21ο: Μάθημα Πιθανοτήτων 23/4/2010

Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

1) Η κανονική κατανομή ($\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)

Τυχαίο Πείραμα: Μεγέθη που προκύπτουν ως $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

n-μεγάλο

X_i ανεξ., ίδια κατανομή

$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff Y$ συνεχής τ.μ. με σ.π.π.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Είναι πράγματι σ.π.π.;

Πρέπει: i) $f_Y(y) > 0$, $y \in \mathbb{R}$ ✓

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$.

Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dy \overset{\frac{1}{\sigma}dy = dx}{\underset{x = \frac{y-\mu}{\sigma}}{=\!=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Αρκεί ν.δ.ο. $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$

$$\left(I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \right.$$

$x = r \cdot \text{συν}\theta$, $y = r \cdot \text{ημ}\theta$

$$\left. = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\, e^{-r^2/2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} d\theta = 2\pi \right)$$

Δηλαδή $I = \sqrt{2\pi}$, άρα είναι σ.π.π.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{συν}\theta & -r\,\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & r\,\text{συν}\theta \end{vmatrix}$$

② Ιδιότητα (Γραμμική συνάρτηση)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = aX + b, \; a \neq 0 \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Γενικά αν X συνεχής

$Y = aX + b \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}, \; x \in \mathbb{R}$

$Y = aX + b, \; f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}, \; y \in \mathbb{R}$

③ Πόρισμα

τυποποίηση της X

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{\text{Τυποποιημένη Κανονική}}$, όπου $Z = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma}$

④ Η τυποποιημένη κανονική

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ σ.π.π. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \; x \in \mathbb{R}$

$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du, \; x \in \mathbb{R}$

$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$

$Var[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(-e^{-x^2/2}\right)' dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\cancel{\left[-x e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}}^{0} + \int_{-\infty}^{\infty} (x)' e^{-x^2/2} dx \right) = 1$

⑤ Μέση Τιμή κ' Διασπορά $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$X = \sigma Z + \mu$

$\Rightarrow E[X] = \sigma \underbrace{E[Z]}_{=0} + \mu = \mu$

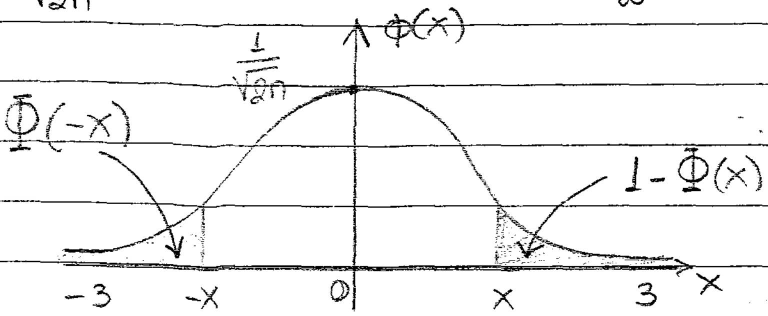
$Var[X] = \sigma^2 \underbrace{Var[Z]}_{=1} = \sigma^2$

⑥ Υπολογισμός Πιθανοτ. - Μέσων τιμών και με $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$X \sim \mathcal{N}(\underset{E[X]}{\mu}, \underset{Var[X]}{\sigma^2}) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$E[Z] = 0$, $Var[Z] = 1$

σ.π.π. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$



ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

⑦ Άσκηση

$$X \sim \mathcal{N}(\underset{\mu}{3}, \underset{\sigma^2}{9}) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-3}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$E[X] = 3$. $Var[X] = 9$

$$P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0,3779.$$

$P(X = 5) = 0$

$$P(X > 0) = P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) = P(Z > -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) =$$

$$= \Phi(1) = 0,843.$$

$$P(|X-3| > 6) = P\left(\left|\frac{X-3}{3}\right| > \frac{6}{3}\right) = P(|Z| > 2) = P(Z > 2) + P(Z < -2)$$

$$= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 2 - 2\Phi(2) = 0,0456$$

(1733) (1812)

8) Κεντρικό Οριακό Θεώρημα του De Moivre - Laplace

De Moivre: Προσέγγιση της $\binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} =$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$Bin\left(n, \tfrac{1}{2}\right) \simeq \mathcal{N}\left(\tfrac{n}{2}, \tfrac{n}{4}\right) \text{, n μεγάλο.}$$

Laplace: $Bin(n,p) \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p))$

Θεώρημα De Moivre Laplace

Αν $S_n \sim Bin(n,p)$ τότε: $\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) =$

$= \Phi(b) - \Phi(a)$

9ο Άσκηση

π.θ.

Νόμισμα $\xrightarrow{K} \frac{1}{2}$, $\xrightarrow{\Gamma} \frac{1}{2}$

40 φορές ρίψη

$X = \#K$.

$P(X=20) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} = 0{,}1254$ ← Ακριβής λύση

$P(X=20) = P(19{,}5 < X < 20{,}5) = P\left(\frac{19{,}5-20}{\sqrt{10}} < \frac{X-20}{\sqrt{10}} < \frac{20{,}5-20}{\sqrt{10}}\right)$

↑ Διορθ. συνεχ.

$\simeq \Phi(\ \ ) - \Phi(\ \ ) \simeq 0{,}1272$