επανάθεση

$$P_{X,Y}(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}} \qquad \begin{aligned} &0 \le x \\ &0 \le y \\ &0 \le x+y \le 3 \end{aligned}$$

$$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=0}^{3-x} \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}} = \frac{\binom{3}{x}\sum_{y=0}^{3-x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}} =$$

$$= \frac{\binom{3}{x}\binom{9}{3-x}}{\binom{12}{3}}, \quad 0 \le x \le 3.$$

6) Συνεχείς Διδιάστατες τ.μ.

(X,Y) συνεχής $\Leftrightarrow$ $\exists\, f_{X,Y}(x,y) \ge 0$ από κοινού σ.π.π. των X,Y.

ώστε $P((X,Y)\in C) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ περιθώρια σ.π.π. της X

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ — " — της Y

$$P((X,Y)\in(-\infty,x]\times(-\infty,y]) = P(X\le x, Y\le y)$$

$$\| $$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

Παραγωγίζοντας: $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$

$$P(a \le X \le b,\ c \le Y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

Διαισθητικά:

$$P(x < X < x+dx,\ y < Y \le y+dy) \simeq f(x,y)\,dx\,dy \,! \quad dx\,dy \to 0.$$

(7) Παράδειγμα

(X,Y) συνεχείς με σ.π.π. $f(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-x} e^{-2y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

a) $c = ;$
b) $f_X(x) = ;$
c) $f_Y(y) = ;$
d) $P(X>1, Y<1)$
e) $P(X<Y)$
f) $P(X<1)$

Λύση:

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} c \cdot e^{-x} e^{-2y} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\int_0^{\infty} e^{-2y} \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c\int_0^{\infty} e^{-2y} \underbrace{\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}}_{=1} dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow c = 2$$

b) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dy = e^{-x}, \quad x>0$$

Άρα: $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

c) Όμοια: $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0 \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

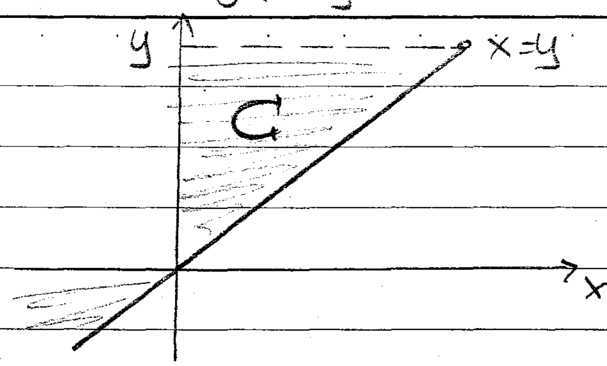
d) $$P(X>1, Y<1) = \int_{-\infty}^{1}\int_1^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_1^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^1 e^{-2y}\left[-e^{-x}\right]_1^{\infty} dy = 2e^{-1} \cdot \int_0^1 e^{-2y}\,dy =$$

$$= 2e^{-1}\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_0^1 = e^{-1}(1-e^{-2})$$

$0 < x < y$

e)



$$P(X < Y) = P((X,Y) \in C) = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dy\,dx = \dots = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy$$

f) $P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\,dx = \int_0^{1} e^{-x}\,dx = \underline{\underline{1 - e^{-1}}}$